

УДК 532.51

Устойчивость нагреваемой пленки жидкости при наличии термокапиллярного эффекта

С.П. Актершев

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

E-mail: sergey-aktershev@mail.ru

Исследуется устойчивость течения нагреваемой пленки жидкости при наличии термокапиллярного эффекта. Для описания волн в пленке используется интегральная модель. Результаты линейного анализа устойчивости показывают, что термокапиллярный эффект приводит к расширению области неустойчивости только при небольших значениях числа Пекле Pe , а при больших значениях Pe происходит сужение области неустойчивости. Проведено численное моделирование эволюции волн в пленке на подложке с фиксированной температурой. Результаты численных расчетов хорошо согласуются с линейной теорией устойчивости.

Ключевые слова: неизотермическая пленка жидкости, устойчивость, термокапиллярный эффект, стационарные волны.

Введение

Интенсивное изучение течений пленок вязкой жидкости связано с их широким использованием в технике. В большинстве практически важных случаев течение пленки неустойчиво и на поверхности жидкости развиваются волны, оказывающие сильное влияние на тепломассообмен. В случае неизотермической пленки волны индуцируют на поверхности жидкости градиент температуры. Зависимость поверхностного натяжения от температуры (термокапиллярный эффект) приводит к появлению касательного напряжения, которое воздействует на скорость жидкости. Таким образом, кроме гидродинамической неустойчивости появляется еще один механизм неустойчивости, обусловленный термокапиллярным эффектом. Гидродинамика и теплоперенос оказываются взаимосвязанными процессами, что существенно усложняет теоретический анализ.

Устойчивость неизотермической пленки на подложке с фиксированной температурой довольно полно рассмотрена в работе [1] на основе уравнений типа Орра–Зоммерфельда, полученных из линеаризованных уравнений Навье–Стокса и уравнения энергии. Здесь задача устойчивости неизотермической пленки впервые рассмотрена как задача на собственные значения для комплексной скорости волн, и выделены основные механизмы перекачки энергии потока в растущие возмущения. В работе [2] устойчивость течения и волны в однородно нагреваемой пленке исследовались исходя из интегральной модели. Температура поверхности пленки определялась из эволюционного уравнения, выведенного из усредненного уравнения энергии в предположении линейного профиля температуры. Результаты линейного анализа устойчивости [2] показывают, что диапазон волнового числа неустойчивости вследствие термокапиллярного эффекта расширяется, особенно при малых значениях числа Рейнольдса Re .

Термокапиллярным волнам посвящены работы [3, 4], в которых применяется метод взвешенных остатков с полиномиальным разложением для поля скорости и поля

температуры, разработанный для изотермической пленки [5]. В этих работах для описания течения пленки выведены модели первого и второго порядка по параметру длинноволновости. Модель первого порядка состоит из трех уравнений в частных производных для толщины пленки, расхода и температуры поверхности в предположении линейного профиля температуры. Модель второго порядка довольно громоздка и трудна для анализа, поскольку состоит из 8 уравнений, причем каждое уравнение содержит не менее 20 членов. Результаты исследований [3, 4] также подтверждают, что термокапиллярный эффект приводит к расширению области неустойчивости. Следует отметить, что модель имеет определенные недостатки. В частности, в работе [4] отмечается, что при достаточно больших значениях Re модель дает нефизические значения температуры в стационарной волне. Эти недостатки частично исправлены в работе [6], в которой рассматривается два типа граничного условия — фиксированная температура подложки и фиксированный тепловой поток. Для описания волн в нагреваемой пленке здесь также применяется метод взвешенных весовых остатков. Усредненное уравнение энергии модифицировано для более адекватного учета теплопереноса при больших значениях числа Пекле. Сравнение температуры поверхности, рассчитанной по усредненному уравнению, с численным моделированием поля температуры в стационарной волне показало хорошее соответствие только для $Re \leq 5$. При $Re > 6$ различие становится довольно заметным и быстро растет с увеличением Re . Описание динамики нагреваемой пленки на основе полиномиального разложения профилей скорости и температуры представляется малоперспективным по следующей причине. С увеличением степени полиномов происходит резкое увеличение числа уравнений, а сами уравнения становятся очень громоздкими. Увеличение степени полиномов, по-видимому, не приводит к быстрому уменьшению погрешности расчета температуры (если сравнивать с численным моделированием). Кроме того, исчезает ценное качество упрощенной модели — простота и возможность аналитического исследования. Теряется преимущество упрощенной модели по сравнению с численным решением уравнений Навье–Стокса.

В настоящей работе на основе интегральной модели исследуется линейная устойчивость пленки на однородно обогреваемой подложке с фиксированной температурой. Проведено численное моделирование эволюции волн в нагреваемой пленке. Результаты численных расчетов сравниваются с теорией устойчивости.

1. Уравнения неизотермического течения пленки

Рассмотрим двумерное течение пленки вязкой жидкости по неограниченной однородно обогреваемой пластине, наклоненной под углом θ к горизонту. Температура пластины фиксирована и равна T_w . Свободная поверхность жидкости контактирует с неподвижным газом, температура которого равна T_g ; теплообмен между жидкостью и газом описывается законом Ньютона с коэффициентом теплообмена b . Плотность ρ , кинематическую вязкость ν , теплопроводность λ , температуропроводность жидкости a считаем постоянными, а поверхностное натяжение — линейно зависящим от температуры: $\sigma = \sigma_0 - \gamma(T - T_0)$.

Введем декартову систему координат с осью Ox в направлении гравитации и осью Oy по нормали к пластине. Возмущение поверхности пленки считаем длинноволновым и используем погранслоное приближение, полагая $\partial^2 / \partial x^2 \ll \partial^2 / \partial y^2$, $\partial h / \partial x \ll 1$. В принятом приближении течение жидкости описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На пластине выполняются условия: $u = 0$, $v = 0$, а на поверхности пленки — кинематическое и динамические условия:

$$y = h(x, t): \frac{\partial h}{\partial t} + u_s \frac{\partial h}{\partial x} = v_s, \quad p = p_g - \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_s, \quad (2)$$

здесь $\tau_s = -\gamma \frac{\partial T_s}{\partial x}$ — касательное напряжение, обусловленное термокапиллярным эффектом, T_s — температура поверхности пленки. Давление в жидкости находим из уравнения для поперечной компоненты импульса: $\partial p / \partial y = -\rho g \cos \theta$. С учетом (2) получаем

$$p = p_g + \rho g \cos \theta (h - y) - \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \quad (2.1)$$

Для дальнейшего упрощения зададим профиль скорости в пленке (неавтономный) в виде:

$$u / u_s = (2 - \tau_s h / \mu u_s) \eta + (\tau_s h / \mu u_s - 1) \eta^2, \quad (3)$$

здесь $\eta = y / h$, u_s — скорость на поверхности пленки. Из (3) получаем

$$u = \frac{q}{h} \left(3\eta - 3\eta^2 / 2 \right) + \left(3\eta^2 / 4 - \eta / 2 \right) \frac{\tau_s h}{\mu}, \quad \text{где } q = \int_0^h u dy \text{ — расход жидкости.} \quad (4)$$

С помощью равенств (2)–(4) уравнения (1) известным образом преобразуются в систему уравнений относительно h и q (интегральная модель [7]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} &= \frac{3\tau_s}{2\rho} + gh \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{3vq}{h^2} + \frac{h\sigma}{\rho} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

здесь $J = \int_0^h u^2 dy = \frac{6q^2}{5h} + \frac{qh\tau_s}{20\mu} + \frac{\tau_s^2 h^3}{120\mu^2}$. Касательное напряжение τ_s определяется распределением температуры в пленке, поэтому для замыкания системы уравнений (5) необходимо привлечь уравнение энергии. В погранслоном приближении уравнение энергии и граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=h} = b(T_s - T_g), \quad T \Big|_{y=0} = T_W.$$

В уравнении энергии удобнее вместо координаты y использовать переменную $\eta = y / h$. При таком переходе производные преобразуются по формулам

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{x,y} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{x,\eta} - \frac{\eta}{h} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_y = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_\eta - \frac{\eta}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

а уравнение энергии примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{V}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{a}{h^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}, \quad \text{где } V = v + \eta \left(-\frac{\partial h}{\partial t} - u \frac{\partial h}{\partial x} \right). \quad (6)$$

Из (4) нетрудно найти функцию тока ψ и поперечную компоненту скорости v :

$$\psi = \int_0^y u dy = \frac{q}{2} (3\eta^2 - \eta^3) + \frac{\tau_s h^2}{4\mu} (\eta^3 - \eta^2),$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} \left(\frac{\eta^3 - 3\eta^2}{2} \right) + \frac{3q}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \left(\eta^2 - \frac{\eta^3}{2} \right) - (\eta^3 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau_s h^2}{4\mu} \right) + (3\eta^3 - 2\eta^2) \frac{\tau_s h}{4\mu} \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Используя (4), получаем
$$V = -\frac{\partial h}{\partial t} \left(\eta - \frac{3\eta^2}{2} + \frac{\eta^3}{2} \right) - (\eta^3 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau_s h^2}{4\mu} \right).$$

В случае невозмущенного течения пленка имеет постоянную толщину h_0 , а все производные в уравнениях (5), (6) равны нулю. При этом температура является линейной функцией координаты y : $T = T_W - b(T_W - T_g)y/(\lambda + bh_0)$.

