

УДК 532.516, 532.546, 519.633

Особенности распространения трещины гидроразрыва породы при закачке в нее смеси проппанта и жидкости*

П.В. Карнаков, Д.С. Куранаков, В.Н. Лапин, С.Г. Черный, Д.В. Есипов

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

E-mail: cher@ict.nsc.ru

Предложена новая численная модель гидроразрыва пласта, описывающая протекающие в нем одновременно процессы закачки в трещину и течения в ней смеси жидкости и проппанта, распространения трещины с переменным по высоте и длине ее открытием, оседания проппанта и образования проппантовой упаковки, фильтрации жидкости через эту упаковку. Проведенные численные эксперименты показали, что расписание закачки проппанта, а также диаметр его частиц оказывают значительное влияние на месторасположение проппантовых упаковок, условия фильтрации жидкости через них и в конечном итоге на длину трещины и распределение по ней ее открытия.

Ключевые слова: распространение трещины гидроразрыва, течение смеси жидкости с проппантом, фильтрация жидкости через проппантовую пробку, дебит скважины.

Введение

Гидроразрыв пласта используется как для интенсификации продуктивности нефтяных и газовых скважин, так и для добычи на нетрадиционных месторождениях. Во время гидроразрыва жидкость под высоким давлением закачивается через скважину в породу и создает в ней трещину. Затем трещина заполняется твердыми частицами, называемыми проппантом. Лучшая проводимость заполненной проппантом трещины позволяет нефти и газу интенсивнее проникать из породы в скважину, что увеличивает ее дебет.

Прогнозирование распределения проппанта очень важно для эффективного проектирования трещины гидроразрыва, так как это распределение влияет на проводимость полученной в итоге трещины. В последнее десятилетие активизировался интерес исследователей к этому вопросу. Нужно выделить современные работы по построению усовершенствованных теоретических моделей переноса проппанта [1, 2] и моделей, основанных на экспериментальных данных [3, 4]. Отметим, что важными составляющими всех предлагаемых моделей [5] является различие осредненных скоростей жидкости и проппанта и существенное повышение вязкости смеси при увеличении концентрации частиц, определяемое различными функциональными зависимостями. Получаемые при этом модели гидроразрыва являются достаточно сложными для аналитического исследования, в связи с чем возникает необходимость применения численных методов. Однако

* Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (проект № 17-71-20139).

адекватное изучение механики протекающих процессов не всегда возможно из-за относительно высокой вычислительной сложности моделей, являющейся следствием одновременного решения связанных разнородных уравнений.

Целью настоящей работы заключается в разработке новой модели гидроразрыва пласта, формулировке численного метода для ее применения и изучении влияния различных компонент модели. Модель гидроразрыва должна учитывать разнообразные аспекты происходящего процесса: раскрытие трещины, разрушение породы, течение смеси и перенос проппанта. Предлагаемая модель описывает все основные механические процессы, связанные с переносом проппанта, и одновременно имеет невысокую вычислительную сложность за счет упрощенного рассмотрения деформированного состояния породы аналогично RKN-модели [6, 7]. Перенос проппанта обычно связан с разнообразными эффектами, такими как конвекция, оседание [8, 9] и формирование областей плотно упакованного проппанта [10].

Множество исследований по данной проблеме может быть найдено в литературных источниках [9, 11–15]. Новизна настоящей работы состоит в следующем. Во-первых, в отличие от современных моделей [3, 4], основанных на обобщении экспериментальных данных из работы [16], рассмотрена фильтрация жидкости через проппантную упаковку с использованием модели переключения течения на фильтрацию. Учет фильтрации расширяет область применимости модели, позволяя рассматривать распространение трещины с более высокой концентрацией проппанта, иначе [11–13] формирование проппантной упаковки вызовет полную остановку течения. Исследование распределения проппанта высокой концентрации помогает проектировать более эффективные трещины гидроразрыва [17]. Во-вторых, применяется упрощенный механизм раскрытия трещины, что позволяет более адекватно описывать раскрытие трещины, чем в моделях с предписанным поведением [9, 12], но при этом требует меньших вычислительных затрат, чем решение полной задачи упругости [11, 13–15, 18]. Наконец, для решения уравнения переноса концентрации проппанта применен метод частиц в ячейках с целью уменьшения численной диффузии по сравнению с конечно-разностными схемами [2] и другими распространенными методами [14]. Также предложен надежный метод совместного решения нелинейной системы уравнений модели.

Таким образом, построенная модель включает в себя различные механизмы для учета таких явлений, как влияние проппанта на вязкость смеси, оседание проппанта, фильтрация жидкости через упаковку проппанта, утечка жидкости в формацию и раскрытие трещины под действием давления смеси.

Разработанные подходы и методы планируется включить в более сложные модели, представленные в работах [18–20], для проведения детального моделирования. При этом ожидается, что их вычислительная сложность вырастет незначительно.

1. Математическая постановка

Модель состоит из нескольких элементов, представленных отдельно ниже, которые являются либо уравнениями в частных производных, либо явными соотношениями между зависимыми переменными. В итоге все уравнения вместе образуют полную модель.

1.1. Уравнения баланса жидкости и проппанта с учетом утечек

Трещина описывается как тонкий зазор постоянной высоты H и переменной ширины $W(x, y, t)$. Внутри трещины течет смесь жидкости гидроразрыва и проппанта. Течение считается гомогенным, т.е. свойства течения усреднены поперек ширины трещины. Движение суспензии, содержащей взвешенные частицы проппанта, в трещине гидроразрыва описывается уравнениями фильтрации двухфазной жидкости в двухскоростном

приближении. Считается, что каждая фаза несжимаема. Течение смеси является двумерным, и уравнения сохранения жидкости и проппанта, записанные в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}((1-c)W) + \operatorname{div}((1-c)W\mathbf{u}_f) = -Q_L, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(cW) + \operatorname{div}(cW\mathbf{u}_p) = 0, \quad (2)$$

являются естественными обобщениями уравнения неразрывности [21]

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div}(W\mathbf{u}) = Q(t)\delta(\mathbf{x}), \quad (3)$$

полученного осреднением трехмерного закона сохранения массы по ширине трещины. В приведенных уравнениях x — координата вдоль трещины, y — вертикальная координата, $c(x, y, t)$ — средняя по ширине трещины концентрация проппанта (объемная доля), $\mathbf{u}_f(x, y, t)$ — средняя скорость жидкости и $\mathbf{u}_p(x, y, t)$ — средняя скорость проппанта.

Утечка жидкости определяется законом Картера [22]

$$Q_L = \begin{cases} \frac{2C_L}{\sqrt{t-t_0}}, & c < c^*, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (4)$$

где c^* — критическая концентрация проппанта, C_L — эмпирический коэффициент утечки, $t = t_0(x, y)$ — время, при котором трещина впервые достигла точки (x, y) .

1.2. Раскрытие трещины

Раскрытие трещины определяется аналогично модели Перкинса–Керна–Нордгрена (РКН) [7], которая дает эллиптический профиль трещины, линейно зависящий от осредненного давления смеси в каждом сечении x [23]:

$$W(x, y, t) = \bar{p}(x, t)W_0(y), \quad W_0(y) = \frac{1-\nu^2}{E} \sqrt{\frac{H^2}{4} - y^2}, \quad (5)$$

$$\bar{p}(x, t) = \frac{1}{H} \int_0^H p(x, y, t) dy, \quad (6)$$

где E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона породы. Здесь под давлением подразумевается избыточное давление, т.е. разница между реальным давлением смеси и напряжениями залегания. Это упрощенное уравнение упругости описывает поведение трещины, зависящее от давления смеси. В то же время, его применение не вызывает трудностей с вычислительной точки зрения. В работах других авторов трещина может предполагаться постоянной формы [9] для исследования только течения смеси без возможности изучения эффекта распространения трещины. Другим решением может быть рассмотрение однопараметрического семейства форм трещины, позволяющее описывать рост трещины без какого-либо влияния изменения давления [12]. Полная модель упругости [11, 13, 18–20] хотя и дает наиболее детальное описание процесса, требует больше вычислительных затрат.

