

УДК 517.958:537.84

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

В. Т. Астрелин, В. М. Ковеня*, Т. В. Козлинская**

Институт ядерной физики им. Г. М. Будкера СО РАН, 630090 Новосибирск

* Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск

** Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

E-mails: kovenya@ict.nsc.ru, ktv-sun@mail.ru

Рассмотрена модель динамики и нагрева сгустка плазмы в магнитном поле в двухтемпературном приближении. На основе неявной разностной схемы типа предиктор-корректор проведено численное моделирование разлета плазменного облака во внешнем магнитном поле и выполнена оценка влияния этого поля на динамику разлета.

Ключевые слова: физика плазмы, разностная схема, метод расщепления, математическое моделирование.

Введение. В экспериментах по нагреву и удержанию плазмы в многопробочной магнитной системе на установке ГОЛ-3 быстрого нагрева плазмы можно достигнуть, используя релятивистский пучок электронов. Эксперименты показали, что нагрев электронной компоненты плазмы происходит в условиях развитой ленгмюровской турбулентности, подавляющей электронную теплопроводность. При этом наблюдается быстрый нагрев ионов плазмы до температуры, сравнимой с электронной. Этот нагрев можно объяснить не электрон-ионными столкновениями [1, 2], а коллективным характером ускорения ионов под действием градиента электронного давления плазмы. Для исследования описанного выше механизма быстрой передачи энергии от электронов к ионам в работах [3, 4] с использованием различных численных методов проведено моделирование динамики двухкомпонентной плазмы в гидродинамическом одномерном приближении. Результаты расчетов и экспериментов показывают, что движение плазмы в этих условиях сопровождается возникновением нелинейных волн большой амплитуды. Это потребовало разработки специального численного метода [4, 5], устойчивого в широком диапазоне параметров плазмы и обладающего достаточной точностью для решения подобного класса задач.

В настоящей работе предложена уточненная двумерная модель для описания движения одножидкостной двухтемпературной плазмы с учетом эффектов тепло- и электропроводности, термосилы и сил трения при столкновениях ионов с электронами. Для численного решения задач магнитной гидродинамики в одномерном и многомерном приближениях в [5, 6] предложена неявная разностная схема типа предиктор-корректор. Ниже дано ее обобщение на случай двухтемпературной плазмы. Решена задача о разлете горячего плазменного сгустка начальной сферической формы под воздействием гидродинамических сил и магнитного поля. На этом этапе исследования пренебрегалось влиянием диссипативных эффектов, но допускалось, что значения ионной и электронной температур в начальный

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00146).

момент времени могут различаться. Исследовано влияние внешнего магнитного поля и начального распределения температур на характеристики движения плазмы в широком диапазоне их значений.

Физико-математическая модель. Рассматривается задача о распространении плотного плазменного облака во внешнем магнитном поле. В начальный момент облако плазмы предполагается сферическим с параметрами (давление, плотность или температура), значения которых на несколько порядков превышают фоновые значения. Под воздействием гидродинамического и магнитного давлений это облако начинает расширяться по фоновой плазме. Течение полагается осесимметричным и моделируется как распространение плазменного облака в некотором объеме при наличии внешнего магнитного поля. В магнитогидродинамическом приближении система уравнений переноса плазмы содержит уравнения неразрывности, движения, магнитного поля, теплового баланса для электронов и ионов и в векторной форме имеет вид [6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{v}) &= 0, & m_i n \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla p + \frac{1}{c}(\mathbf{j} \times \mathbf{B}), \\ \frac{1}{\gamma-1} n \frac{dT_i}{dt} + p_i \operatorname{div} \mathbf{v} &= -\operatorname{div} \mathbf{q}_i + \frac{3m_e}{m_i \tau_e} (p_e - p_i), \\ \frac{1}{\gamma-1} n \frac{dT_e}{dt} + p_e \operatorname{div} \mathbf{v} &= -\operatorname{div} \mathbf{q}_e + \frac{j_{\parallel}^2}{\sigma_{\parallel}} + \frac{j_{\perp}^2}{\sigma_{\perp}} + \frac{1}{en} \mathbf{j} \cdot \mathbf{R}_T - \frac{3m_e}{m_i \tau_e} (p_e - p_i), \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{j}}{en} \times \mathbf{B}\right) - \frac{c}{en}(\nabla n \times \nabla T) - \frac{c}{e} \operatorname{rot} \frac{\mathbf{R}_T}{n} - c \operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{j}_{\parallel}}{\sigma_{\parallel}} + \frac{\mathbf{j}_{\perp}}{\sigma_{\perp}}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$; t — время; n , \mathbf{v} — плотность и скорость плазмы; T_e , T_i — температуры электронов и ионов; \mathbf{B} — вектор магнитного поля; c — скорость звука; e — заряд электрона; m_e , m_i — массы электрона и иона; \mathbf{q}_i , \mathbf{q}_e — ионный и электронный потоки тепла, задаваемые соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i &= -\kappa_{\parallel}^i \nabla_{\parallel} T_i - \kappa_{\perp}^i \nabla_{\perp} T_i + \frac{5}{2} \frac{cp_i}{eB} (\mathbf{h} \times \nabla T_i), \\ \mathbf{q}_e &= -\kappa_{\parallel}^e \nabla_{\parallel} T_e - \kappa_{\perp}^e \nabla_{\perp} T_e - \frac{5}{2} \frac{cp_e}{eB} (\mathbf{h} \times \nabla T_e) + 0,71 p_e u_{\parallel} - \frac{3}{2} \frac{p_e}{\omega_e \tau_e} (\mathbf{h} \times \mathbf{u}); \end{aligned}$$