Выберем в качестве масштаба расстояния h_0 и введем масштаб скорости $u_m = gh_0^2/3\nu$, масштаб времени $t_m = h_0/u_m$, масштаб расхода $q_m = h_0 u_m$, масштаб температуры $T_m = T_W - T_g$. Перейдем к безразмерным переменным x/h_0 , h/h_0 , q/q_m , t/t_m , u/u_m , v/u_m , $(T - T_g)/T_m$, оставив для всех величин прежние буквенные обозначения. В безразмерных переменных уравнения (5) и уравнение (6) с граничными условиями примут вид:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = \frac{3}{\text{Re}_m} \left(h \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\text{Ma}}{2} \frac{\partial T_s}{\partial x} - \frac{q}{h^2} \right) + \text{We} h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3},$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{V}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{1}{h^2 \text{Pe}} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2},$$

$$\partial T / \partial \eta \Big|_{\eta=1} + \text{Bi} h T_s = 0, \quad T \Big|_{\eta=0} = 1.$$

Здесь
$$V = -\frac{\partial h}{\partial t} \left(\eta - \frac{3\eta^2}{2} + \frac{\eta^3}{2} \right) - \frac{\text{Ma}}{4} (\eta^2 - \eta^3) \frac{\partial}{\partial x} \left(h^2 \frac{\partial T_s}{\partial x} \right),$$
 (10)

$$u = \frac{q}{h} \left(3\eta - \frac{3\eta^2}{2} \right) - \frac{\text{Ma}}{4} (3\eta^2 - 2\eta) h \frac{\partial T_s}{\partial x}, \quad J = \frac{6q^2}{5h} - \frac{\text{Ma} q h}{20} \frac{\partial T_s}{\partial x} + \frac{\text{Ma}^2 h^3}{120} \left(\frac{\partial T_s}{\partial x} \right)^2.$$

Течение нагреваемой пленки определяется следующими безразмерными критериями: $\text{We} = (3Fi/\text{Re}_m^5)^{1/3}$ — число Вебера, $\text{Ma} = \gamma T_m / \mu u_m$ — число Марангони, $\text{Bi} = bh_0 / \lambda$ — число Био, $\text{Pe} = \text{Re}_m \text{Pr}$ — число Пекле. Критерий $\text{Re}_m = gh_0^3 / 3\nu^2$ характеризует толщину невозмущенной пленки и связан с числом Рейнольдса пленки Re соотношением $\text{Re} = \text{Re}_m \sin \theta$. Поскольку $h_0 \sim \text{Re}_m^{1/3}$, $u_m \sim \text{Re}_m^{2/3}$, то $\text{Bi} = \text{Bi}^* \cdot \text{Re}_m^{1/3}$, $\text{Ma} = \text{Ma}^* / \text{Re}_m^{2/3}$. Безразмерные комплексы Bi^* и Ma^* определяются только свойствами жидкости и условием нагрева: $\text{Bi}^* = b(3\nu^2/g)^{1/3} / \lambda$, $\text{Ma}^* = \gamma(3/g\nu)^{2/3} (T_W - T_g) / \mu$. Невозмущенному течению пленки соответствует тривиальное решение $h = 1$, $q = q_0 \equiv \sin \theta$. При этом профиль температуры в пленке $T_0(\eta) = 1 - \eta \text{Bi} / (1 + \text{Bi})$ и температура поверхности $T_{s0} = 1 / (1 + \text{Bi})$ не зависят от координаты x .

2. Анализ устойчивости неизотермического течения

Для анализа устойчивости течения необходимо задать малое возмущение поверхности пленки $H(x, t)$ и рассмотреть развитие этого возмущения во времени. Вследствие

термокапиллярного эффекта поле скорости и поле температуры жидкости оказываются взаимосвязанными, поэтому возмущения течения необходимо рассматривать совместно с возмущением температуры $\tilde{T}(x, t, \eta)$, которое определяется из уравнения энергии (8).

Возмущение температуры жидкости при волновом течении пленки

Положим $h = 1 + H(x, t)$, $T(t, x, \eta) = T_0(\eta) + \tilde{T}(x, t, \eta)$, где $H \ll 1$, $\tilde{T} \ll T_0(\eta)$ и линеаризуем уравнение (8) относительно малых возмущений H , \tilde{T} :

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} - \tilde{V} \frac{\text{Bi}}{1 + \text{Bi}} = \frac{1}{\text{Pe}} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \eta^2}, \quad (11)$$

здесь $u_0 = q_0(3\eta - 3\eta^2/2)$ — невозмущенный профиль скорости. Линеаризованный член (10) $\tilde{V} = -(\eta - 1, 5\eta^2 + 0, 5\eta^3) \partial H / \partial t - 0, 25\text{Ma}(\eta^2 - \eta^3) \partial^2 \tilde{T}_s / \partial x^2$ имеет первый порядок малости, поэтому для $\partial T / \partial \eta$ взято невозмущенное значение $\partial T_0 / \partial \eta = -\text{Bi} / (1 + \text{Bi})$. Граничные условия для возмущения температуры имеют вид:

$$\left. \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} + \text{Bi} \tilde{T}_s = -H \text{Bi} / (1 + \text{Bi}), \quad \left. \tilde{T} \right|_{\eta=0} = 0.$$

Будем рассматривать волны вблизи границы устойчивости, когда возмущение поверхности пленки представляет собой стационарно бегущую волну малой амплитуды. Представим возмущение поверхности пленки H и возмущение температуры жидкости \tilde{T} в комплексной форме:

$$\hat{H}(x, t) = H_a e^{ik(x-ct)}, \quad \hat{T}(x, \eta, t) = \hat{\Phi}(\eta) \hat{H} \text{Bi} / (1 + \text{Bi}), \quad (12)$$

здесь H_a , k , c — вещественные амплитуда, волновое число и фазовая скорость волны, $\hat{\Phi}(\eta) = \Phi_R + i\Phi_I$ — комплекснозначная функция координаты η . Для бегущей волны реальное возмущение поверхности $H(x, t) = H_a \cos k(x - ct)$. Соответствующее комплексное представление $\hat{H} = H_a e^{ik(x-ct)} = H - (i/k) \partial H / \partial x$. Реальное возмущение температуры есть вещественная часть выражения $\hat{\Phi}(\eta) \hat{H} \text{Bi} / (1 + \text{Bi})$, т. е. $\tilde{T}(x, \eta, t) = (\Phi_R H + (\Phi_I / k) \partial H / \partial x) \text{Bi} / (1 + \text{Bi})$. Здесь $\Phi_R(\eta)$ и $\Phi_I(\eta)$ — части профиля температуры, для которых колебания в бегущей волне совпадают по фазе с $H(x, t)$ и $\partial H / \partial x$. Возмущение температуры на поверхности пленки запишем как $\hat{T}_s = -\hat{E} \hat{H}$, где $\hat{E} = -\hat{\Phi}(1) \text{Bi} / (1 + \text{Bi})$. Физически реальная величина \hat{T}_s есть вещественная часть выражения $(-\hat{E} \hat{H})$:

$$\hat{T}_s = -E_R H - (E_I / k) \partial H / \partial x. \quad (13)$$

Из (13) получаем касательное напряжение на поверхности пленки:

$$\tau_s = -\text{Ma} \partial \hat{T}_s / \partial x = \text{Ma} \left(E_R \partial H / \partial x + (E_I / k) \partial^2 H / \partial x^2 \right) = \tau_R \partial H / \partial x + \tau_I H.$$