1.3. Поля скоростей

Движение жидкости и проппанта вызывается перепадом давления, образующимся за счет закачки жидкости в трещину, или за счет гравитационных сил. Скорости жидкости и проппанта в общем случае не совпадают. Например, проппант останавливается при

высокой концентрации, тогда как жидкость фильтруется через упаковку проппанта. И наоборот, при оседании проппант может двигаться в покоящейся жидкости.

Скорости жидкости \mathbf{u}_f и проппанта \mathbf{u}_p определяются двумя различными способами в зависимости от концентрации проппанта. Если концентрация больше критического значения c^* , поля скоростей определяются как

$$\mathbf{u}_p = 0, \quad (7)$$

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_{\text{filtration}}, \quad (8)$$

это означает, что жидкость фильтруется через неподвижный проппант. Скорость фильтрации $\mathbf{u}_{\text{filtration}}$ вычисляется с использованием уравнения [24]

$$-\nabla p + \rho_m \mathbf{g} = \left(\frac{72\lambda_m c^{*2} \mu_f}{(1-c^*)^3 d_p^2} |\mathbf{u}_{\text{filtration}}| \frac{3}{2} f_0 \frac{c^*}{(1-c^*)^3} \cdot \frac{\rho_f}{2d_p} |\mathbf{u}_{\text{filtration}}|^2 \right) \frac{\mathbf{u}_{\text{filtration}}}{|\mathbf{u}_{\text{filtration}}|}, \quad (9)$$

где μ_f и ρ_f — соответственно вязкость и плотность жидкости гидроразрыва, ρ_p — плотность проппанта, $\rho_m = (1-c)\rho_f + c\rho_p$, d_p — диаметр частиц проппанта, а значения эмпирических параметров составляют $\lambda_m = 25/12$ и $f_0 = 7/3$. Уравнение (9) представляет собой уравнение Эргуна, которое описывает нелинейную фильтрацию жидкости через плотную упаковку сферических частиц проппанта. Согласно ему повышение перепада давления ведет к практически квадратичному росту сопротивления фильтрации.

Другой режим течения смеси осуществляется, если концентрация проппанта оказывается меньше критического значения. В этом случае определение скоростей происходит с помощью соотношений, полученных автором работы [8]:

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_{\text{flow}} + \mathbf{u}_{\text{settling}}, \quad (10)$$

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_{\text{flow}} - \frac{c}{1-c} \mathbf{u}_{\text{settling}}, \quad (11)$$

$$\mathbf{u}_{\text{flow}} = -\frac{W^2}{12\mu(c)} (\nabla p - \rho_m \mathbf{g}), \quad (12)$$

$$\mathbf{u}_{\text{settling}} = \frac{(\rho_p - \rho_m) d_p^2}{18\mu(c)} \mathbf{g}, \quad (13)$$

где $\mu(c)$ — вязкость смеси, \mathbf{u}_{flow} — скорость ньютоновской смеси в узком канале, $\mathbf{u}_{\text{settling}}$ — скорость гравитационного оседания проппанта. Считается, что смесь проппанта и жидкости является однородной (распределение частиц по ширине трещины постоянно), скорость оседания сферических частиц проппанта относительно жидкости определяется согласно формуле Стокса. Кроме того, уравнение (12) не учитывает рассогласование средних скоростей фаз при приложенном фиксированном перепаде давления. Влиянием движения проппанта на течение жидкости пренебрегается, поэтому в уравнениях закона сохранения импульса отсутствуют слагаемые, отвечающие за приток импульса от движения проппанта.

Вязкость смеси определяется из концентрации проппанта с помощью соотношения Марона–Пирса [25]

$$\mu(c) = \mu(0) \left(1 - \frac{c}{c^*} \right)^{-2}. \quad (14)$$

Согласно экспериментальному исследованию, выполненному в работе [26], это соотношение может быть использовано для вычисления вязкости суспензии твердых частиц. Формула (14) имеет сингулярность при достижении плотной упаковки — $c = c^*$. Для того, чтобы избежать в алгоритме реализации предлагаемой модели сингулярности, переход к режиму фильтрации проводится по закону

$$\mathbf{u}_f = \max\text{mod} \left\{ \mathbf{u}_{\text{flow}} - \frac{c}{1-c} \mathbf{u}_{\text{settling}}, \mathbf{u}_{\text{filtration}} - \frac{c}{1-c} \mathbf{u}_{\text{settling}} \right\}, \quad (15)$$

где функция $\max\text{mod} \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \}$ дает максимальный по модулю вектор, а $\mathbf{u}_{\text{filtration}}$ определяется из уравнения (9) при подстановке в него текущего значения концентрации c вместо критического c^* . Скорость ньютоновской смеси \mathbf{u}_{flow} не успевает достичь нулевого значения, соответствующего критическому значению концентрации $c = c^*$ (дающему сингулярность в формуле (14)) в силу постоянности выполнения условия $|\mathbf{u}_{\text{filtration}}| > 0$. Причем если концентрация превысила критическое значение, то рассматривается режим фильтрации. Таким образом, алгоритм реализации модели исключает возникновение сингулярности, т.к. переключение на фильтрацию происходит с меньшими концентрациями $c < c^*$ при конечных значениях $\mu(c)$ [27].

1.4. Граничные и начальные условия

Задача ставится в области $x \in [0, L]$, $y \in [0, H]$. Смесь закачивается через входное сечение $x = 0$, на котором задаются нормальная компонента скорости смеси и концентрация пропанта. Нормальная компонента скорости смеси равна нулю на нижней и верхней границах трещины, а на границе $x = L$ скорость имеет нулевую нормальную производную. Во всех рассмотренных задачах входная скорость постоянна вдоль сечения и вычисляется таким образом, чтобы обеспечить заданную объемную скорость закачки. В начальный момент времени ширина трещины равна нулю везде, кроме маломерной области возле входного сечения.

2. Численный метод

2.1. Уравнение сохранения массы смеси

Уравнение сохранения смеси получается путем суммирования уравнений сохранения жидкости (1) и сохранения пропанта (2):

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}(W \mathbf{u}_m) = -Q_L, \quad (16)$$

где $\mathbf{u}_m = (1-c) \mathbf{u}_f + c \mathbf{u}_p$. Последнее уравнение с учетом уравнения раскрытия трещины (5) можно переписать в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}(k \nabla p) = f, \quad (17)$$

$$W(x, y, t) = W_0(y) \bar{p}(x, t). \quad (18)$$

Функция $k(p, \nabla p, W, c)$ вычисляется по закону

$$k(p, \nabla p, W, c) = -W \max \left\{ \frac{W^2}{12\mu(c)}, \frac{(1-c)|\mathbf{u}_{\text{filtration}}|}{|\nabla p|} \right\}, \quad (19)$$

который обеспечивает бессингулярный переход от режима течения смеси к режиму фильтрации жидкости через упаковку проппанта. Скорость $\mathbf{u}_{\text{filtration}}$ определяется из решения уравнения (9). Правая часть уравнения (17) принимает в режиме течения смеси и режиме фильтрации соответственно значения

$$f = \frac{g}{12} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho_m W^3}{\mu(c)} \right) - Q_L \quad \text{и} \quad f = -Q_L. \quad (20)$$

Тип течения определяется по переключению k . Дискретизация (17), (18) по неявной схеме первого порядка по времени дает

$$\frac{W^{n+1} - W^n}{\Delta t} + \text{div}(k^{n+1} \nabla p^{n+1}) = f^{n+1}, \quad (21)$$

$$W^{n+1}(x, y, t) = W_0^{n+1}(y) \bar{p}(x, t). \quad (22)$$

Затем вводится итерационный процесс для линеаризации полученной системы

$$\frac{W^{s+1} - W^n}{\Delta t} + \text{div}(k^s \nabla p^{s+1}) = f^s, \quad (23)$$

$$W^{s+1}(x, y, t) = W_0^{s+1}(y) \bar{p}(x, t), \quad (24)$$

где s — номер итерации. Решение с предыдущего шага по времени используется в качестве начального итерационного приближения для решения на текущем шаге.