$\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$ — единичный вектор вдоль магнитного поля; $\kappa_{\parallel}^i = 3,9 p_i \tau_i / m_i$, $\kappa_{\parallel}^e = 3,16 p_e \tau_e / m_e$, $\kappa_{\perp}^i = 2 p_i T_e / (m_i \omega_i^2 \tau_i)$, $\kappa_{\perp}^e = 4,66 p_e / (m_e \omega_e^2 \tau_e)$ — продольные и поперечные коэффициенты теплопроводности для ионов и электронов; $\mathbf{j} = (c/(4\pi)) \operatorname{rot} \mathbf{B}$ — плотность тока; $\omega_{i,e} = eB/(m_{i,e}c)$ — циклотронные частоты электронов и ионов; $\mathbf{a}_{\parallel} = \mathbf{h}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{h})$, $\mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{h} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{h})$ — параллельная и перпендикулярная магнитному полю компоненты вектора \mathbf{a} ;

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{en} \mathbf{j}; \tau_e = \frac{3,5 \cdot 10^4}{\lambda/10} \frac{T_e^{3/2}}{n}, \tau_i = \frac{3 \cdot 10^6}{\lambda/10} \sqrt{\frac{m_i}{2m_p}} \frac{T_i^{3/2}}{n} \text{ — “время между столкновениями”}$$

электронов и ионов; $\sigma_{\perp} = 9 \cdot 10^{12}/(\lambda/10)$; $\sigma_{\parallel} = 1,96 \sigma_1 T_e^{3/2}$, $\sigma_{\perp} = \sigma_1 T_e^{3/2}$ — коэффициенты электропроводности; λ — кулоновский логарифм: $\lambda = 23,4 - 1,15 \lg n + 3,45 \lg T_e$ при $T_e \leq 50$ эВ, $\lambda = 25,3 - 1,15 \lg n + 2,3 \lg T_e$ при $T_e > 50$ эВ; $\mathbf{R}_T = -0,71 n \nabla_{\parallel} T_e - \frac{3}{2} \frac{n}{\omega_e \tau_e} (\mathbf{h} \times \nabla T_e)$ — термосила.

Система уравнений (1) замыкается уравнением состояния в виде

$$p_e = nT_e, \quad p_i = nT_i, \quad p = p_e + p_i \quad (2)$$

и соотношением

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Будем полагать, что течение симметрично относительно угловой координаты, т. е. $\partial/\partial\varphi = 0$. Решение уравнений не зависит от угловой координаты, однако содержит все компоненты скорости и магнитного поля по направлениям цилиндрической системы координат z , r и φ .