Здесь компонента $\tau_R = \text{Ma} E_R$ действует на “склонах холма”; компонента $\tau_I = -\text{Ma} E_I k$ действует на “вершине холма” и на “дне впадины” (рис. 1, *a*, *b*). В случае $E_R > 0$, $E_I < 0$ обе компоненты усиливают деформацию поверхности пленки, а в случае $E_R < 0$,

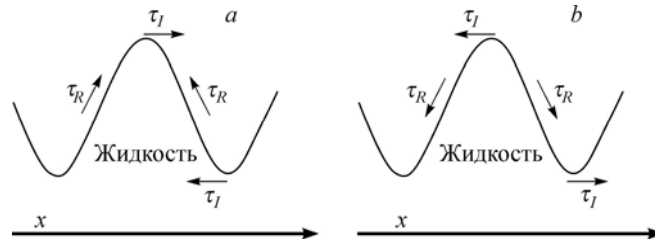


Рис. 1. Касательное напряжение на поверхности нагреваемой пленки при $E_I > 0, E_a < 0$ (a); $E_I < 0, E_a > 0$ (b).

$E_I > 0$ стабилизируют пленку. Для иной комбинации знаков E_R, E_I может быть как стабилизирующий, так и дестабилизирующий эффект.

Подставляя (12) в уравнение (11), получаем для $\hat{\Phi}(\eta)$ уравнение

$$\hat{\Phi}'' = i\varepsilon \left((u_0 - c)\hat{\Phi} - c(\eta - 1,5\eta^2 + 0,5\eta^3) + iM\hat{\Phi}(1)(\eta^2 - \eta^3) \right). \quad (14)$$

Здесь введены обозначения $\varepsilon = kRe$, $M = kMaBi/4(1+Bi)$. Граничные условия для (14) имеют вид:

$$\hat{\Phi}'(1) + Bi\hat{\Phi}(1) = -1, \quad \hat{\Phi}(0) = 0. \quad (15)$$

Имея решение уравнения (14) для произвольных значений k и c , мы получаем $E_R = -\Phi_R(1)Bi/(1+Bi)$, $E_I = -\Phi_I(1)Bi/(1+Bi)$ и находим \tilde{T}_s из (13).

Рассмотрим сначала асимптотику $\varepsilon \rightarrow 0$. В этом случае $\hat{\Phi}'' = 0$. Используя (15), находим $\hat{\Phi}|_{\varepsilon \rightarrow 0} \equiv \Phi_0 = -\eta/(1+Bi)$. Таким образом, в предельном случае $kRe \rightarrow 0$ функция $\hat{\Phi}(\eta)$ вещественная. Колебания температуры поверхности пленки совпадает по фазе с $H(x, t)$; минимум получается на “вершине холма”, максимум — во “впадине”. В общем случае ищем решение в виде $\hat{\Phi} = \Phi_0 + i\varepsilon \hat{\Psi}$. Преобразуя (14) с учетом последнего, получаем

$$\hat{\Psi}'' = i\varepsilon \left(-c + 3q_0\eta - 1,5q_0\eta^2 \right) \hat{\Psi} + d_1\eta + d_2\eta^2 + d_3\eta^3 - \varepsilon M\hat{\Psi}(1)(\eta^2 - \eta^3), \quad (16)$$

где $d_1 = -cBi/(1+Bi)$, $d_2 = 1,5c - (3q_0 + iM)/(1+Bi)$, $d_3 = (1,5q_0 + iM)/(1+Bi) - 0,5c$. Для уравнения (16) граничное условие на стенке — $\hat{\Psi}(0) = 0$, на поверхности пленки —

$$\hat{\Psi}'(1) + Bi\hat{\Psi}(1) = 0. \quad (17)$$

Приближенное решение уравнения (16)

Разложим $\hat{\Psi}''(\eta)$ в ряд Тейлора в точке $\eta = 0$:

$$\hat{\Psi}''(\eta) = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + \dots \quad (18)$$

Интегрируя этот ряд дважды с учетом условия $\hat{\Psi}(0) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}'(\eta) &= \hat{\Psi}'(0) + a_0\eta + a_1\eta^2/2 + a_2\eta^3/3 + \dots, \\ \hat{\Psi}(\eta) &= \hat{\Psi}(0)\eta + a_0\eta^2/2 + a_1\eta^3/6 + a_2\eta^4/12 + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Ряд (19) начинается с члена первой степени η , поэтому в правой части (16) отсутствует член нулевой степени. Следовательно, в левой части (16) тоже отсутствует нулевая

степень, т. е. $a_0 = 0$. Подставляя (19) и (18) в (16) и приравнявая коэффициенты перед одинаковыми степенями η в обеих частях уравнения, получаем рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} a_1 &= d_1 - i\varepsilon c \widehat{\Psi}'(0), \quad a_2 = d_2 + i\varepsilon 3q_0 \widehat{\Psi}'(0) - \varepsilon M \widehat{\Psi}(1), \\ a_3 &= d_3 - i\varepsilon (ca_1/6 + 1,5q_0 \widehat{\Psi}'(0)) + \varepsilon M \widehat{\Psi}(1), \\ a_m &= i\varepsilon \left(-\frac{ca_{m-2}}{m(m-1)} + \frac{3q_0 a_{m-3}}{(m-1)(m-2)} - \frac{1,5q_0 a_{m-4}}{(m-2)(m-3)} \right), \quad m \geq 4. \end{aligned} \quad (20)$$

Если будут известны $\widehat{\Psi}'(0)$ и $\widehat{\Psi}(1)$, то все a_m вычисляются из (20) и тем самым будет известен ряд (19). Считая, что ряд сходится, отбросим слагаемые после $a_n \eta^{n+2}$. Соотношения (20) дают n линейных уравнений для $(n+2)$ неизвестных $a_1, a_2, \dots, a_n, \widehat{\Psi}'(0), \widehat{\Psi}(1)$. Еще одно уравнение получаем, подставляя в (19) $\eta = 1$:

$$\widehat{\Psi}(1) = \widehat{\Psi}'(0) + a_1/6 + a_2/12 + \dots + a_n/(n+1)(n+2). \quad (21)$$

Недостающее уравнение дает граничное условие (17), которое можно преобразовать следующим образом:

$$\widehat{\Psi}'(0) + a_1 \beta_1/6 + a_2 \beta_2/12 + \dots + a_n \beta_n/(n+1)(n+2) = 0,$$

где

$$\beta_m = (m+2 + \text{Bi})/(1 + \text{Bi}). \quad (22)$$

Введем для удобства обозначения $\widehat{X} \equiv \widehat{\Psi}'(0)$, $\widehat{Y} \equiv \widehat{\Psi}(1)$ и запишем (21) и (22) в виде

$$\widehat{F}(\widehat{X}, \widehat{Y}) \equiv \widehat{X} - \widehat{Y} + \sum_{m=1}^n \frac{a_m}{(m+1)(m+2)} = 0, \quad \widehat{G}(\widehat{X}, \widehat{Y}) \equiv \widehat{X} + \sum_{m=1}^n \frac{a_m \beta_m}{(m+1)(m+2)} = 0, \quad (23)$$