Пространственная дискретизация выполняется с использованием метода конечных объемов на равномерной декартовой сетке, имеющей N_x и N_y ячеек в направлениях x и y соответственно. Центр ячейки обозначен как \mathbf{x}_α , греческие нижние индексы α и β означают номера ячеек. Таким образом, дискретные уравнения могут быть представлены в форме

$$\frac{W_\alpha^{s+1} - W_\alpha^n}{\Delta t} + \sum_\beta a_{\alpha\beta}^s p_\beta^{s+1} = b_\alpha^s, \quad (25)$$

$$W_\alpha^{s+1} = \sum_\beta d_{\alpha\beta} p_\beta^{s+1}, \quad (26)$$

где коэффициенты $a_{\alpha\beta}^s$ и b_α^s вычисляются с помощью значений, известных с предыдущей итерации.

2.2. Сопряжение моделей жидкости и упругости

Уравнения (25), (26) составляют линейную систему для нахождения W^{s+1} и p^{s+1} на каждой итерации. Однако, так как формула для раскрытия трещины содержит давление, осредненное по каждому сечению x , шаблон схемы включает по крайней мере $N_y + 2$ точек для внутренних ячеек.

Другим путем линеаризации системы является использование итераций Пикара, т.е. решения двух уравнений последовательно одно за другим. Однако такой подход требует соблюдения условия $W > 0$, иначе уравнение сохранения массы смеси вырождается. Более того, согласно результатам численных экспериментов, выполненных для случая $W > 0$, сходимость оказалась медленной (тысячи итераций на каждый шаг по времени).

В настоящей работе предложен еще один метод линеаризации. А именно, уравнение (25) переписывается в виде

$$\frac{W_\alpha^{s+1} - W_\alpha^s}{\Delta t} + \frac{W_\alpha^s - W_\alpha^n}{\Delta t} + \sum_\beta a_{\alpha\beta}^s p_\beta^{s+1} = b_\alpha^s \quad (27)$$

и вместо (26) используется упрощенное соотношение для $W^{s+1} - W^s$:

$$W_\alpha^{s+1} - W_\alpha^s = k_\alpha (p_\alpha^{s+1} - p_\alpha^s). \quad (28)$$

После подстановки (28) в (27) получаем окончательный вид уравнения для давления:

$$\frac{k_\alpha}{\Delta t} p_\alpha^{s+1} + \frac{W_\alpha^s - W_\alpha^n}{\Delta t} + \sum_\beta a_{\alpha\beta}^s p_\beta^{s+1} = b_\alpha^s + \frac{k_\alpha}{\Delta t} p_\alpha^s. \quad (29)$$

Коэффициенты k_α выбираются таким образом, чтобы соотношение (28) при выполнении (26) точно выполнялось для любого постоянного приращения давления $p_\alpha^{s+1} - p_\alpha^s = \Delta p_0$:

$$k_\alpha \Delta p_0 = W_\alpha^{s+1} - W_\alpha^s = \sum_\beta d_{\alpha\beta} p_\beta^{s+1} - \sum_\beta d_{\alpha\beta} p_\beta^s = \Delta p_0 \sum_\beta d_{\alpha\beta}, \quad (30)$$

что эквивалентно

$$k_\alpha = \sum_\beta d_{\alpha\beta}. \quad (31)$$

Оценим сходимость итерационного процесса, задаваемого уравнением (29). Для этого перепишем (29) в виде

$$\sum_\beta \left(\frac{k_\alpha}{\Delta t} \delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}^s \right) p_\beta^{s+1} = b_\alpha^s - \frac{W_\alpha^s - W_\alpha^n}{\Delta t} + \frac{k_\alpha}{\Delta t} p_\alpha^s. \quad (32)$$

По теореме о сжимающем отображении итерационный процесс (32) сходится, если собственные значения матрицы $\left\{ \frac{k_\alpha}{\Delta t} \delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}^s \right\}^{-1}$ меньше 1. Для собственных значений λ

матрицы $\left\{ \frac{k_\alpha}{\Delta t} \delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}^s \right\}$ из теоремы Гершгорина следует неравенство

$$\max \lambda \geq \min_\alpha \left(\frac{k_\alpha}{\Delta t} + a_{\alpha\alpha}^s - \sum_{\beta \neq \alpha} |a_{\alpha\beta}^s| \right) = D. \quad (33)$$

Из вида зависимости ширины трещины от давления (5), (6) следует, что все $d_{\alpha\beta}$ в соотношении (26) положительны. Тогда, согласно (31), все величины k_α также будут положительны, поэтому при достаточно малых шагах Δt для величины D выполняется неравенство $D > 1$. В этом случае все собственные значения матрицы $\left\{ \frac{k_\alpha}{\Delta t} \delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}^s \right\}$ больше

единицы, а собственные значения матрицы $\left\{ \frac{k_\alpha}{\Delta t} \delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}^s \right\}^{-1}$ меньше единицы, что

гарантирует сходимость итерационного процесса (32). Сошедшиеся поля будут удовлетворять исходной нелинейной системе (25), (26). Сходимость итераций для этого подхода будет обсуждаться в разделе 3.4.

Приближенное соотношение (28) выполняется точно в некоторых тестовых задачах. Эта идея линеаризации может быть применена и для других задач, например, для улучшения метода SIMPLE, известного как алгоритм SIMPLER [28].

2.3. Уравнение переноса пропанта

Уравнение переноса пропанта получено из уравнений (2) и (16) и преобразовано с использованием индивидуальной производной

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u}_p \cdot \nabla c = \frac{c}{W} \left[\operatorname{div}(W(1-c)(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_p)) + Q_L \right] \quad (34)$$

для решения с помощью метода частиц в ячейках. Изначально предложенный в работе [29], этот метод использует набор движущихся частиц, расположенных в области моделирования. Частицы характеризуются их месторасположением \mathbf{x}_i и значением концентрации пропанта c_i , где i — номер частицы. Эти данные используются для вычисления концентрации пропанта в каждой ячейке сетки \mathbf{x}_α с использованием взвешенного осреднения

$$c_\alpha = \frac{\sum_i w_\alpha(\mathbf{x}_i) c_i}{\sum_i w_\alpha(\mathbf{x}_i)}, \quad (35)$$

$$w_\alpha(\mathbf{x}_i) = \max(0, 1 - r_\alpha(\mathbf{x}_i) / r_0), \quad (36)$$

$$r_\alpha(\mathbf{x}_i) = \sqrt{\left(\frac{x_i - x_\alpha}{\Delta x_\alpha / 2} \right)^2 + \left(\frac{y_i - y_\alpha}{\Delta y_\alpha / 2} \right)^2}, \quad (37)$$

где $r_0 = \sqrt{2}$ — значение величины r , при котором вес равен нулю.

В соответствии с методом частиц в ячейках уравнения для траектории движения i -ой частицы пропанта и изменения вдоль нее концентрации пропанта записываются в виде

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{u}_p(\mathbf{x}_i, t), \quad (38)$$

$$\dot{c}_i = \operatorname{RHS}(\mathbf{x}_i, t), \quad (39)$$

где точкой сверху обозначена полная производная вдоль траектории, а через RHS обозначена пространственная дискретизация правой части уравнения (34).

Дискретизация по времени в свою очередь обеспечивается методом Рунге–Кутты второго порядка

$$\mathbf{x}_i^{n+1/2} = \mathbf{x}_i^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{u}_p^n(\mathbf{x}_i^n), \quad (40)$$

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^n + \Delta t \mathbf{u}_p^n(\mathbf{x}_i^{n+1/2}), \quad (41)$$

$$c_i^{n+1} = c_i^n + \Delta t \operatorname{RHS}_i. \quad (42)$$

Значения RHS_i вычисляются с использованием правила ближайшего соседа, т.е. копируются из ближайшего центра ячейки. Билинейная интерполяция из узлов сетки используется для определения $\mathbf{u}_p(\mathbf{x}_i)$.