Для удобства численного моделирования и анализа результатов уравнения (1) запишем в безразмерном виде, задавая в качестве безразмерных параметров длину L , скорость U_0 , магнитное поле B_0 , плотность плазмы n_0 , температуру T_0 . В качестве искомым функций выберем плотность плазмы, компоненты скорости, ионное и электронное давления, компоненты магнитного поля. Тогда в цилиндрической системе координат систему уравнений (1)–(3) можно представить в безразмерном виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (n v_z) = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial t} (n v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n v_r^2) + \frac{\partial}{\partial z} (n v_r v_z) - \frac{n v_\varphi^2}{r} + k_0 \frac{\partial p}{\partial r} - M(j_\varphi B_z - j_z B_\varphi) = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial t} (n v_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n v_r v_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (n v_r v_\varphi) + \frac{n v_\varphi v_r}{r} - M(j_z B_r - j_r B_z) = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial t} (n v_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n v_r v_z) + \frac{\partial}{\partial z} (n v_r v_z) + k_0 \frac{\partial p}{\partial z} - M(j_r B_\varphi - j_\varphi B_r) = 0, \\ & \frac{\partial p_e}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r p_e) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z p_e) + l p_e \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_r + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + k(p_e - p_i) = \\ & = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\chi_{rr}^e \frac{\partial T_e}{\partial r} + \chi_{rz}^e \frac{\partial T_e}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\chi_{zr}^e \frac{\partial T_e}{\partial r} + \chi_{zz}^e \frac{\partial T_e}{\partial z} \right) + \\ & + l M \left[\sigma_1 (j^2 - j_0^2 k_0) + \varphi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r a_1 T_e + \frac{\partial}{\partial z} a_2 T_e + b_1 \frac{\partial T_e}{\partial r} + b_2 \frac{\partial T_e}{\partial z} \right) \right], \quad (4) \\ & \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r p_i) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z p_i) + l p_i \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_r + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - k(p_e - p_i) = \\ & = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\chi_{rr}^i \frac{\partial T_i}{\partial r} + \chi_{rz}^i \frac{\partial T_i}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\chi_{zr}^i \frac{\partial T_i}{\partial r} + \chi_{zz}^i \frac{\partial T_i}{\partial z} \right), \\ & \frac{\partial B_r}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (v_r B_z - v_z B_r) - \varphi \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(d_1 \frac{\partial T_e}{\partial r} + d_2 \frac{\partial T_e}{\partial z} \right) + M \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n} (j_z B_r - j_r B_z) \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial z} (\mu_{r\varphi} j_r + \mu_{\varphi\varphi} j_\varphi + \mu_{\varphi z} j_z), \\ & \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (v_\varphi B_z - v_z B_\varphi) - \frac{\partial}{\partial r} (v_r B_\varphi - v_\varphi B_r) + \\ & + \varphi \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(d_3 \frac{\partial T_e}{\partial r} + d_4 \frac{\partial T_e}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(d_5 \frac{\partial T_e}{\partial r} + d_6 \frac{\partial T_e}{\partial z} \right) - \frac{1}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \right. \\ & \left. + M \left[- \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n} (j_\varphi B_z - j_z B_\varphi) + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{n} (j_r B_\varphi - j_\varphi B_r) \right] \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (\mu_{rr} j_r + \mu_{r\varphi} j_\varphi + \mu_{rz} j_z) - \frac{\partial}{\partial r} (\mu_{rz} j_r + \mu_{\varphi z} j_\varphi + \mu_{zz} j_z), \\ & \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (v_z B_r - v_r B_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (\mu_{r\varphi} j_r + \mu_{\varphi\varphi} j_\varphi + \mu_{\varphi z} j_z) + \\ & + \frac{\varphi}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} r \left(d_1 \frac{\partial T_e}{\partial r} + d_2 \frac{\partial T_e}{\partial z} \right) - M \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{n} (j_r B_z - j_z B_r) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
M = M_A^2 &= \frac{B_0^2}{4\pi m_i n_0 U_0^2}; & k_0 &= \frac{T_0}{U_0^2 m_i}; & k &= \frac{3lm_e L}{m_i \tau_e U_0}; & \sigma &= T_e^{3/2}; & \sigma_0 &= \frac{9 \cdot 10^{12}}{\lambda/10}; \\
\sigma_1 &= \frac{1}{\text{Re}_m} = \frac{c^2 \sigma}{4\pi L U_0 \sigma_0}; & j_r &= -\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}; & j_\varphi &= \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}; & j_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi); \\
k_1 &= 1 - \frac{\sigma_\perp}{\sigma_\parallel} = \frac{0,96}{1,96}; & k_2 &= \frac{1}{l\omega_e \tau_e}; & \varphi &= \frac{c_0 T_0}{e B_0 L U_0}; \\
\bar{\chi}_\perp^e &= \frac{4,66nT_e}{m_e \tau_e \omega_e^2}; & \bar{\chi}_\parallel^e &= \frac{3,16nT_e \tau_e}{m_e}; & \bar{\chi}_\perp^i &= \frac{2nT_i}{Z m_i \tau_i \omega_i^2}; & \bar{\chi}_\parallel^i &= \frac{3,9nT_i \tau_i}{Z m_i}; \\
k_1^i &= \frac{l \bar{\chi}_\perp^i}{n_0 L U_0}; & k_1^e &= \frac{l \bar{\chi}_\perp^e}{n_0 L U_0}; \\
d_1 &= sh_\varphi h_r + \psi h_z; & d_2 &= sh_\varphi h_z - \psi h_r; & d_3 &= sh_r^2; \\
d_4 &= sh_r h_z + \psi h_\varphi; & d_5 &= sh_z h_r - \psi h_\varphi; & d_6 &= sh_z^2; & s &= 0,71; \\
\psi_0 &= \psi(j_z h_\varphi - j_\varphi h_z); & \psi_1 &= \psi(j_\varphi h_r - j_r h_\varphi); \\
j_0 &= j_r h_r + j_\varphi h_\varphi + j_z h_z; & j_1 &= s j_0; \\
\chi_{rr}^{i,e} &= h_r^2 \chi^{i,e} + \chi_1^{i,e}; & \chi_{zz}^{i,e} &= h_z^2 \chi^{i,e} + \chi_1^{i,e}; \\
\chi_{rz}^{i,e} &= h_r h_z \chi_1^{i,e} \mp \chi_0^{i,e} h_\varphi; & \chi_{zr}^{i,e} &= h_r h_z \chi_1^{i,e} \pm \chi_0^{i,e} h_\varphi; \\
\chi_1^{i,e} &= k_1^{i,e} \chi_\perp^{i,e}; & \chi_2^{i,e} &= k_2^{i,e} \chi_\parallel^{i,e}; & \chi_0^{i,e} &= \gamma \varphi (\chi_2^{i,e} - \chi_1^{i,e}); & \chi_\parallel^{i,e} &= T_{i,e}^{5/2}; & \chi_\perp^{i,e} &= \frac{n}{B T_{i,e}^{1/2}}; \\
a_1 &= j h_r + \psi_0; & a_2 &= j_1 h_z + \psi_1; & b_1 &= -j_1 h_r + \psi_0; & b_2 &= -j_1 h_z + \psi_1; \\
\mu_{rr} &= \sigma_1 (k_1 h_r^2 - 1); & \mu_{\varphi\varphi} &= \sigma_1 (k_1 h_\varphi^2 - 1); & \mu_{zz} &= \sigma_1 (k_1 h_z^2 - 1); \\
\mu_{r\varphi} &= k_1 \sigma_1 h_\varphi h_r; & \mu_{rz} &= k_1 \sigma_1 h_r h_z; & \mu_{\varphi z} &= k_1 \sigma_1 h_\varphi h_z.
\end{aligned}$$

Краевые условия задаются следующим образом. В начальный момент времени во всей расчетной области, за исключением плазменного облака диаметром d , задавались фоновые значения плазмы

$$\begin{aligned}
n &= 1, & v_r &= 0, & v_\varphi &= 0, & v_z &= 0, \\
p_e &= p_{e,\text{нач}}, & p_i &= p_{i,\text{нач}}, & B_r &= 0, & B_\varphi &= 0, & B_z &= 1,
\end{aligned} \tag{5}$$

а в плазменном облаке при $\sqrt{r^2 + z^2} \leq d$ — фоновые значения

$$\begin{aligned}
n &= n_{\text{обл}}, & v_r &= 0, & v_\varphi &= 0, & v_z &= 0, \\
p_e &= p_{e,\text{обл}}, & p_i &= p_{i,\text{обл}}, & B_r &= 0, & B_\varphi &= 0, & B_z &= 1.
\end{aligned} \tag{6}$$

Как правило, расчеты проводились в течение времени, пока возмущения от облака не достигали границ (в противном случае на этих границах задавались мягкие краевые условия — условия вытекания). Решение задачи находилось для верхней полуплоскости, поэтому в силу симметрии задачи на оси $r = 0$ задавались условия

$$\frac{\partial n}{\partial z} = v_r = v_\varphi = \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial p_e}{\partial z} = \frac{\partial p_i}{\partial z} = \frac{\partial B_r}{\partial z} = B_\varphi = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

Решение уравнений (4) с краевыми условиями (5)–(7) находилось численно по разностной схеме предиктор-корректор [5] с расщеплением по пространственным направлениям и специальным расщеплением одномерных операторов по физическим процессам. Кратко остановимся на принципах построения этой схемы для системы уравнений (4) в отсутствие диссипативных членов. Представим систему уравнений (4) в дифференциальном виде в консервативной форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{W}, \quad \mathbf{W} = - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} \quad (8)$$