здесь $a_1 = d_1 - i\varepsilon c \widehat{X}$, $a_2 = d_2 - \varepsilon (M \widehat{Y} - i3q_0 \widehat{X})$, $a_3 = d_3 - i\varepsilon c d_1/6 + \varepsilon M \widehat{Y} - \varepsilon (c^2 \varepsilon/6 + i3q_0/2) \widehat{X}$, остальные a_m определяются рекуррентной формулой (20). Отметим, что все коэффициенты a_m линейно зависят от $(\widehat{X}, \widehat{Y})$, следовательно, \widehat{F} и \widehat{G} — линейные функции переменных $(\widehat{X}, \widehat{Y})$, т. е. $\widehat{F}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = A_F \widehat{X} + B_F \widehat{Y} + D_F$, $\widehat{G}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = A_G \widehat{X} + B_G \widehat{Y} + D_G$. Чтобы найти константы $A_F, A_G, B_F, B_G, D_F, D_G$, зададим $(\widehat{X}, \widehat{Y}) = (0, 0)$. Вычислив из (20) коэффициенты a_m , найдем $\widehat{F}(0, 0) = D_F$ и $\widehat{G}(0, 0) = D_G$. Задавая $(\widehat{X}, \widehat{Y}) = (1, 0)$ и $(\widehat{X}, \widehat{Y}) = (0, 1)$, находим $\widehat{F}(1, 0)$, $\widehat{G}(1, 0)$, $\widehat{F}(0, 1)$, $\widehat{G}(0, 1)$. Получаем $A_F = \widehat{F}(1, 0) - \widehat{F}(0, 0)$, $B_F = \widehat{F}(0, 1) - \widehat{F}(0, 0)$, $A_G = \widehat{G}(1, 0) - \widehat{G}(0, 0)$, $B_G = \widehat{G}(0, 1) - \widehat{G}(0, 0)$. Таким образом, решение уравнений (23) будет иметь вид $\widehat{X} = (D_G B_F - D_F B_G)/(A_F B_G - A_G B_F)$, $\widehat{Y} = (A_G D_F - A_F D_G)/(A_F B_G - A_G B_F)$. Отсюда находим

$$E_R = (1/(1 + \text{Bi}) + k \text{Pe} Y_I) \text{Bi}/(1 + \text{Bi}), \quad E_I/k = -\text{Pe} Y_R \text{Bi}/(1 + \text{Bi}). \quad (24)$$

Вычислив все a_m , находим также профиль возмущения температуры

$$\tilde{T}(x, \eta, t) = \tilde{T}_R H + \tilde{T}_I \partial H / \partial x, \quad (25)$$

Здесь $\tilde{T}_R = -(\eta/(1 + \text{Bi}) + k \text{Pe} \Psi_I(\eta)) \text{Bi}/(1 + \text{Bi})$, $\tilde{T}_I = \text{Pe} \Psi_R(\eta) \text{Bi}/(1 + \text{Bi})$.

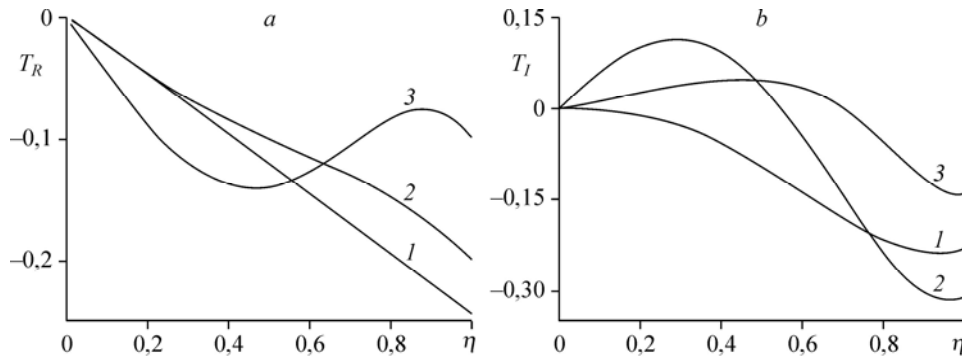


Рис. 2. Профили T_R (a) и T_I (b) при $Ma = 0$, $Bi = 1$; $\varepsilon = 1$ (1), 6 (2), 35 (3).

Рассмотрим решение уравнения (16) в асимптотике $k \rightarrow 0$. При $\varepsilon = 0$ имеем: $a_m = d_m$ при $m = 1, 2, 3$; $a_m = 0$, при $m \geq 4$. Уравнения (23) в этом случае принимают вид:

$$\hat{X} - \hat{Y} + d_1/6 + d_2/12 + d_3/20 = 0, \quad \hat{X} + d_1\beta_1/6 + d_2\beta_2/12 + d_3\beta_3/20 = 0.$$

$$\text{Находим } \hat{Y} = -(d_1/3 + d_2/4 + d_3/5)/(1 + Bi) = -(c(33 - 7Bi)/120 - 9q_0/20)/(1 + Bi)^2.$$

Тогда

$$E_R|_{k \rightarrow 0} \equiv E_{R,0} = Bi/(1 + Bi)^2, \\ E_I|_{k \rightarrow 0} \equiv E_{I,0} = kPe((33 - 7Bi)c/120 - 9q_0/20)Bi/(1 + Bi)^2. \quad (26)$$

Тестовые расчеты показали, что ряд (19) быстро сходится, и при $n > 25$ результаты расчетов практически не зависят от количества слагаемых n .

На рис. 2 показаны профили $\tilde{T}_R(\eta)$, $\tilde{T}_I(\eta)$, рассчитанные при $Ma = 0$, $Bi = 1$, $c = 3q_0$ и различных значениях параметра ε . При $\varepsilon \leq 1$ профиль $\tilde{T}_R(\eta)$ близок к линейному, но отличие возрастает с увеличением ε . Профиль $\tilde{T}_I(\eta)$ существенно отличается от линейного при всех значениях ε . Поскольку $\partial H/\partial x \sim kH$, то при $k \rightarrow 0$ второе слагаемое в (25) мало. Таким образом, профиль возмущения температуры в бегущей волне можно считать линейным только при $kPe \ll 1$. С увеличением значений kPe такое упрощение становится неправомерным.

Температура поверхности пленки из усредненного уравнения энергии

В работах [2, 3, 6] использовано усредненное уравнение энергии. Следуя этому принципу, умножим уравнение (8) на η и проинтегрируем по η :

$$\int_0^1 \frac{\partial T}{\partial t} \eta d\eta + \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial x} u \eta d\eta + \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial \eta} V \eta d\eta = \frac{1 - T_s(1 + Bi h)}{h^2 Pe}. \quad (27)$$

В правой части выполнено интегрирование по частям с учетом граничных условий (9). Если подставить в (27) профиль температуры, выраженный через T_s , и провести интегрирование, мы получим эволюционное уравнение для T_s . Очевидно, что адекватность полученного уравнения зависит от того, насколько заданный профиль соответствует реальности. В работах [2, 3] взят линейный профиль

$$T(t, x, \eta) = 1 + \eta(T_s - 1). \quad (28)$$

Подставим (28) в (27) и, полагая $h = 1 + H$, $T_s = 1/(1 + \text{Bi}) + \tilde{T}_s$, линеаризуем уравнение относительно H , \tilde{T}_s . Во втором интеграле необходимо брать невозмущенный профиль скорости $u_0 = q_0(3\eta - 1,5\eta^2)$, а в третьем интеграле необходимо брать невозмущенное значение $dT_0/d\eta = -\text{Bi}/(1 + \text{Bi})$. В результате получаем:

$$\int_0^1 \frac{\partial T}{\partial t} \eta d\eta = \frac{\partial \tilde{T}_s}{\partial t} \int_0^1 \eta d\eta, \quad \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial x} u \eta d\eta = q_0 \frac{\partial \tilde{T}_s}{\partial x} \int_0^1 (3\eta - 1,5\eta^2) \eta d\eta,$$

$$\int_0^1 \frac{\partial T}{\partial \eta} V \eta d\eta = \frac{\text{Bi}}{1 + \text{Bi}} \frac{\partial H}{\partial t} \int_0^1 (\eta - 1,5\eta^2 + 0,5\eta^3) \eta d\eta + \frac{\text{MaBi}}{4(1 + \text{Bi})} \frac{\partial^2 \tilde{T}_s}{\partial x^2} \int_0^1 (\eta^2 - \eta^3) \eta d\eta.$$

Вычислив интегралы, запишем линеаризованное уравнение (27) в виде

$$\frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{T}_s}{\partial t} + \frac{9q_0}{20} \frac{\partial \tilde{T}_s}{\partial x} + \frac{\text{MaBi}}{80(1 + \text{Bi})} \frac{\partial^2 \tilde{T}_s}{\partial x^2} + \frac{(1 + \text{Bi})\tilde{T}_s}{\text{Pe}} = -\frac{\text{Bi}}{(1 + \text{Bi})} \left(\frac{7}{120} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{H}{\text{Pe}} \right). \quad (29)$$

Если сравнить (29) с линеаризованным уравнением энергии из работ [2,3], то единственным отличием будет наличие в левой части (29) члена $\partial^2 \tilde{T}_s / \partial x^2$. Формально этот член должен быть отброшен в погранслоном приближении. Он, однако, оставлен, т. к. коэффициент перед ним, пропорциональный Ma , может быть большим.