Для поддержания разумной плотности частиц предусмотрена возможность удаления либо добавления частиц в область. Частица добавляется в центр ячейки, если полное количество частиц в ячейке меньше заданного значения и расстояние от центра ячейки

до ближайшей частицы достаточно велико. Новой частице присваивается значение концентрации проппанта из центра ячейки. И наоборот, частица удаляется из ячейки, если полное количество частиц в ячейке превышает заданное значение. Самые новые частицы (т.е. созданные позже) удаляются в первую очередь.

Такая разновидность метода частиц в ячейках дает возможность вычислять переносимые величины в центрах ячеек с помощью взвешенного осреднения вместо взвешенной суммы. При этом масса проппанта не сохраняется строго. Однако эта разновидность метода достоверно сохраняет равномерный профиль концентрации. Данное свойство предполагается более важным, так как вязкость смеси значительно зависит от концентрации проппанта. Также этот вариант метода позволяет легко добавлять и удалять частицы из области без необходимости пересчитывать значения величин в других частицах. Введенный дефект сохранения массы остается приемлемым для рассмотренных задач, о чем будет написано подробнее в разделе 3.3.

2.4. Краткое описание алгоритма

Вычисления выполняются по временным шагам. На каждом n -м шаге по времени решаются уравнения с использованием итераций по s . Итерация начинается с решения уравнения (29) для нахождения p^{s+1} . Затем вычисляется ширина трещины W^{s+1} с помощью явной формулы (26). Поля как давления, так и ширины трещины используются для нахождения полей скоростей проппанта и жидкости из уравнений (10) и (11). Наконец, уравнение переноса проппанта (34) разрешается на основе известных значений скорости. Итерационная процедура повторяется до тех пор, пока не выполнится критерий сходимости

$$R = \frac{\max |p_\alpha^{s+1} - p_\alpha^s|}{\text{average}(|p^s|)} < \varepsilon = 10^{-2}. \quad (43)$$

После этого алгоритм переходит на следующий шаг по времени.

3. Верификация

3.1. Тестовая задача

Для того, чтобы продемонстрировать характер поведения получаемого по модели решения, рассмотрим тестовую задачу. Пусть параметры эксперимента $L = 200$ м, $H = 50$ м, $E = 10^{10}$ Па, $\nu = 0,2$, $\mathbf{g} = (0, -10)$ м/с², $N_x = 200$, $N_y = 50$, $\Delta t = 20$ с, $Q_{in} = 0,01$ м³/с, $C_L = 3 \cdot 10^{-5}$ м/с^{1/2}, $\mu_f = 1$ Па·с, $\rho_f = 1000$ кг/м³, $\rho_p = 2700$ кг/м³, $d_p = 2$ мм, $c^* = 0,64$, $c_{in} = 0,3$ соответствуют реалистичной операции гидроразрыва. Трещина распространяется постепенно от линии закачки жидкости. Процесс начинается с закачки жидкости без проппанта в течение начального периода 2500 с, за которым следует закачка гидросмеси с проппантом с концентрацией c_{in} . В течение этого процесса концентрация проппанта возрастает возле кончика трещины из-за утечки жидкости в породу, а также в нижней части трещины, в то время как в верхней части формируется область с чистой жидкостью.

На рис. 1 показана форма трещины с увеличением ее ширины в 700 раз. Трещина имеет эллиптический профиль в каждом сечении x . Цветовая дифференциация соответствует различным значениям концентрации проппанта. Горизонтальная сплошная линия выделяет сечение срединной плоскости. На рисунке также можно видеть контурные графики концентрации проппанта в различные моменты времени.

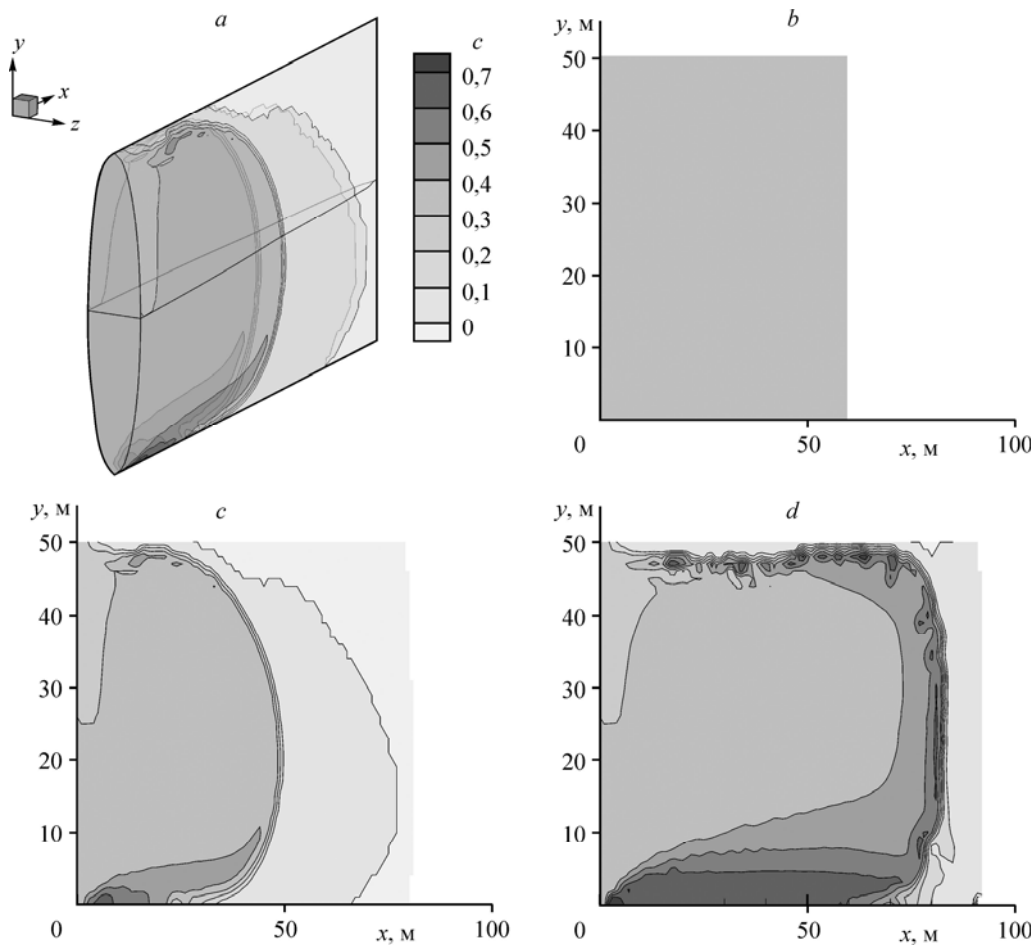


Рис. 1. Результаты расчета тестовой задачи.

Форма трещины при $t = 4500$ с (a); распределения концентрации проппанта в различные моменты времени: $t = 2500$ (b), 4500 (c), 7500 (d) с.

3.2. Верификация модели переноса и оседания проппанта

Результаты вычислений по настоящей модели сравниваются с результатами работы [9], полученными для трещин, имеющих фиксированную форму. В этом случае течение полностью определяется в текущий момент времени в терминах безразмерных переменных скорости закачки Q_{in} и числа плавучести [9]

$$N_{Bu} = \frac{c^*(\rho_p - \rho_f)W^3 H |g|}{\mu_f Q_{in}}. \quad (44)$$

На рис. 2 показаны графики фронта проппанта для двух случаев. Первый случай — течение смеси в эллиптической трещине с максимальной шириной 6 мм, здесь $N_{Bu} = 26,1$ и $Q_{in} = 0,0065$ м³/с. Во втором случае рассмотрено течение в трещине равномерной ширины $W = 12,7$ мм с $N_{Bu} = 46$ и $Q_{in} = 0,075$ м³/с. Расчеты по настоящей модели проведены при тех же условиях. В обоих случаях наблюдается общее соответствие между двумя решениями. Различие может быть объяснено неверной интерпретацией параметров в работе [9], в частности, там присутствует несоответствие между входной скоростью, временем и размером области.