(\mathbf{U} , \mathbf{W}_j — векторы искомым функций и потоков в направлении x_j ; $x_1 = z$, $x_2 = r$), затем запишем ее в недивергентном виде, разрешенном относительно вектора искомым функций \mathbf{f} :

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 B_j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} = 0. \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{f} = (n, v_z, v_r, v_\varphi, p_e, p_i, B_z, B_r, B_\varphi)^T$; B_j — дифференциальные матричные операторы по каждому пространственному направлению. Введем расщепление одномерных матричных операторов на сумму матриц более простой структуры $B_j = B_j^1 + B_j^2$ таким образом, чтобы разностная схема для расщепленных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + B_j^i \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} = 0 \quad (i, j = 1, 2)$$

реализовывалась эффективными алгоритмами (например, скалярными прогонами для каждой компоненты вектора \mathbf{f}), а дополнительные члены вида $B_j^l \cdot B_j^s$ ($s \neq l$), возникающие вследствие расщепления, имели минимальное число ненулевых элементов [5]. Тогда систему уравнений (9) можно представить в виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 B_j^i \mathbf{f} = 0,$$

где в цилиндрической системе координат ($x_1 = z$, $x_2 = r$) матрицы B_j^i равны

$$B_1^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_r \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & \frac{k_0}{n} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{k_0}{n} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & \frac{M B_\varphi}{r n} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{M B_z}{n} \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & 0 & v_r \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_r \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma p_e}{r} \frac{\partial}{\partial r} r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma p_i}{r} \frac{\partial}{\partial r} r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_\varphi \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_z \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{v_\varphi}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_\varphi}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{MB_r}{nr} \frac{\partial}{\partial r} r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{MB_r}{n} \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_r \frac{\partial}{\partial r} + k & -k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_r \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial r} B_r & 0 & 0 & 0 & 0 & v_r \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} r & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{v_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \end{pmatrix},$$

$$B_2^1 = \begin{pmatrix} v_z \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_z \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_z \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_z \frac{\partial}{\partial z} & \frac{k_0}{n} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{k_0}{n} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{MB_r}{n} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{MB_\varphi}{n} \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma p_e \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma p_i \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_r \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_\varphi \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{MB_z}{n} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{MB_z}{n} \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_z \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k & v_z \frac{\partial}{\partial z} + k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial z} B_z & 0 & 0 & 0 & 0 & v_z \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} B_z & 0 & 0 & 0 & 0 & v_z \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аппроксимируем первые производные ∂/x_j разностными операторами Λ_j с порядком $O(h_j^k)$. Введем разностные операторы $B_{jh}^l \Lambda_j = B_j^l + O(h_j^k)$, аппроксимирующие соответствующие дифференциальные операторы с порядком k . Тогда при $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ разностная схема типа предиктор-корректор

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}^{n+1/8} - \mathbf{f}^n}{\tau\alpha} + B_{1h}^1 \Lambda_1 \mathbf{f}^{n+1/8} &= 0, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+1/4} - \mathbf{f}^{n+1/8}}{\tau\alpha} + B_{1h}^2 \Lambda_1 \mathbf{f}^{n+1/4} &= 0, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+3/8} - \mathbf{f}^{n+1/4}}{\tau\alpha} + B_{2h}^1 \Lambda_2 \mathbf{f}^{n+3/8} &= 0, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^{n+3/8}}{\tau\alpha} + B_{2h}^1 \Lambda_2 \mathbf{f}^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} + \sum_{j=1}^2 \Lambda_j \mathbf{W}_{jh}^{n+1/2} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

аппроксимирует исходные уравнения (8) в дивергентной форме с порядком $O(\tau^2 + h_1^k + h_2^k)$. Структура расщепленных матриц B_j^l выбрана таким образом, чтобы система разностных уравнений (10), как и в схеме [6], на каждом дробном шаге могла быть решена скалярными прогонами для каждой компоненты вектора $\mathbf{f}^{n+l/8}$ (путем исключения других компонент вектора из этого уравнения). Заметим, что в схеме (10) число скалярных прогонок по каждому пространственному направлению не превышает числа исходных уравнений. На этапе корректора схема реализуется явно. Из линейного анализа устойчивости следует, что при заданном выше выборе расщепления разностная схема (10) абсолютно устойчива. Расчеты подтвердили теоретические оценки устойчивости, что позволило при проведении численных экспериментов варьировать параметры схемы (шаги сетки по времени и пространству) и физические параметры задачи в широком диапазоне их значений.

Результаты численного моделирования. По разностной схеме (10) проведены расчеты задачи о распространении облака плазмы. В силу симметрии задачи рассчитывалась только 1/4 области. В первой серии расчетов в области $r_0 = \sqrt{r^2 + z^2} \leq 0,1$ в начальный момент задан скачок давления $p_{e,обл} = p_{i,обл} = 10^3 p_{нач}$, превышающий фоновое на три порядка. Изучалось распространение облака плазмы с течением времени при различных значениях магнитного поля (различных значениях M_A), начальных ионной и электронной температур. Численное решение находилось по схеме (10) при весовом параметре $\alpha = 0,505$ на расчетных сетках, содержащих 100, 200 узлов по каждому пространственному направлению. На рис. 1 показан разлет плазмы в момент времени $t = 0,3$ при различных значениях $n_{обл}$. Под действием начального градиента давления облако начинает расширяться, при этом формируются две волны плотности. Внутри облака образуется область с пониженной плотностью (порядка плотности фоновой плазмы) и давлением на несколько порядков ниже давления фоновой плазмы. Чем меньше $n_{обл}$, тем быстрее происходит разлет плазмы и уменьшается ее плотность в центре области.