Из уравнения (14) профиль возмущения температуры получается линейным только в асимптотике $k\text{Pe} \rightarrow 0$. В связи с этим интересно сравнить значения E_R и E_I/k , рассчитанные исходя из линейного профиля (т. е. из (29)) с формулами (24). Подставляя $\hat{H}(x, t) = H_a e^{ik(x-ct)}$, $\tilde{T}_s = -\hat{E}\hat{H}$ в уравнение (29), получаем:

$(i\varepsilon(9q_0/20 - c/3) + 1 + \text{Bi} - \varepsilon M/20)\hat{E} = (1 - i\varepsilon 7c/120)\text{Bi}/(1 + \text{Bi})$. Отделяя вещественную и мнимую части \hat{E} , находим

$$E_R = \frac{\text{Bi}}{1 + \text{Bi}} \frac{1 + \text{Bi} - \varepsilon M/20 + \varepsilon^2(c/3 - 9q_0/20)7c/120}{(1 + \text{Bi} - \varepsilon M/20)^2 + \varepsilon^2(9q_0/20 - c/3)^2},$$

$$\frac{E_I}{k} = \frac{\text{BiPe}}{1 + \text{Bi}} \frac{(1 + \text{Bi} - \varepsilon M/20)(-7c/120) + c/3 - 9q_0/20}{(1 + \text{Bi} - \varepsilon M/20)^2 + \varepsilon^2(9q_0/20 - c/3)^2}. \quad (30)$$

На рис. 3 *a, b* показаны значения E_R и E_I/k , рассчитанные из уравнения (14), в сравнении с (30) при $\text{Pe} = 7$, $\text{Bi} = 1$. Оба подхода дают одинаковые значения в асимптотике

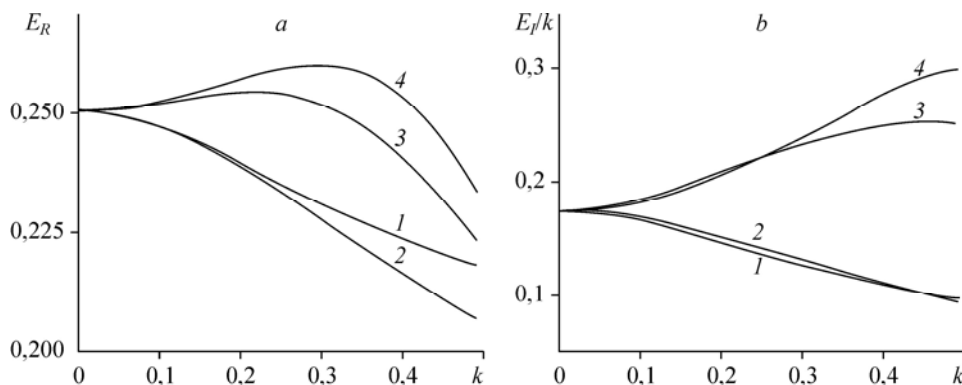


Рис. 3. Значения E_R (a) и E_I/k (b) при $\text{Pe} = 7$, $\text{Bi} = 1$; по уравнению (14) — 1, 3, по формулам (30) — 2, 4; $\text{Ma} = 0$ (1, 2), 100 (3, 4).

$k \rightarrow 0$, но с увеличением k различие растёт. Отношение E_I / E_R определяет фазовый сдвиг $\tilde{T}_s(x, t)$ относительно $H(x, t)$. Из рис. 3 видно, что с ростом k значения E_I / k при $Ma = 0$ уменьшаются, а при $Ma > 0$ растут. Это означает, что термокапиллярный эффект увеличивает фазовый сдвиг между \tilde{T}_s и H .

Дисперсионные соотношения

Положим $h = 1 + H$, $q = q_0 + Q$, $T_s = T_{s0} + \tilde{T}_s$ и линеаризуем уравнения (7):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{6q_0^2}{5} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{12q_0}{5} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{q_0 Ma}{20} \frac{\partial^2 \tilde{T}_s}{\partial x^2} = \\ & = \frac{3}{Re_m} \left(3q_0 H - Q - \frac{Ma}{2} \frac{\partial \tilde{T}_s}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial H}{\partial x} \right) + We \frac{\partial^3 H}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Уравнения (31) вместе с (13) составляют замкнутую систему линейных уравнений относительно малых возмущений H , Q , \tilde{T}_s . Сведем эту систему к одному уравнению для возмущения поверхности пленки. Дифференцируя первое уравнение (31) по x , а второе по t , исключаем $\partial^2 Q / \partial x \partial t$; затем с помощью второго уравнения (31) исключаем $\partial Q / \partial x$. В результате получаем уравнение, содержащее H и \tilde{T}_s :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \left(\frac{6q_0^2}{5} - \frac{3 \cos \theta}{Re_m} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{12q_0}{5} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t} + \frac{3}{Re_m} \left(\frac{\partial H}{\partial t} + 3q_0 \frac{\partial H}{\partial x} \right) + We \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} = \\ & = Ma \left(\frac{3}{2 Re_m} \frac{\partial^2 \tilde{T}_s}{\partial x^2} - \frac{q_0}{20} \frac{\partial^3 \tilde{T}_s}{\partial x^3} \right). \end{aligned}$$

Подставляя в вышеприведенное выражение равенство (13), получаем для $H(x, t)$ двухволновое уравнение:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) H + \frac{3}{Re_m} \left(\frac{\partial H}{\partial t} + 3q_0 \frac{\partial H}{\partial x} \right) - Ma F \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} + We_M \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} = 0, \quad (32)$$

здесь $c_{1,2} = 1, 2q_0 \pm \sqrt{1, 44q_0^2 - \delta_M}$, $F = 0, 05q_0 E_R - 1, 5E_I / k Re_m$, $We_M = We - 0, 05q_0 Ma E_I / k$, $\delta_M = 1, 2q_0^2 - 3 \cos \theta / Re_m + 1, 5E_R Ma / Re_m$.

Для изотермической пленки двухволновое уравнение было получено в работе [8]. Наличие термокапиллярного эффекта приводит к появлению в (32) члена $\partial^3 H / \partial x^3$. Кроме того, в коэффициентах δ_M и We_M появляются дополнительные слагаемые, пропорциональные Ma .

Для того, чтобы получить дисперсионные зависимости $c(k)$, $\beta(k)$, представим волнистую поверхность пленки в виде $\hat{H} = H_a e^{ik(x-ct)+\beta t}$, где β — вещественный временной инкремент волны. Подставляя это в (32), получаем дисперсионное уравнение

$$(\beta + ik(c_1 - c))(\beta + ik(c_2 - c)) + 3(\beta + ik(3q_0 - c)) / Re_m + ik^3 Ma F + We_M k^4 = 0.$$

Отделяя вещественную и мнимую части, получаем систему уравнений для β и c :

$$\begin{aligned} & 2\beta(1, 2q_0 - c) + 3(3q_0 - c) / Re_m + Ma F k^2 = 0, \\ & \beta^2 + \beta Re_m / 3 - k^2 (c^2 - 2, 4q_0 c + \delta_M) + We_M k^4 = 0. \end{aligned}$$

Преобразуем ее относительно неизвестных $X_\beta = \beta \text{Re}_m/3 + 1/2$ и $Y_c = c - 1,2q_0$:

$$X_\beta Y_c = A/2, \quad X_\beta^2 = \xi(Y_c^2 - B) + 1/4, \quad (33)$$

здесь $\xi = (k \text{Re}_m/3)^2$, $A = 1,8q_0 + \text{Ma} \text{Re}_m k^2 F/3$, $B = 0,24q_0^2 + 3 \cos \theta / \text{Re}_m + \text{We}k^2 - \text{Ma}N$, $N = 1,5E_R / \text{Re}_m + 0,05q_0 E_I k$. Систему (33) легко свести к одному уравнению относительно X_β либо относительно Y_c . Исключая Y_c , получаем для $Z = X_\beta^2$ квадратное уравнение: $Z^2 - Z(0,25 - B\xi) - 0,25A^2\xi = 0$. Отсюда находим

$$Z = 0,5 \left(0,25 - B\xi + \sqrt{(0,25 - B\xi)^2 + A^2\xi} \right), \quad \beta = 3(-0,5 \pm \sqrt{Z}) / \text{Re}_m, \quad (34)$$

$$c = 1,2q_0 \pm A/2\sqrt{Z}.$$

Знаки + и - в (34) соответствуют двум различным модам. Первая мода (знак +) может давать неустойчивость, а вторая — всегда затухающая. При $\text{Ma} = 0$ коэффициенты A и B не зависят от c , и (34) дает аналитические зависимости $\beta(k)$ и $c(k)$. При $\text{Ma} > 0$ уравнение (34) решалось численно методом итераций.