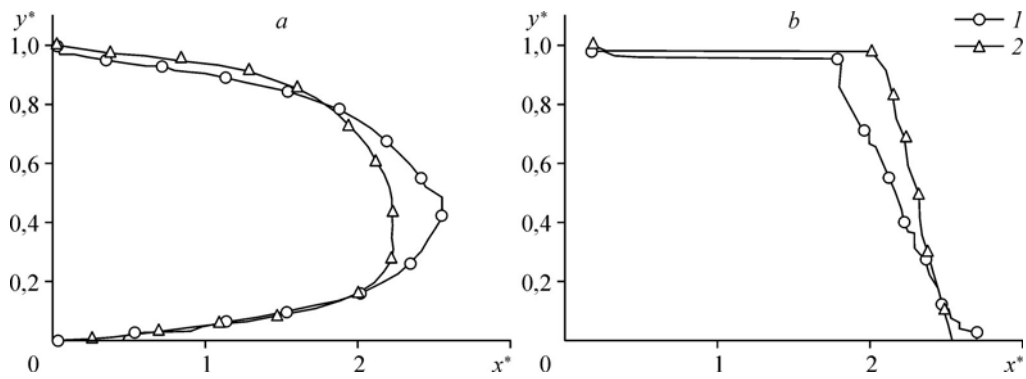


Рис. 2. Сравнения результатов работы [9] (1) с данными, полученными по настоящей модели (2). a — данные для эллиптической трещины, b — данные для трещины постоянной ширины; $x^* = x/H$ и $y^* = y/H$.

3.3. Сохранение массы

Как упоминалось в разделе 2.3, вариант метода частиц в ячейках, используемый в настоящей работе, не удовлетворяет точно закону сохранения массы пропанта. На рис. 3 показаны зависимости от t относительных ошибок сохранения объемов отдельных фаз и смеси в тестовой задаче 3.1. Для их определения вычислялся полный объем каждой фазы (реальный объем) на каждом шаге по времени путем интегрирования по всей области, а планируемый объем находился из известной скорости закачки и утечки жидкости. Относительная ошибка сохранения объема ε_V вычислялась как разность между реальным и планируемым объемами фазы, деленная на полный объем смеси в конце моделирования. Как видно из графика, ошибка сохранения для обеих фаз и самой смеси находится в пределах 0,005 на протяжении всего эксперимента. Следовательно, нарушение сохранения массы из-за метода частиц в ячейках в рассматриваемых задачах несущественно.

3.4. Сходимость итераций

Сходимость итераций изучалась на тестовой задаче 3.1. Для улучшения сходимости коэффициент, отвечающий за вертикальное движение смеси, был искусственно завышен возле кончика трещины. Длина этой области равнялась 5 м, т.е. примерно 5 % от характерной длины трещины. Это не должно было повлиять на точность решения, так как модификация относительно мала и локализована возле кончика трещины.

Чтобы продемонстрировать, что выбранные согласно (31) коэффициенты k являются оптимальными, были проведены расчеты со значениями k , умноженными на корректирующий коэффициент r с различными значениями. Как показано на рис. 4, значение $r = 1$ обеспечивает лучшую скорость сходимости.

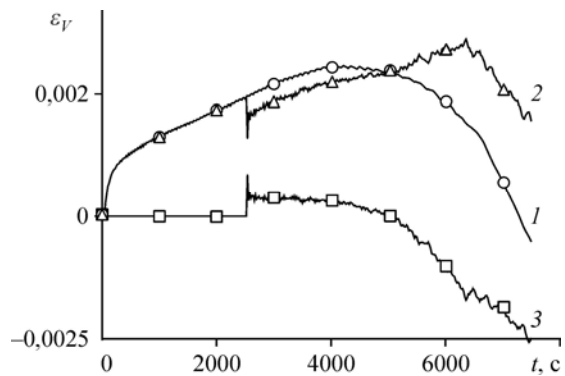


Рис. 3. Зависимости от t относительных ошибок сохранения объема ε_V для каждой фазы и для смеси. 1 — смесь, 2 — жидкость, 3 — пропант.

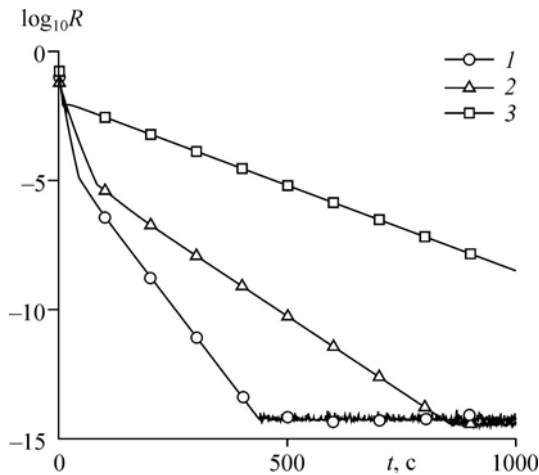


Рис. 4. Сходимость итераций для различных значений корректирующего коэффициента.
 $r = 1$ (1), 2 (2), 0,5 (3).

Для рассмотренной задачи требуется 5–10 итераций, чтобы удовлетворить критерию сходимости (43). Время последовательного расчета составляет примерно 0,2 секунды для одной итерации и 4 минуты — для всего моделирования на процессоре Intel Xeon X5670.

4. Результаты численного моделирования

Общее поведение решения, полученного по модели, было продемонстрировано в разделе 3.1. Исследуем отдельно ее различные особенности. Параметры и постановка задачи из 3.1 используются как базовые и могут изменяться в каждом отдельном случае для исследования влияния конкретного параметра.

4.1. Влияние проппанта

Для оценки влияния закачки проппанта проведены расчеты с различной концентрацией закачиваемого проппанта. Утечкой жидкости и силами гравитации в вычислениях пренебрегалось. На рис. 5 показаны распределения ширины трещины и концентрации проппанта в срединном сечении. Все графики приведены для одного и того же момента времени. Длина трещины различается в зависимости от концентрации закачиваемого проппанта: чем выше концентрация, тем медленнее распространяется трещина. Этот эффект вызван зависимостью вязкости смеси от концентрации проппанта (14).

4.2. Влияние утечки жидкости

Утечка жидкости определяется фильтрацией жидкости в породе через берега трещины. Как только образуется новая поверхность трещины, она начинает забирать жидкость до тех пор, пока область не станет насыщенной. Интенсивность утечки постепенно

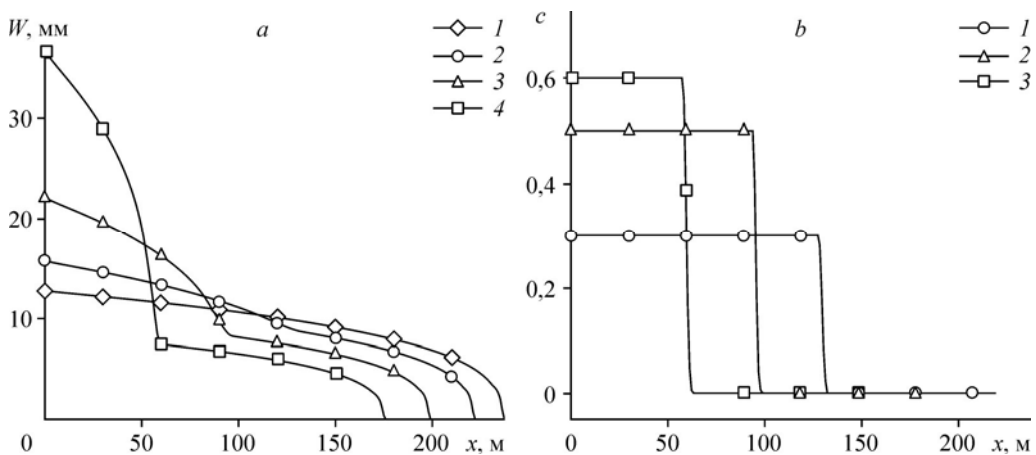


Рис. 5. Распределения ширины трещины (a) и концентрации проппанта (b) в срединном сечении трещины для различных значений концентрации закачиваемого проппанта.