В последующих расчетах было изучено влияние магнитного поля на распространение облака плазмы при различных значениях M_A . Магнитное поле направлено вдоль оси z , как следствие градиент магнитного давления направлен по радиусу, что должно приводить к сжатию облака плазмы в радиальном направлении. На рис. 2 показан разлет плазмы в момент времени $t = 0,2$ при $n_{обл} = 1000$ и различных значениях M_A . Видно, что с возрастанием магнитного поля (увеличением M_A) разлет плазмы в радиальном направлении

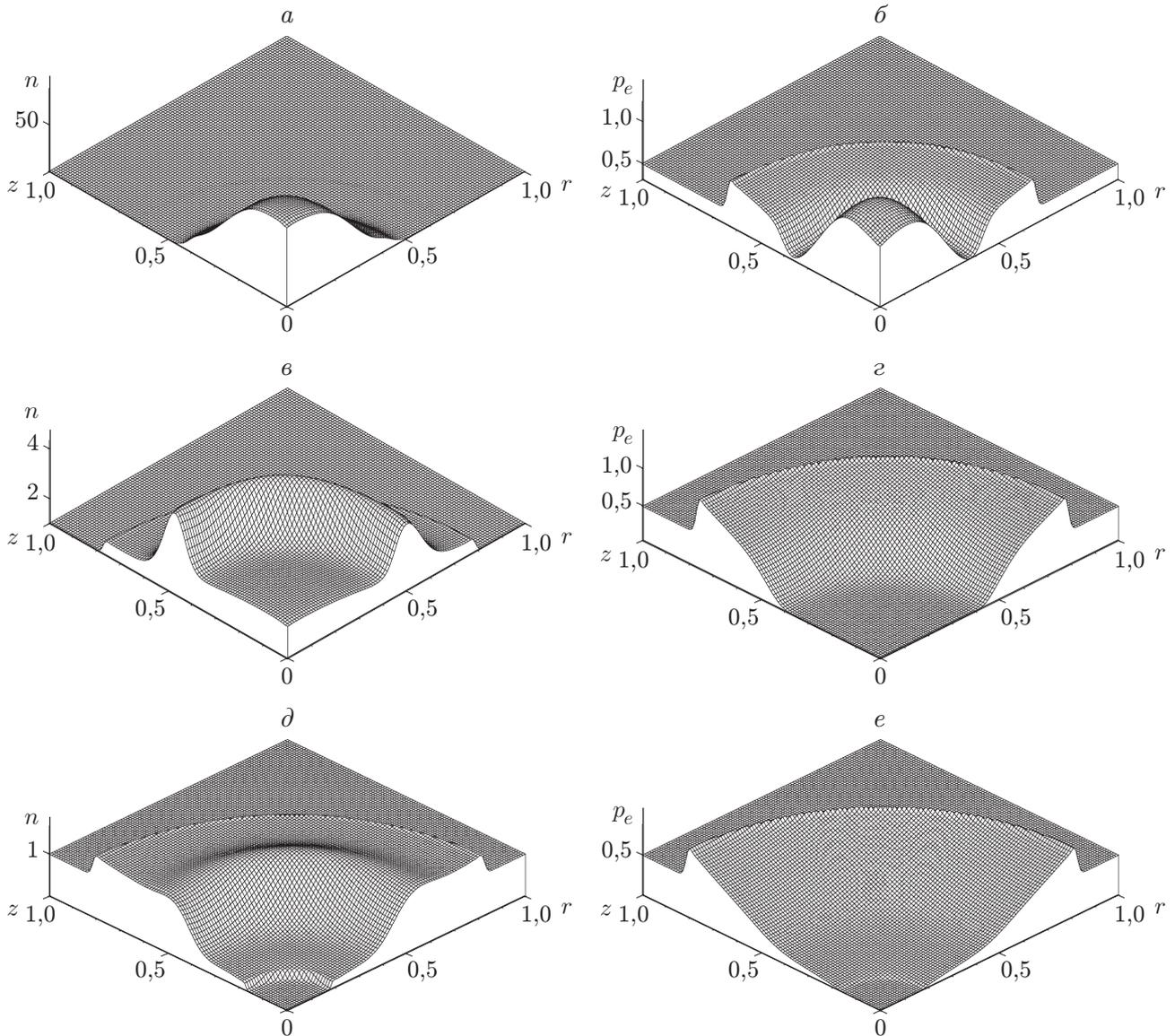


Рис. 1. Распределения плотности (*a*, *в*, *д*) и электронного давления (*б*, *г*, *e*) при различных значениях $n_{\text{обл}}$ ($t = 0,3$; $M_A = 0$):

a, *б* — $n_{\text{обл}} = 1000$; *в*, *г* — $n_{\text{обл}} = 100$; *д*, *e* — $n_{\text{обл}} = 10$

становится меньше, чем в продольном направлении, при $M_A^2 = 30$ он практически прекращается, облако разделяется на две части, которые разлетаются вдоль оси z . При этом амплитуды плотности и давления значительно возрастают, а скорость разлета в направлении оси z не зависит от магнитного поля. На рис. 3 показан разлет плазмы в момент времени $t = 0,15$ при $M_A^2 = 5$ и различных значениях $n_{\text{обл}}$. Видно, что чем больше значение $n_{\text{обл}}$, тем медленнее происходит разлет плазмы и уменьшается ее плотность в центре области.