Нейтральная кривая

В координатах (Re_m, k) область неустойчивости ограничена снизу прямой $k = 0$, сверху — нейтральной кривой, задаваемой условием $\beta = 0$. Из (33) следует, что нейтральная кривая $k_{\text{неут}}(\text{Re}_m)$ задается уравнением $A^2 = B$, т. е.:

$$\left(1,8q_0 + \text{Ma} \text{Re}_m k_{\text{неут}}^2 F/3 \right)^2 = 0,24q_0^2 + 3 \cos \theta / \text{Re}_m + \text{We}k_{\text{неут}}^2 - \text{Ma}N. \quad (35)$$

Рассмотрим асимптотику $k_{\text{неут}} \rightarrow 0$ и отбросим в выражении (35) члены более высокого порядка, чем $k_{\text{неут}}^2$. Предельные при $k \rightarrow 0$ значения F и N находим с помощью равенств (26):

$$F_0 = q_0(0,05 - 1,5P) \text{Bi} / (1 + \text{Bi})^2, \quad N_0 = \left(1,5 / \text{Re}_m + 0,05q_0^2 k^2 \text{Re}_m P \right) \text{Bi} / (1 + \text{Bi})^2,$$

здесь $P = \text{Pr}((33 - 7\text{Bi})c/120q_0 - 9/20)$. С учетом $c|_{k \rightarrow 0} = 3q_0$, получаем $P = \text{Pr}(15 - 7\text{Bi})/40$.

В асимптотике $k_{\text{неут}} \rightarrow 0$ уравнение нейтральной кривой принимает вид:

$$3 \left(q_0^2 - \frac{\cos \theta}{\text{Re}_m} \right) + \frac{1,5\text{MaBi}}{\text{Re}_m(1 + \text{Bi})^2} = k_{\text{неут}}^2 \left(\text{We} + \frac{q_0^2 \text{BiMa} \text{Re}_m}{(1 + \text{Bi})^2} (1,75P - 0,06) \right). \quad (36)$$

Рассмотрим выражение (36) для вертикальной пленки при $\text{Re}_m \rightarrow 0$. В случае $\text{Ma} = 0$ имеем известный результат $k_{\text{неут}} = \sqrt{3/\text{We}} = \text{Re}_m^{5/6} \sqrt{(9/\text{Fi})^{1/3}}$. В случае $\text{Ma} > 0$ в левой части уравнения (36) доминирует второе слагаемое, т. к. $\text{MaBi}/\text{Re}_m = \text{Ma}^* \text{Bi}^* / \text{Re}_m^{4/3} \rightarrow \infty$, а в правой части доминирует первое слагаемое, т. к. $\text{We} = (3\text{Fi})^{1/3} / \text{Re}_m^{5/3} \rightarrow \infty$. Отсюда зависимость $k_{\text{неут}}(\text{Re}_m)$ имеет вид $k_{\text{неут}} = \text{Re}_m^{1/6} \sqrt{1,5\text{Ma}^* \text{Bi}^* / (3\text{Fi})^{1/3}}$. Здесь $k_{\text{неут}} \sim \text{Re}_m^{1/6}$, поэтому при $\text{Re}_m \ll 1$ нейтральная кривая идет выше, чем в случае $\text{Ma} = 0$, когда $k_{\text{неут}} \sim \text{Re}_m^{5/6}$. Таким образом, при малых Re_m термокапиллярный эффект приводит к расширению области неустойчивости. В общем случае произвольных Re_m уравнение (35) решалось численно.

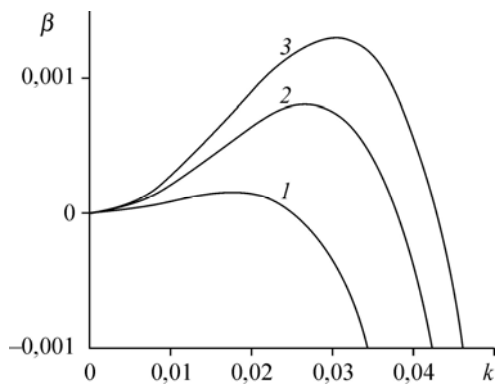


Рис. 4. Кривые $\beta(k)$ при $Re_m = 1$.
 $Ma^* = 0$ (1), 10 (2), 15 (3).

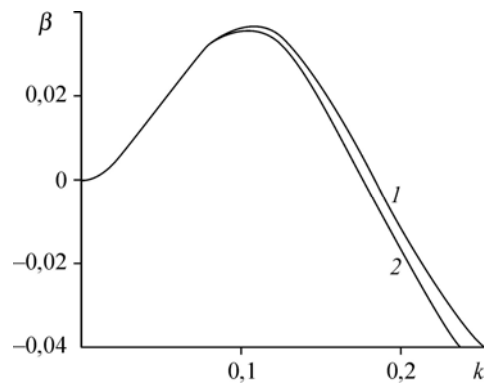


Рис. 5. Кривые $\beta(k)$ при $Re_m = 10$, $Ma^* = 50$.
По формулам (24) — 1, (30) — 2.

Результаты расчетов дисперсионных зависимостей

На рис. 4–6 приведены результаты расчетов неустойчивой моды для вертикальной пленки воды ($Pr = 7$, $Fi^{1/3} = 3270$) при $Bi^* = 1$. На рис. 4 показаны кривые $\beta(k)$ для $Re_m = 1$ и различных значений Ma^* . С увеличением Ma^* область неустойчивости расширяется, а максимальное значение инкремента растет. Отметим, что для параметров рис. 4 значения β , рассчитанные по (24) и (30), практически совпадают в области неустойчивости, где $kRe \leq 0,3$. Сравнение кривых $\beta(k)$, рассчитанных по (24) и (30), показано на рис. 5 для $Re_m = 10$ и $Ma^* = 100$. Здесь различие между кривыми довольно заметное, поскольку в области неустойчивости $kRe \sim 10$.

На рис. 6 приведены нейтральные кривые для различных значений Ma^* . Как видно из рисунка, при $Re_m > 13$ нейтральные кривые для $Ma^* > 0$ лежат ниже, чем для $Ma^* = 100$. Таким образом, при достаточно больших Re_m термокапиллярный эффект стабилизирует пленку. Этот, казалось бы, парадоксальный эффект объясняется наличием фазового сдвига между колебанием поверхности пленки и колебанием температуры поверхности. С увеличением значений Re и Ma фазовый сдвиг растет, при этом касательное напряжение направлено так, чтобы уменьшить деформацию поверхности пленки. Для сравнения на рис. 6 показаны результаты расчетов по формулам (30). Из рисунка видно, что усредненное уравнение для температуры поверхности пленки дает завышенные значения k_{neut} . Это завышение, незначительное при $kRe \leq 1$, становится существенным с увеличением параметров Re_m и Ma^* .

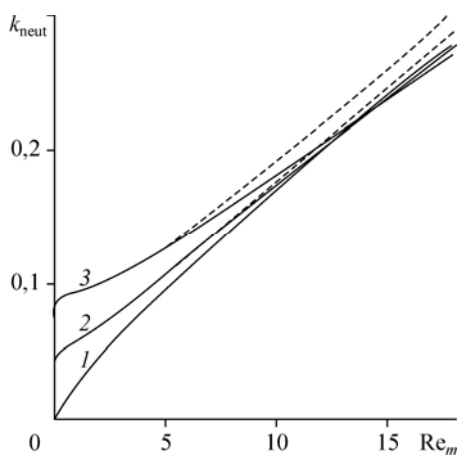


Рис. 6. Нейтральные кривые для различных значений Ma^* .

$Ma^* = 0$ (1), 30 (2), 100 (3), штриховые линии — расчет по формуле (30).