$a - c_{in} = 0$ (1), 0,3 (2), 0,5 (3), 0,6 (4), $b - c_{in} = 0,3$ (1), 0,5 (2), 0,6 (3).

спадает после раскрытия трещины, поэтому утечка жидкости более интенсивна возле кончика трещины и концентрация проппанта резко увеличивается при достижении им этой области. Хотя моделирование утечки жидкости в окрестности кончика трещины обычно выполняется с помощью других подходов [30], тем не менее используемая в настоящей работе модель Картера демонстрирует качественно похожие результаты, давая при этом более интенсивную утечку на кончике трещины.

На рис. 6 показаны распределения концентрации проппанта для различных значений Картеревского коэффициента утечки C_L . Области высокой концентрации проппанта распределены

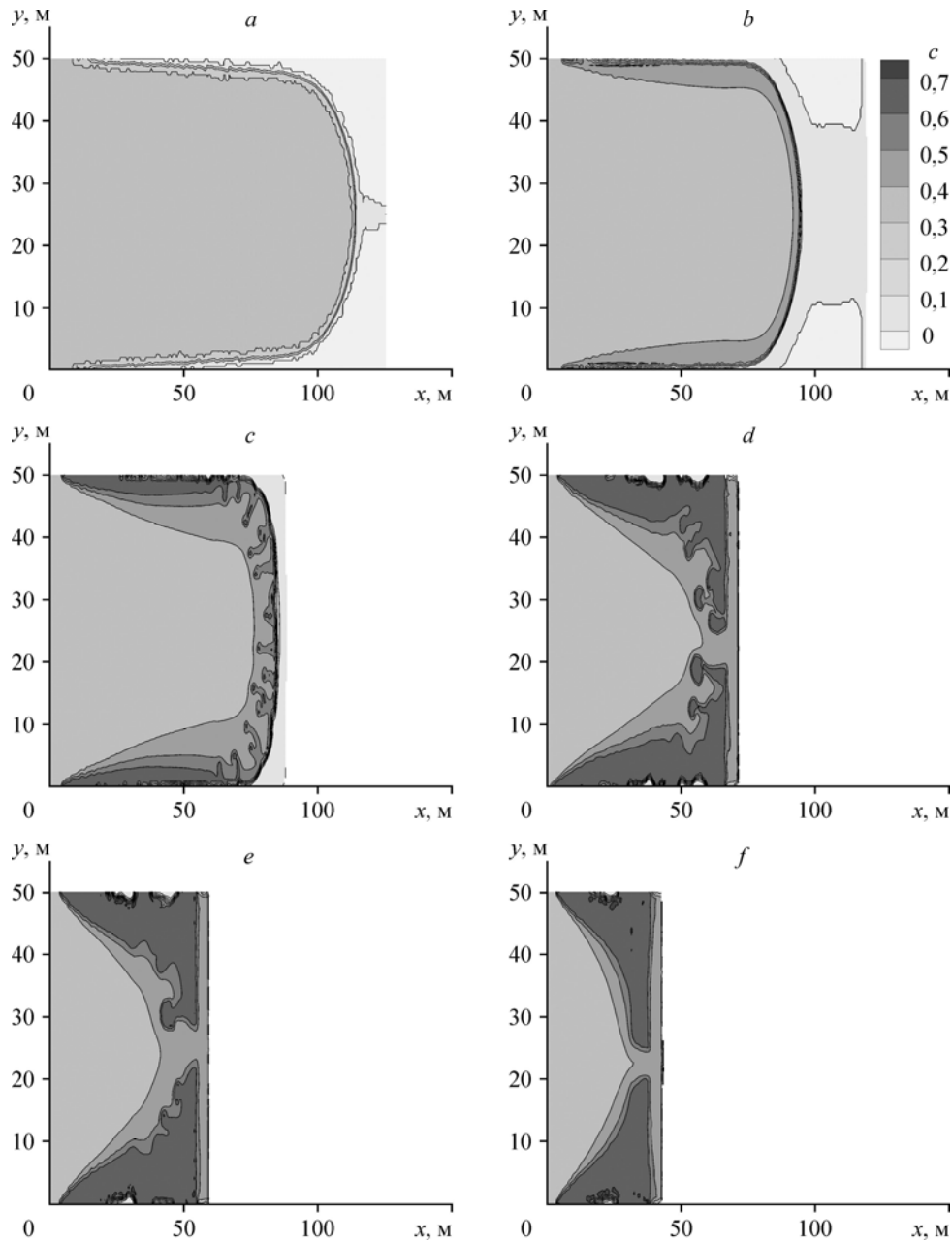


Рис. 6. Распределения концентрации проппанта для различных значений Картеревского коэффициента утечки C_L . $C_L = 0$ (a), $1,5 \cdot 10^{-5}$ (b), $3 \cdot 10^{-5}$ (c), $4,5 \cdot 10^{-5}$ (d), $6 \cdot 10^{-5}$ (e), $7,5 \cdot 10^{-5}$ (f) $\text{м/с}^{1/2}$.

вдоль его фронта. Объяснения высоким значениям концентрации возле кончика трещины были приведены выше. Формирование закупоривания в нижней и верхней частях трещины вызвано количеством жидкости, которое расположено ниже в этих областях. Рост концентрации проппанта ведет к торможению распространения трещины и возрастанию давления в скважине.

4.3. Влияние фильтрации жидкости

На рис. 7 показаны распределения концентрации проппанта c для различных размеров его частиц при $c_{in} = 0,5$. Большие частицы дают более интенсивную фильтрацию через упаковку проппанта на кончике трещины. Фильтрующаяся жидкость стремится разжижать упаковку проппанта, что приводит к увеличению длины трещины. Как видно из рис. 8 и 9, трещина распространяется дальше и упаковка проппанта в случае проппанта с большим размером частиц формируется позже. Изначально упаковка проппанта формируется при $t = 4000$ с во всех случаях. Затем она либо остается и приводит к закрытию трещины ($d_p = 0,5, 1$ м), либо разжижается под действием фильтрующейся жидкости ($d_p = 2, 4$ мм).