В следующей серии расчетов исследовалось влияние неоднородных начальных распределений электронной и ионной температур на распространение плазменного облака в фоновую плазму. Поскольку уравнения движения и магнитного поля зависят только от полного давления или суммы электронной и ионной температур (см. (2)), а не от их отдель-

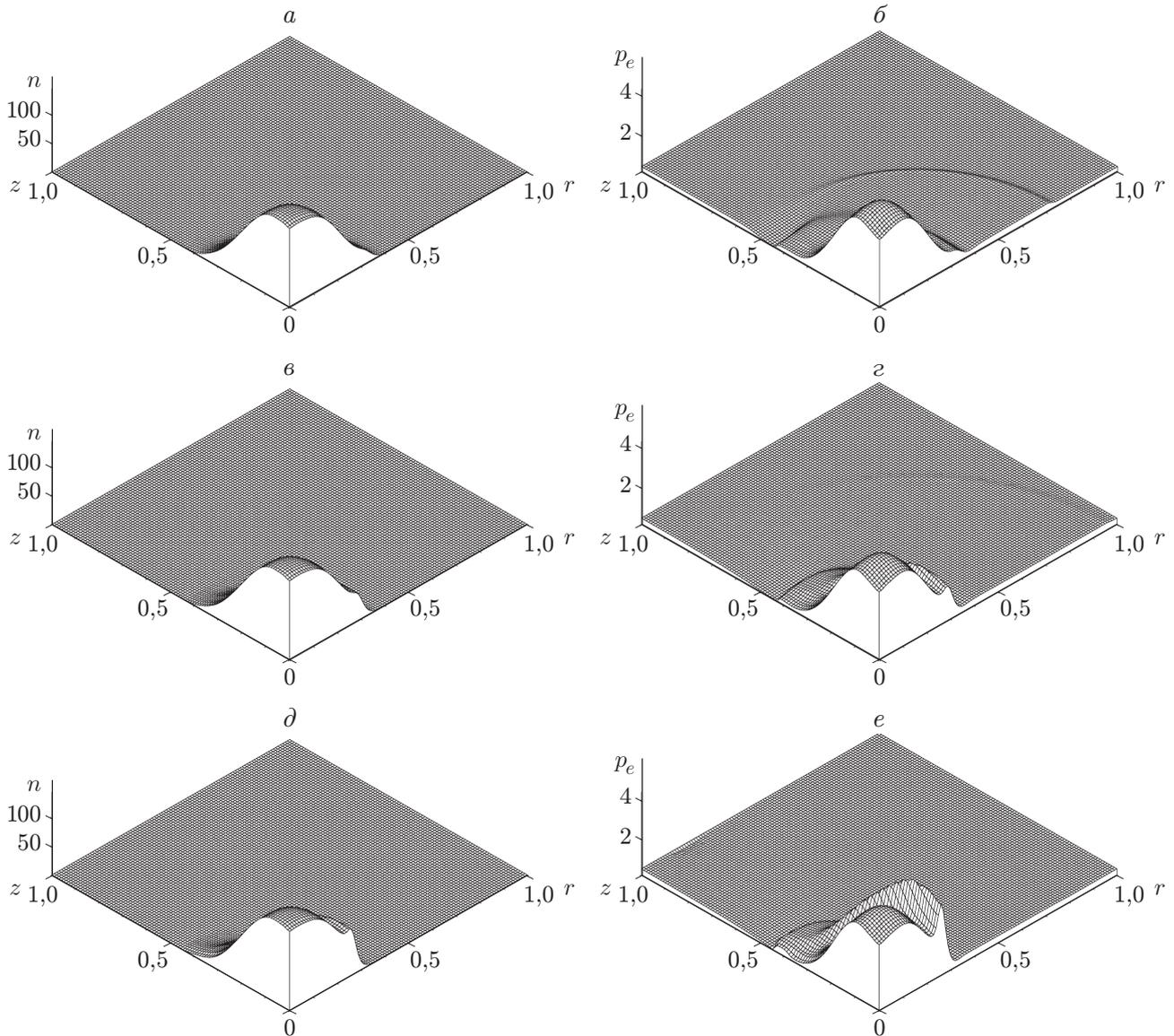


Рис. 2. Распределения плотности (a , $в$, $д$) и электронного давления ($б$, $г$, $е$) при различных значениях M_A ($t = 0,2$; $n_{\text{обл}} = 1000$):
 a , $б$ — $M_A^2 = 5$; $в$, $г$ — $M_A^2 = 15$; $д$, $е$ — $M_A^2 = 30$

ных значений, основные закономерности движения облака плазмы также зависят лишь от суммарных значений этих температур. Распределение магнитного поля представлено на рис. 4.

Из рис. 4 следует, что в центре облака возникает магнитная яма. Время выравнивания ионной и электронной температур в облаке плазмы при их различных начальных распределениях существенно зависит от параметра $k = k_{00}n/\sigma$, т. е. от “времени между столкновениями” электронов. При $k_{00} = 8,2$ это время составляет 0,2, и при $t \geq 0,2$ плазма может рассматриваться как одножидкостная и однотемпературная. На рис. 5 показано распределение электронной и ионной температур на радиальной оси ($z = 0$) в зависимости от параметра k_{00} . Видно, что чем больше k_{00} , тем быстрее происходит выравнивание