3. Численное моделирование волн в нагреваемой пленке

Было проведено численное моделирование эволюции волн с пространственным периодом l , который использован в качестве масштаба по оси x . Масштаб времени выбран $t_m = h_0 l / \text{Re}_m \nu$, остальные масштабы такие же, как в разделе 1. Волновые режимы течения пленки получены решением уравнений (7, 8) конечноразностным методом. Для этого на участке счета $0 < x < 1$ задавались распределения $h(x, 0)$ и $q(x, 0)$ в виде волны малой амплитуды H_a , наложенной на невозмущенное течение: $h(x, 0) = 1 + H_a \cos 2\pi x$, $q(x, 0) = q_0 + H_a (c \cos 2\pi x - (\beta/2\pi) \sin 2\pi x)$, здесь β и c — инкремент и фазовая скорость волны, рассчитанные из дисперсионных соотношений. На границах $x = 0$, $x = 1$ ставились условия периодичности:

$$h(0, t) = h(1, t), \quad q(0, t) = q(1, t), \quad \partial q / \partial x|_{x=0} = \partial q / \partial x|_{x=1}, \quad \partial^3 h / \partial x^3|_{x=0} = \partial^3 h / \partial x^3|_{x=1}.$$

Если значение волнового числа $k = 2\pi h_0 / l$ принадлежало области неустойчивости, начальное возмущение нарастало и эволюционировало в стационарно бегущую волну, в обратном случае возмущение затухало.

По координате x задавалась равномерная сетка с узлами $x_j = j / N_x$, $j = 0, 1, 2, \dots, N_x$ и уравнения (7) записывались в разностном виде по неявной схеме:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{q}_j - q_j}{\Delta t} = & - \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right)_j + \frac{3}{\text{Re}_m} \left(\bar{h}_j \left(\chi \sin \theta - \cos \theta \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_j \right) - \frac{\chi \bar{q}_j}{\bar{h}_j^2} - \frac{\text{Ma}}{2} \left(\frac{\partial T_s}{\partial x} \right)_j \right) + \\ & + \frac{\bar{h}_j \text{We}}{\chi^2} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right)_j, \quad \frac{\bar{h}_j - h_j}{\Delta t} = - \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)_j. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь чертой сверху обозначены значения на новом временном слое, без черты — на старом временном слое, $\chi = l / h_0$ — отношение масштабов по осям x и y . Производные по координате x аппроксимировались центральными разностями. Значения \bar{q}_j , \bar{h}_j вычислялись по схеме (37) методом итераций, для начала итераций брались значения на старом временном слое. Итерации сходятся, если шаг по времени достаточно мал и удовлетворяет условию Куранта $c\Delta t / \Delta x < 1$. На каждом шаге скорость волны c вычислялась из соотношения $q_j = ch_j + \text{const}$, $j = 0, 1, 2, \dots, N_x$ методом наименьших квадратов. Об установлении стационарной волны свидетельствовали следующие факты: 1) значения q_j и h_j во всех узлах периодически зависят от времени, 2) значения q_i , h_i для всех узлов связаны линейной зависимостью $q_j = ch_j + \text{const}$, 3) в процессе дальнейшего счета величина c не меняется.

Для уравнения (8) по координате η задавалась равномерная сетка с узлами $\eta_m = m / N_y$, $m = 0, 1, 2, \dots, N_y$. Левая часть (8) представляет собой субстанциальную производную dT/dt вдоль траектории $dx/dt = u$, $d\eta/dt = W/h$, поэтому разностное уравнение записывалось в виде $(\bar{T}_{j,m} - T_{j,m}^P) / \Delta t = \chi (\bar{T}_{j,m+1} - 2\bar{T}_{j,m} + \bar{T}_{j,m-1}) / \text{Re} h_j^2 \Delta \eta^2$ и решалось методом прогонки с использованием граничных условий (9). Здесь $T_{j,m}^P$ — температура в точке P , из которой траектория приходит в узел (j, m) на новом временном слое. Значение $T_{j,m}^P$ вычислялось из разложения в ряд Тейлора в окрестности узла (j, m) : $T_{j,m}^P = T_{j,m} - (\partial T / \partial x)_{j,m} u_{j,m} \Delta t - (\partial T / \partial \eta)_{j,m} W_{j,m} \Delta t / h_j$. Производные $(\partial T / \partial x)_{j,m}$, $(\partial T / \partial \eta)_{j,m}$ аппроксимировались разностями против потока. На границах $x = 0$, $x = 1$

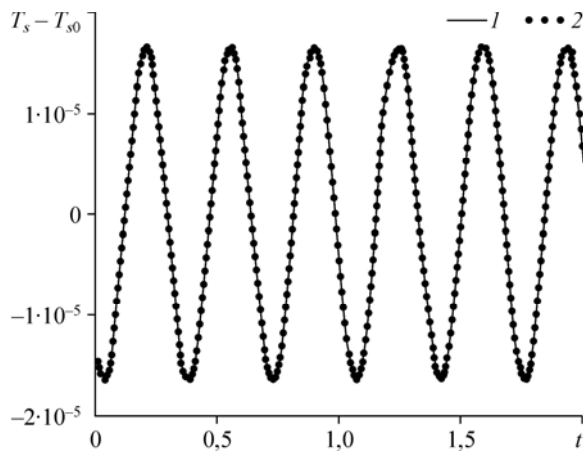


Рис. 7. 1 — возмущение температуры поверхности пленки при $l = 4,285$ мм, $Ma^* = 100$, $Re_m = 17$; 2 — расчет по формуле (13).

ставилось условие периодичности $\bar{T}_{0,m} = \bar{T}_{Nx,m}$, $m = 0, 1, 2, \dots, N_y$. Начальное распределение температуры в пленке задавалось в виде $T = T_0(\eta) + \tilde{T}(x, \eta, 0)$, где $\tilde{T}(x, \eta, 0)$ определялось из равенства (25).

Результаты расчетов эволюции волн

На рис. 7–11 приведены результаты расчетов для вертикальной пленки воды ($Pr = 7$, $Fi^{1/3} = 3270$) при $Bi^* = 1$. Расчеты показали, что эволюция волн хорошо согласуется с результатами анализа устойчивости. Если $k < k_{\text{neut}}$, то начальное возмущение нарастает, в обратном случае затухает. Рис. 7 и 8 демонстрируют эволюцию начального возмущения с длиной волны $l = 4,285$ мм и амплитудой $H_a = 10^{-4}$ при $Ma^* = 100$. На рис. 7 показана зависимость температуры поверхности пленки от времени при $x = 0$, там же приведено сравнение с выражением (13). Значения $k = 0,259$ и $Re_m = 17$ таковы, что волна близка к нейтральной, поэтому амплитуда волны растет очень медленно. На рис. 8 показаны профили возмущения температуры, рассчитанные при $x = 0$ на различные моменты времени, в сравнении с рассчитанными по уравнению (25). Как видно из графиков, результаты численного моделирования хорошо согласуются с решением уравнения (14).

Эволюция начального возмущения с длиной волны $l = 15$ мм и амплитудой $H_a = 0,05$ представлена на рис. 9 в виде зависимости от времени толщины пленки при $x = 0$, $Re_m = 18$. Значение $k = 7,546 \cdot 10^{-2}$ существенно меньше чем k_{neut} , поэтому начальное возмущение быстро эволюционирует в стационарно бегущую волну. Отметим,

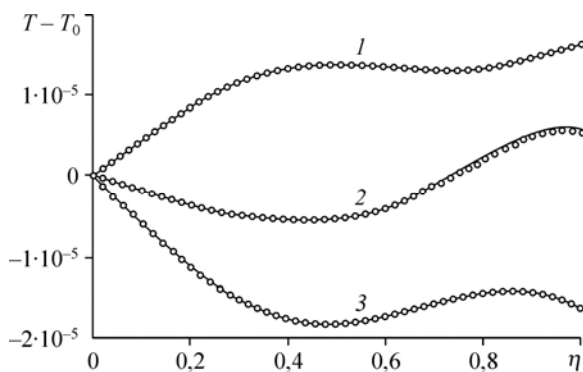


Рис. 8. Профиль возмущения температуры на различные моменты времени (сплошные линии) при $l = 4,285$ мм, $Ma^* = 100$, $Re_m = 17$.