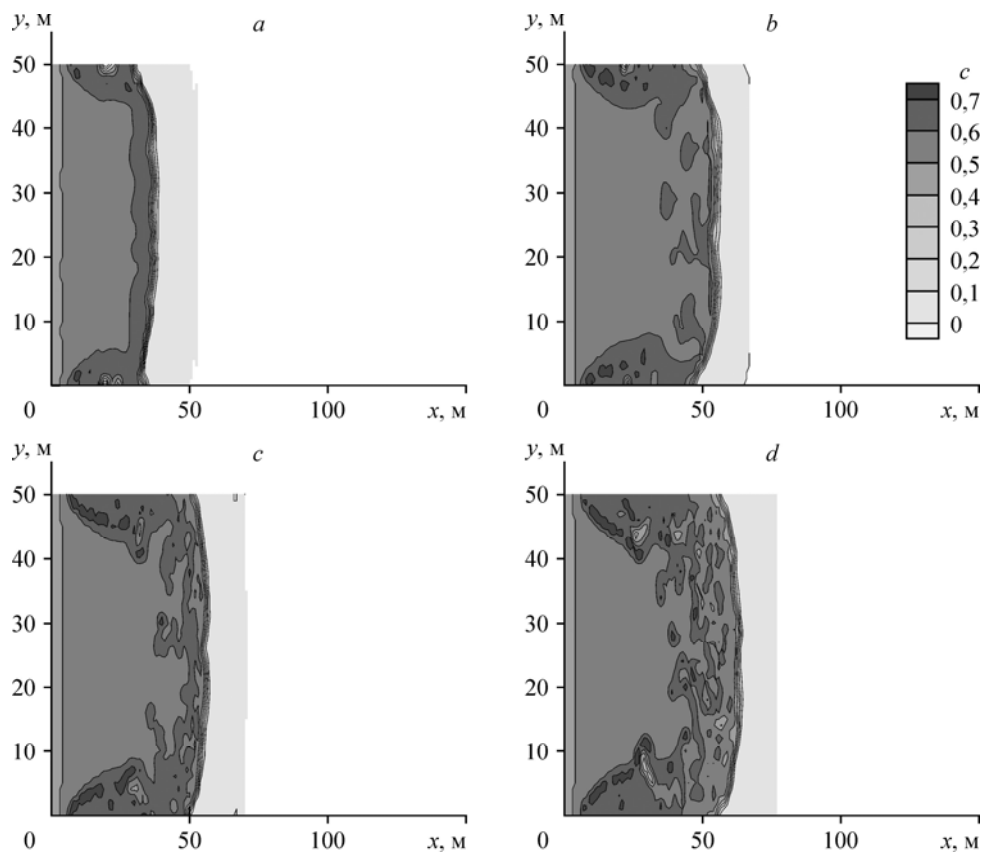


Рис. 7. Распределения концентрации проппанта для различных значений диаметра частиц проппанта при $c_{in} = 0,5$. $d_p = 0,5$ (a), 1 (b), 2 (c), 4 (d) мм.

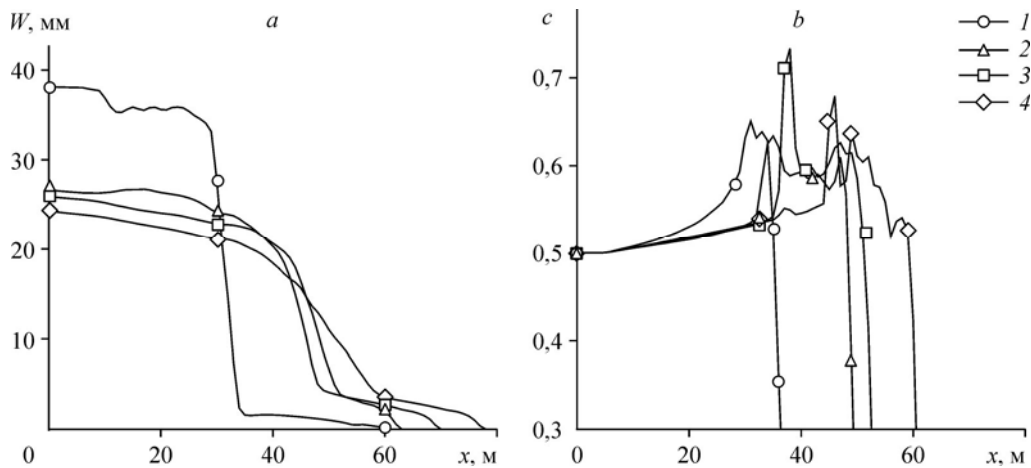


Рис. 8. Распределения ширины трещины и концентрации проппанта в срединном сечении трещины для различных значений диаметра частиц проппанта при $c_{in} = 0,5$.
 $d_p = 0,5$ (1), 1 (2), 2 (3), 4 (4) мм.

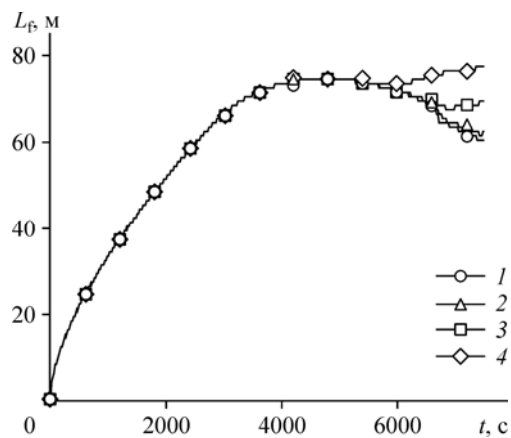
4.4. Влияние оседания проппанта и конвекции

В данном разделе расчеты проведены с учетом гравитационных сил ($g_y = -10 \text{ м/с}^2$). Гравитация в этой модели имеет два эффекта: конвекция проппанта и его оседание [9]. Конвекция проппанта связана с перераспределением больших его фрагментов из-за разности плотности смеси. С другой стороны, оседание проппанта вызвано медленным движением его частиц, взвешенных в жидкости. Как показано на рис. 10, первый эффект вызывает изменение формы фронта проппанта, второй — увеличивает концентрацию проппанта в нижней части трещины. Интенсивность оседания получается выше для частиц большего размера. Использование больших частиц приводит к формированию плотной упаковки проппанта в нижней части трещины ($d_p = 4 \text{ мм}$).

Заключение

Разработана и численно реализована модель гидроразрыва пласта, которая описывает все его основные процессы. Она включает двумерное течение смеси жидкости и проппанта в трещине, распространение и раскрытие которой подчинено концепции известной PKN-модели. Упрощенное рассмотрение в ней деформированного состояния породы обуславливает невысокую вычислительную сложность реализации модели. Течение жидкости, содержащей взвешенные частицы проппанта,

Рис. 9. История изменения длины трещины L_f для различных значений диаметра частиц проппанта при $c_{in} = 0,5$.
 $d_p = 0,5$ (1), 1 (2), 2 (3), 4 (4) мм.



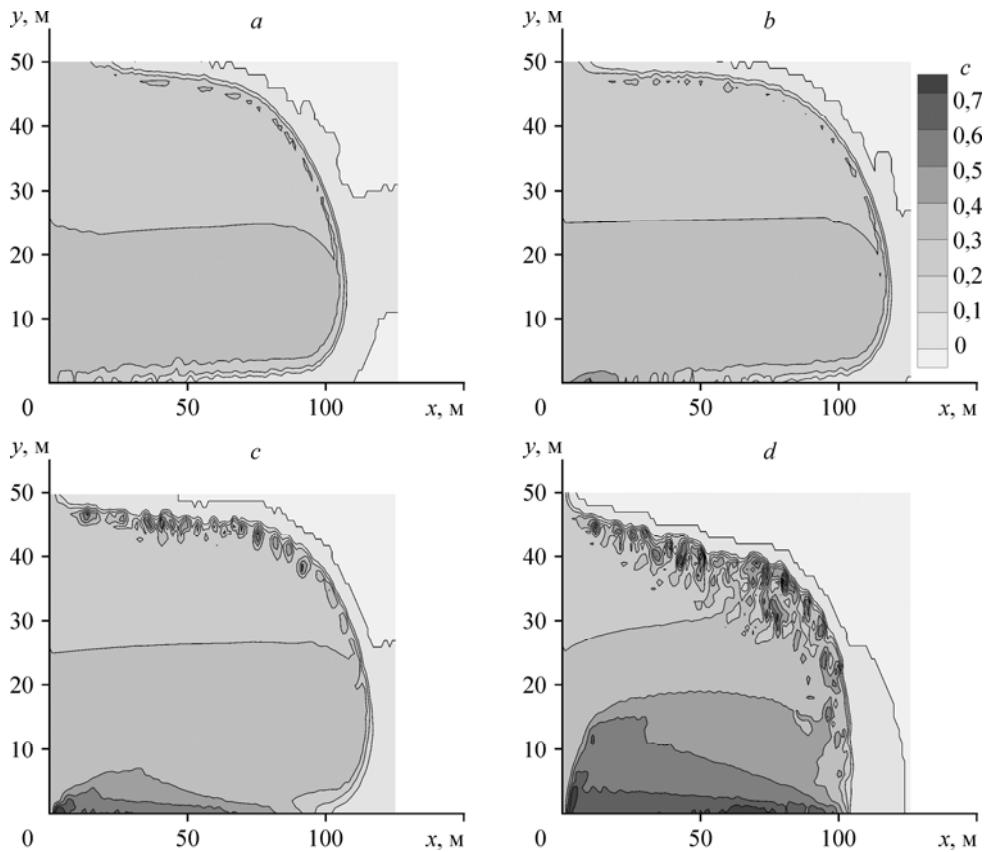


Рис. 10. Распределения концентрации проппанта для различных значений диаметра частиц проппанта при $g_y = -10 \text{ м/с}^2$.
 $d_p = 0,5$ (1), 1 (2), 2 (3), 4 (4) мм.