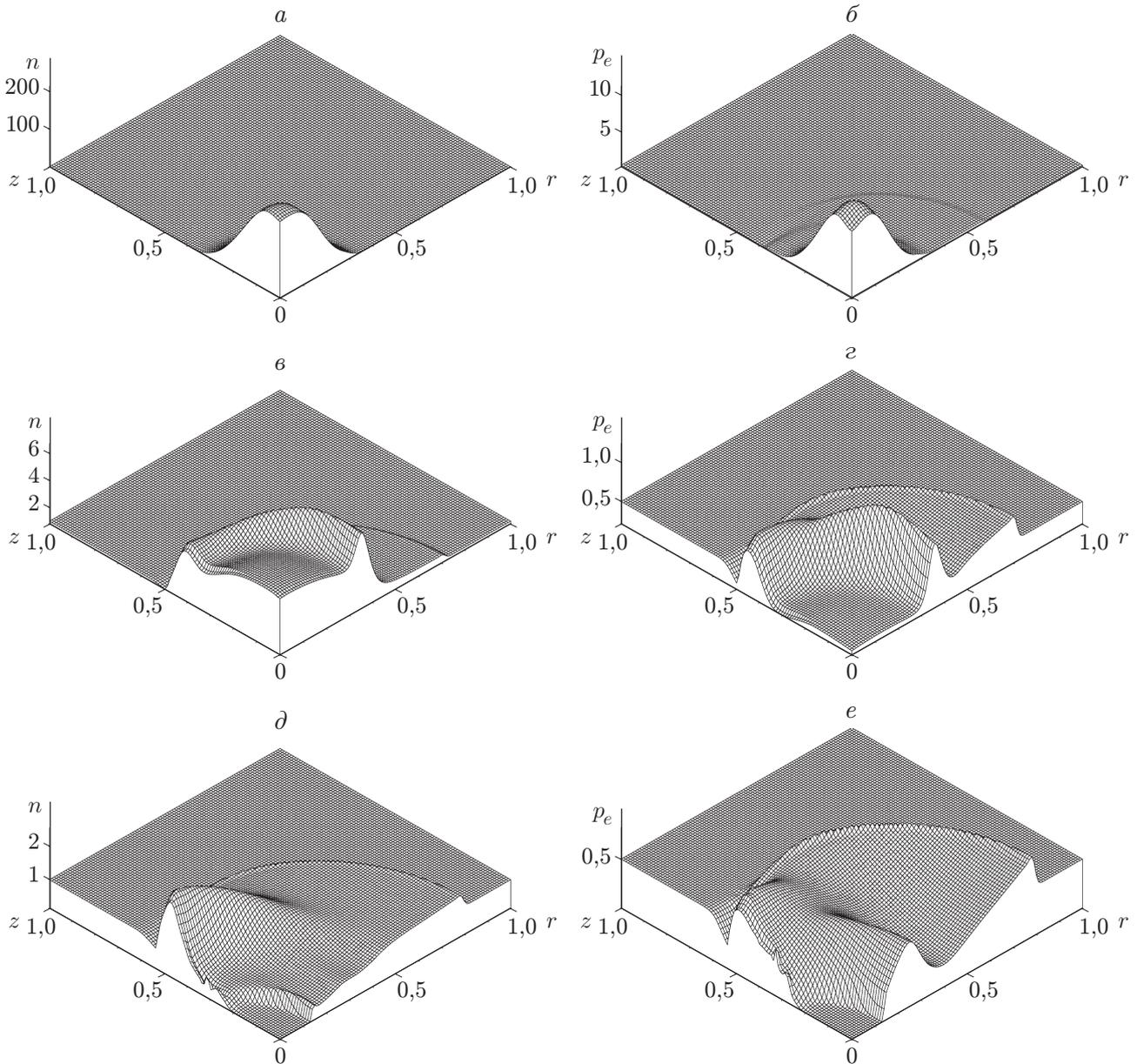


Рис. 3. Распределения плотности ($a, в, д$) и электронного давления ($б, г, е$) при различных значениях $n_{обл}$ ($t = 0,15; M_A^2 = 5$):

$a, б$ — $n_{обл} = 1000$; $в, г$ — $n_{обл} = 100$; $д, е$ — $n_{обл} = 10$

электронной и ионной температур, после чего плазма может рассматриваться как одножидкостная и однопериодическая.

Результаты проведенных расчетов правильно передают физику исследуемого явления, качественно и количественно согласуются с результатами, полученными в эксперименте и численных расчетах [1–5, 8].

Теоретический анализ и проведенные расчеты позволяют сделать вывод об эффективности предложенного численного алгоритма и созданного на его основе программного инструментария. Это дает возможность применять его для решения более сложных задач о распространении плазмы в магнитном поле с учетом эффектов теплопроводности и конечной проводимости плазмы.

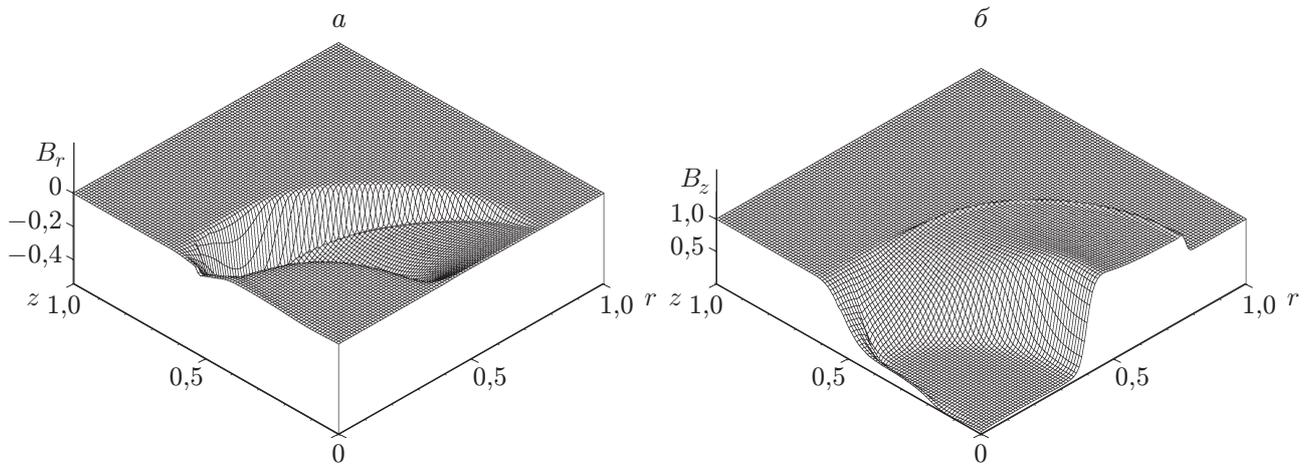


Рис. 4. Распределения радиальной (а) и направленной вдоль оси z (б) компонент магнитного поля при $t = 0,2$; $M_A^2 = 5$; $T_{i,обл} + T_{e,обл} = 1$; $p_{i,обл} + p_{e,обл} = 1000$; $n_{обл} = 1000$