$t = 1,25$ (1), $1,75$ (2), 2 (3); о — расчет по формуле (25).

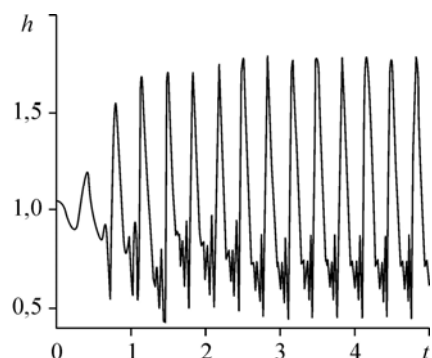


Рис. 9. Эволюция возмущения с длиной волны $l = 15$ мм при $Ma^* = 100$, $Re_m = 18$.

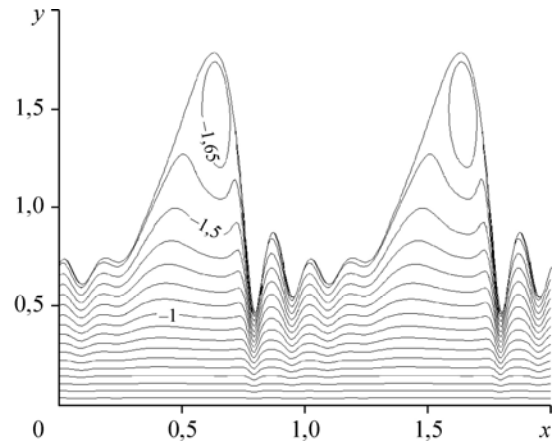
Рис. 10. Линии тока в системе отсчета, связанной с волной.

$$l = 15 \text{ мм}, \text{Ma}^* = 100, \text{Re}_m = 24,55.$$

что из условия периодичности и второго уравнения (7) следует, что средняя толщина пленки $\langle h \rangle = \left(\int_0^l h dx \right) / l$

не зависит от времени. Средний расход $\langle q \rangle = \left(\int_0^l q dx \right) / l$ изменяется в процессе эволюции волны, причем установившийся расход отличается от начального значения q_0 .

В частности, для параметров рис. 9 установившееся значение числа Рейнольдса $\text{Re} = 24,55$. На рис. 10 показаны профиль стационарной волны $h(x)$ и линии тока в системе отсчета, связанной с волной. Из рисунка видно, что вблизи гребня волны имеется зона циркуляции. Соответствующее распределение температуры показано на рис. 11. Изотермы имеют максимумы на переднем и на заднем склонах холма. Рис. 10 и 11 свидетельствуют о том, что для $\text{Re} \sim 20$ конвекция дает существенный вклад в теплоперенос как в продольном, так и в поперечном направлениях. Отметим, что линейный профиль температуры (28) подразумевает чисто кондуктивный механизм теплопереноса и не учитывает конвективного переноса. Эволюционное уравнение для температуры поверхности пленки с профилем (28), очевидно, применимо только при $\text{Re} \leq 1$.



Заключение

В рамках интегральной модели проведен линейный анализ устойчивости неизотермического течения пленки в случае заданной температуры подложки. Из уравнения энергии выведено уравнение (14) для возмущения профиля температуры и получено его решение для произвольных значений параметра $k\text{Re}$. Анализ устойчивости, основанный на уравнении (14), показал, что усредненное уравнение энергии с линейным профилем температуры неадекватно описывает температуру поверхности пленки при больших значениях $k\text{Re}$. Расчеты дисперсионных зависимостей показали, что термокапиллярный эффект не всегда приводит к расширению области неустойчивости. При больших значениях Re происходит сужение области неустойчивости. Этот эффект объясняется увеличением фазового сдвига температуры поверхности относительно деформации поверхности пленки. Расчеты эволюции волн хорошо согласуются с результатами анализа устойчивости.

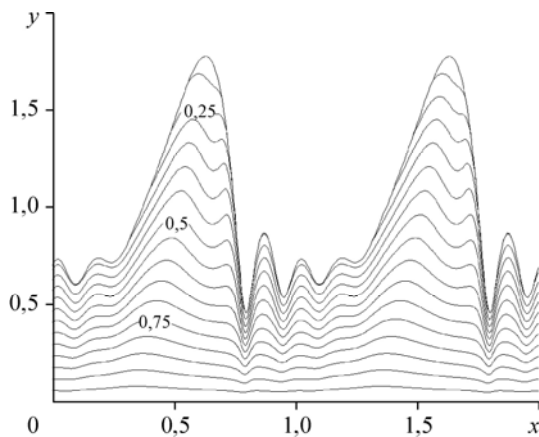


Рис. 11. Распределение температуры в стационарной волне.

$$l = 15 \text{ мм}, \text{Ma}^* = 100, \text{Re} = 24,55.$$

Список обозначений

a — температуропроводность жидкости,	q — расход жидкости в пленке,
b — коэффициент теплообмена,	$q_0 = \sin \theta$ — невозмущенный расход,
c — фазовая скорость волны,	Q — возмущение расхода,
g — ускорение свободного падения,	u, v — компоненты скорости,
h — толщина пленки,	T — температура,
H — возмущение толщины пленки,	T_w — температура пластины,
k — волновое число,	T_g — температура газа,
l — длина волны,	t — время,
p — давление,	x, y — координаты.

Греческие символы

β — инкремент волны,	σ — поверхностное натяжение,
γ — производная $d\sigma/dT$,	θ — угол наклона пластины к горизонту,
$\varepsilon = kRe$ — параметр,	ν — кинематическая вязкость жидкости,
λ — теплопроводность жидкости,	ρ — плотность жидкости,
μ — динамическая вязкость жидкости,	$\eta = y/h$ — безразмерная координата,
	τ — касательное напряжение.

Безразмерные комплексы

$Bi = bh_0/\lambda$ — число Био,	$Fi = \sigma^3/\rho^3 g v^4$ — пленочное число,
$Bi = b(3v^2/g)^{1/3}/\lambda$,	$We = (3Fi/Re_m^5)^{1/3}$ — число Вебера,
$Re = q/\nu$ — число Рейнольдса,	$Ma = \gamma T_m/\mu_m$ — число Марангони,
$Re_m = gh_0^3/3\nu^2$,	$M = kMaBi/4(1 + Bi)$,
$Pr = \nu/a$ — число Прандтля,	$Ma^* = \gamma(3/g\nu)^{2/3}(T_w - T_g)/\mu$,
	$Pe = Re_m Pr$ — число Пекле.

Индексы

s — на поверхности пленки,	m — масштабные величины,
	0 — невозмущенное течение.

Список литературы

1. Goussis D.A., Kelly R.E. Surface wave and termocapillary instabilities in a liquid film flow // J. Fluid Mech. 1991. Vol. 223. P. 24–45.
2. Kalliadasis S., Demekhin E.A., Ruyer-Quil C., Velerade M.G. Termocapillary instability and wave formation on a film falling down a uniformly heated plane // J. Fluid Mech. 2003. Vol. 492. P. 303–338.
3. Ruyer-Quil C., Scheid B., Kalliadasis S., Velerade M.G., Zeytonian R.Kh. Termocapillary long waves in a liquid film flow. Part 1. Low-dimensional formulation // J. Fluid Mech. 2005. Vol. 538. P. 199–222.
4. Scheid B., Ruyer-Quil C., Kalliadasis S., Velerade M.G., Zeytonian R.Kh. Termocapillary long waves in a liquid film flow. Part 2. Linear stability and nonlinear waves // J. Fluid Mech. 2005. Vol. 538. P. 223–244.
5. Ruyer-Quil C., Manneville P. Further accuracy and convergence results on the modeling of flows down inclined planes by weighed-residual approximations // Phys. Fluids. 2002. Vol. 14, No. 1. P. 170–183.
6. Trevelyan M.J., Scheid B., Ruyer-Quil C., Kalliadasis S. Heated falling films // J. Fluid Mech. 2007. Vol. 592. P. 295–334.
7. Шкадов В.Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 2. С. 20–25.
8. Alekseenko S.V., Nakoryakov V.E. Instability of a liquid film moving under the effect of gravity and gas flow // Int. J. Heat Mass Transfer. 1995. Vol. 38. P. 2127–2134.

Статья поступила в редакцию 11 января 2011 г.