описывается двухфазной моделью жидкости в двухскоростном приближении с учетом гравитационного оседания проппанта. Течение смеси переключается на фильтрацию через образовавшуюся за счет утечки жидкости в породу плотную упаковку проппанта. Переключение на фильтрацию происходит при достижении критической концентрации проппанта. Предложен алгоритм переключения режимов течения жидкости, исключающий возникновение сингулярности у выражения для вязкости смеси.

Метод частиц в ячейках, примененный для решения уравнений переноса, обеспечивает наличие резких границ между областями с различной концентрацией проппанта и сохраняет равномерное распределение концентраций. Для используемых уравнений предложен метод их совместного решения. Он не расширяет шаблон метода и сходится в рассмотренных задачах. Этот подход применим для других задач, связанных с одновременным решением уравнений упругости и течения жидкости. Двумерная модель гидроразрыва верифицирована путем сравнения с результатами расчетов других авторов. Однако валидация модели затруднена рамками положений модели РКН. В будущем предполагается провести сравнение с экспериментальными данными работы [1] по течениям в каналах фиксированной геометрии, но для этого необходимо провести адаптацию нашей модели к другой геометрической концепции.

Проведенные численные эксперименты показали, что фильтрация может иметь большое влияние на процесс распространения трещины. Фильтрация позволяет жидкости гидроразрыва разжижать упаковку проппанта, увеличивая длину трещины и уменьшая давление смеси.

Список литературы

1. **Боронин С.А., Осипцов А.А.** Двухконтинуальная модель течения суспензии в трещине гидроразрыва // Докл. РАН. 2010. Т. 431, № 6. С. 758–761.
2. **Боронин С.А., Осипцов А.А.** Влияние миграции частиц на течение суспензии в трещине гидроразрыва // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 2. С. 80–94.
3. **Dontsov E.V., Peirce A.P.** Slurry flow, gravitational settling and a proppant transport model for hydraulic fractures // J. of Fluid Mechanics. 2014. Vol. 760. P. 567–590.
4. **Lecampion B., Garagash D.I.** Confined flow of suspensions modelled by a frictional rheology // J. of Fluid Mechanics. 2014. Vol. 759. P. 197–235.
5. **Osipov A.A.** Fluid mechanics of hydraulic fracturing: a review // J. of Petroleum Science and Engng. 2017. Vol. 156. P. 513–535.
6. **Perkins T.K., Kern L.R.** Widths of hydraulic fractures // J. Petroleum Technology. 1961. Vol. 13, No. 9. P. 937–949.
7. **Nordgren R.P.** Propagation of a vertical hydraulic fracture // SPE J. 1972. Vol. 12, No. 4. P. 306–314.
8. **Hammond P.S.** Settling and slumping in a newtonian slurry, and implications for proppant placement during hydraulic fracturing of gas wells // Chemical Engng Sci. 1995. Vol. 50, No. 20. P. 3247–3260.
9. **Mobbs A.T., Hammond P.S.** Computer simulations of proppant transport in a hydraulic fracture // SPE Production & Facilities. 2001. Vol. 16, No. 2. P. 112–121.
10. **Barree R.D., Conway M.W.** Proppant holdup, bridging, and screenout behavior in naturally fractured reservoirs // SPE Production and Operations Symposium. Society of Petroleum Engineers, 2001. No. SPE-67298-MS. P. 1–7.
11. **Adachi J., Siebrits E., Peirce A., Desroches J.** Computer simulation of hydraulic fractures // Int. J. of Rock Mechanics and Mining Sci. 2007. Vol. 44, No. 5. P. 739–757.
12. **Lakhtychkin A., Eskin D., Vinogradov O.** Modelling of transport of two proppantladen immiscible power-law fluids through an expanding fracture // Canadian J. of Chemical Engng. 2012. Vol. 90, No. 3. P. 528–543.
13. **Gadde P.B., Sharma M.M.** The impact of proppant retardation on propped fracture lengths // 2005 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, USA, Dallas, Texas, 2005. P. 9–12.
14. **Shiozawa S., McClure M.** Simulation of proppant transport with gravitational settling and fracture closure in a three-dimensional hydraulic fracturing simulator // J. of Petroleum Sci. and Engng. 2016. Vol. 138. P. 298–314.
15. **Dontsov E.V., Peirce A.P.** Proppant transport in hydraulic fracturing: Crack tip screen-out in KGD and P3D models // Int. J. Solids and Structures. 2015. Vol. 63. P. 206–218.
16. **Boyer F., Guazzelli E., Pouliquen O.** Unifying suspension and granular rheology // Physical Review Letters. 2011. Vol. 107, No. 18. P. 188301-1–188301-5.
17. **Coulter G.R., Wells R.D.** The advantages of high proppant concentration in fracture stimulation // J. of Petroleum Technology. 1972. Vol. 24, No. 06. P. 643–650.
18. **Shokin Yu., Cherny S., Esipov D., Lapin V., Lyutov A., Kuranakov D.** Three-dimensional model of fracture propagation from the cavity caused by quasistatic load or viscous fluid pumping // Communications in Computer and Information Sci. 2015. Vol. 549. P. 143–157.
19. **Cherny S., Lapin V., Esipov D., Kuranakov D., Avdyushenko A., Lyutov A., Karnakov P.** Simulating fully 3D non-planar evolution of hydraulic fractures // Int. J. Fracture. 2016. Vol. 201, No. 2. P. 181–211.
20. **Черный С.Г., Лапин В.Н., Есипов Д.В., Куранакон Д.С.** Методы моделирования зарождения и распространения трещин. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2017. 312 с.
21. **Detournay E.** Mechanics of hydraulic fractures // Annual Review of Fluid Mechanics. 2016. Vol. 48, No. 1. P. 311–339.
22. **Carter R.D.** Derivation of the general equation for estimating the extent of the fractured area. Appendix I of drilling and production practice / Ed. by G.C. Howard, C.R. Fast. N.Y.: American Petroleum Institute, 1957. P. 261–270.
23. **Sneddon I.N.** The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sci. 1946. Vol. 187, No. 1009. P. 229–260.
24. **Meyer B.R., Bazan L.W., Walls D.** Modeling of proppant permeability and inertial factor for fluid flow through packed columns // ISRM Int. Conf. for Effective and Sustainable Hydraulic Fracturing. Intern. Society for Rock Mechanics, 2013. P. 549–569.
25. **Maron S.H., Pierce P.E.** Application of ree-eyring generalized flow theory to suspensions of spherical particles // J. of Colloid Sci. 1956. Vol. 11, No. 1. P. 80–95.

26. **Mueller S., Llewellyn E.W., Mader H.M.** The rheology of suspensions of solid particles // The Royal Society. 2009. Vol. 466. P. 1201–1228.
27. **Карнаков П.В., Лапин В.Н., Черный С.Г.** Модель гидроразрыва пласта, включающая механизм закупоривания трещины пропантом // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2014. Т. 12, № 1. С. 19–33.
28. **Van Doormaal J.P., Raithby G.D.** Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows // Numerical Heat Transfer. 1984. Vol. 7, No. 2. P. 147–163.
29. **Harlow F.H., Evans M.W.** A machine calculation method for hydrodynamic problems // Los Alamos Scientific Laboratory report LAMS-1956. 1955.
30. **Economides M.J., Nolte K.G.** Reservoir stimulation. Third edition. John Wiley & Sons, 2000. 856 p.

*Статья поступила в редакцию 7 сентября 2017 г.,
после переработки — 27 марта 2018 г.*