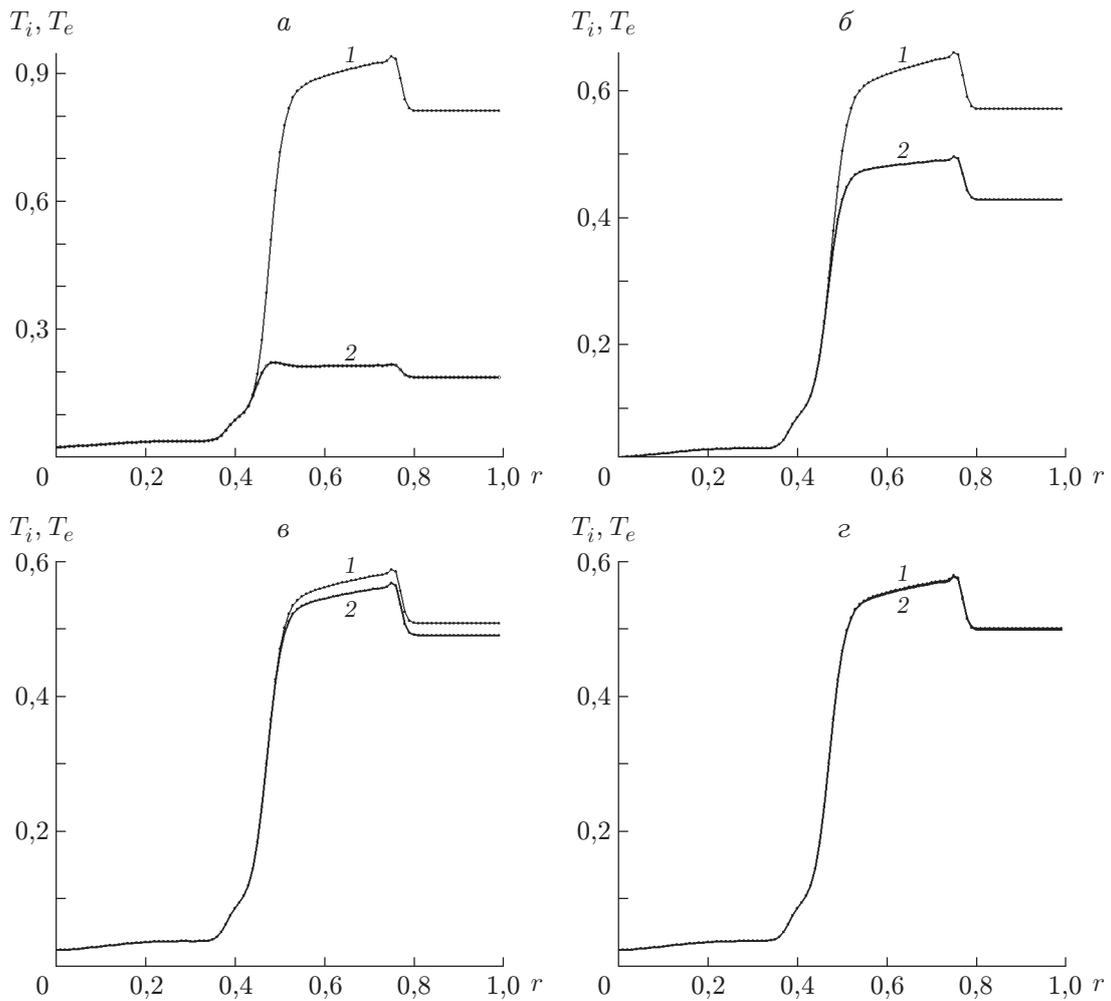


Рис. 5. Распределения электронной (1) и ионной (2) температур на радиальной оси ($z = 0$) при различных значениях k_{00} ($t = 0,2$; $p_{i,обл} = 1000$; $p_{e,обл} = 0$; $n_{обл} = 1000$; $M_A^2 = 5$):
 а — $k_{00} = 1$; б — $k_{00} = 3$; в — $k_{00} = 5$; г — $k_{00} = 7$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Burdaikov A. V., Arzhannikov A. V., Astrelin V. T., et al.** Fast heating of ions in GOL-3 multiple mirror trap // Proc. of the 31th Europ. phys. soc. conf. on controlled fusion and plasma physics, London, June 28 — July 2, 2004. Publ. by EPS. CD-ROM: Contributed Papers. 2004. V. 27A. P. 4–156.
2. **Аржанников А. В., Астрелин В. Т., Бурдаков А. В. и др.** Прямое наблюдение аномально низкой продольной электронной теплопроводности во время коллективной релаксации сильнооточного релятивистского электронного пучка в плазме // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 77, № 7. С. 426–429.
3. **Arzhannikov A. V., Astrelin V. T., Burdaikov A. V., et al.** Dynamics of ions of a beam-heated plasma in a cell of multimirror open trap // Trans. Fus. Technol. 2003. V. 43, N 1. P. 172–176.
4. **Астрелин В. Т., Бурдаков А. В., Ковеня В. М., Козлинская Т. В.** Численное моделирование динамики плазмы в неоднородном магнитном поле // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 1. С. 35–45.
5. **Ковеня В. М., Козлинская Т. В.** Об алгоритме расчета нагрева плазмы электронным пучком // Вычисл. технологии. 2004. Т. 9, № 6. С. 59–67.
6. **Ковеня В. М., Козлинская Т. В.** Метод предиктор-корректор для решения задач магнитной гидродинамики // Вычисл. технологии. 2006. Т. 11, № 6. С. 84–93. Спецвыпуск. Ч. 1.
7. **Брагинский С. И.** Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. Т. 1. С. 183–212.
8. **Астрелин В. Т., Бурдаков А. В., Губер Н. А., Ковеня В. М.** Моделирование движения и нагрева неоднородной плазмы // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 6. С. 3–18.

Поступила в редакцию 9/1 2007 г.
