УДК 539.5

АНАЛИЗ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ОБЩЕМ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОМ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

А. Н. Прокудин, А. А. Буренин

Институт машиноведения и металлургии Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН, 681005 Комсомольск-на-Амуре, Россия
E-mails: sunbeam_85@mail.ru, burenin@iacp.dvo.ru

Представлены результаты анализа упругопластического деформирования вращающегося сплошного цилиндра с закрепленными торцами в случае его монотонного нагружения центробежными силами. При постановке задачи используется теория малых упругопластических деформаций. Для расчета пластической составляющей деформации принимается общее кусочно-линейное условие пластичности и ассоциированный с ним закон течения. Выбранное условие пластичности зависит от параметра, который можно рассматривать в качестве характеристики материала. Найдено точное решение определяющей системы уравнений. Установлены закономерности развития пластического течения и показано, что в общем случае в цилиндре появляются шесть областей пластичности, соответствующих различным ребрам и граням поверхности, определяемой общим кусочно-линейным условием. Установлена зависимость критической скорости вращения цилиндра от параметра, входящего в условие пластичности.

Ключевые слова: вращающийся цилиндр, напряжения, деформации, упругопластичность, кусочно-линейное условие, точное решение.

DOI: 10.15372/PMTF20210507

Введение. Расчеты на прочность вращающихся цилиндров представляют значительный прикладной интерес. Использование уравнений теории упругости в таких расчетах дает достаточно консервативную оценку максимально допустимой скорости вращения. Это обусловлено тем, что вращающийся цилиндр способен сохранять эксплуатационные характеристики и после перехода в состояние пластичности. Для более точного расчета напряженно-деформированного состояния вращающихся цилиндров необходимо использовать теорию пластического течения [1]. Исследованию упругопластического деформирования вращающихся сплошных и полых цилиндров с различными условиями на боковых поверхностях и торцах посвящено большое количество работ. Для решения рассматриваемой задачи в цилиндре из идеального [2–4] или линейно упрочняющегося [5] материала использовалось условие Треска. В свою очередь в работах [6, 7] найдены решения с использованием условия максимальных приведенных напряжений для идеального и линейно упрочняющегося материалов соответственно. Заметим, что в работах [2–7] выбранное условие текучести использовалось вместе с ассоциированным законом течения. Дефор-

Работа выполнена в рамках государственного задания Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН.

мационная теория пластичности и условие текучести Мизеса применялись в работе [8] при численном расчете напряженно-деформированного состояния цилиндров из нелинейно упрочняющегося материала.

Условие Треска и условие максимальных приведенных напряжений являются частными случаями общего кусочно-линейного условия пластичности, которое имеет вид [9]

$$\begin{gathered}\sigma_1 - \frac{\alpha}{1+b}\,(b\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_t \qquad \text{при} \qquad \sigma_2 \leqslant \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha}, \\ \frac{1}{1+b}\,(\sigma_1 + b\sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_t \qquad \text{при} \qquad \sigma_2 \geqslant \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha}, \\ \alpha = \frac{\sigma_t}{\sigma_c}, \qquad b = \frac{(1+\alpha)\tau_0 - \sigma_t}{\sigma_t - \tau_0},\end{gathered} \tag{1}$$

где σ_t, σ_c, τ_0 — пределы текучести при одноосном растяжении, одноосном сжатии и сдвиге соответственно.

Условие (1) представляет собой различные условия текучести, зависящие от параметров α и b. Данные параметры определяются экспериментально, и их можно рассматривать в качестве характеристик материала. В частном случае при $\alpha = 1$ условие (1) описывает деформирование материала, пластические свойства которого при растяжении и сжатии одинаковы. При $\alpha = 1$, $b = 0$ условие (1) сводится к условию Треска, а при $\alpha = 1$, $b = 1$ — к условию максимальных приведенных напряжений. Значения параметров $\alpha = 1$, $b = (\sqrt{3} - 1)/2$ и $\alpha = 1$, $b = 1/2$ соответствуют кусочно-линейной аппроксимации условия Мизеса.

Условие максимальных приведенных напряжений использовалось в [10] при расчете упругопластических деформаций в процессе горячей посадки. Следует отметить работы, в которых получены универсальные решения упругопластических задач с использованием общего кусочно-линейного условия. В [11] рассматривался вращающийся сплошной диск. Сферические и цилиндрические оболочки под действием внутреннего давления исследовались в работах [12–14]. Условие (1) в общем виде использовалось в работах [13, 14], а его частный случай $\alpha = 1$ — в [11, 12].

Целью настоящей работы является получение решения упругопластической задачи для вращающегося цилиндра на основе общего кусочно-линейного условия. Предполагается, что пластические свойства материала цилиндра при растяжении и сжатии одинаковы ($\alpha = 1$). Постановка задачи основана на теории малых упругопластических деформаций, а решение ограничено случаем монотонного нагружения цилиндра центробежными силами.

1. Постановка задачи. Рассмотрим цилиндр бесконечной длины с внешним радиусом r_o, вращающийся вокруг собственной оси с угловой скоростью ω и остающийся симметричным в процессе деформирования. Предположим, что скорость вращения цилиндра монотонно возрастает от нуля до некоторого выбранного максимального значения. Угловым ускорением цилиндра пренебрегаем. Введем цилиндрическую систему координат (r, θ, z), ось z которой совпадает с осью симметрии цилиндра. Предполагается, что цилиндр находится в условиях обобщенной плоской деформации (осевая деформация не равна нулю, но не зависит от координаты r). Считаем, что деформации ε_{ij} цилиндра являются малыми и представляют собой сумму упругих ε_{ij}^e и пластических ε_{ij}^p деформаций. Упругая составляющая деформации вычисляется через напряжения σ_{ij} с использованием закона Гука, а пластическая — с использованием общего кусочно-линейного условия пластичности и ассоциированного с ним закона течения. С учетом сформулированных допущений единственным ненулевым перемещением в цилиндре является радиальное перемещение u_r, сдвиговые деформации и касательные напряжения равны нулю. Ниже рассматривается определяющая система дифференциальных уравнений, включающая следующие соотношения:

— кинематические соотношения

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial \beta}, \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{\beta}, \qquad \varepsilon_{zz} = \mathrm{const}, \tag{2}$$

где

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^e + \varepsilon_{rr}^p, \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^e + \varepsilon_{\theta\theta}^p, \qquad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^e + \varepsilon_{zz}^p \tag{3}$$

(индекс e соответствует упругим деформациям, индекс p — пластическим);

— соотношения между напряжениями и упругими деформациями (закон Гука)

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,((1-\nu)\varepsilon_{rr}^e + \nu\varepsilon_{\theta\theta}^e + \nu\varepsilon_{zz}^e), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,(\nu\varepsilon_{rr}^e + (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta}^e + \nu\varepsilon_{zz}^e), \\ \sigma_{zz} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,(\nu\varepsilon_{rr}^e + \nu\varepsilon_{\theta\theta}^e + (1-\nu)\varepsilon_{zz}^e) \end{aligned} \tag{4}$$

или

$$\varepsilon_{rr}^e = \sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{zz}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^e = \sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr} - \nu\sigma_{zz}, \quad \varepsilon_{zz}^e = \sigma_{zz} - \nu\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta} \tag{5}$$

(ν — коэффициент Пуассона);

— уравнение равновесия в цилиндре

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{\beta} = -\Omega\beta; \tag{6}$$

— общее кусочно-линейное условие пластичности

$$\begin{aligned} &\sigma_1 - \frac{1}{1+b}\,(b\sigma_2 + \sigma_3) = 1 \qquad \text{при} \quad \sigma_2 \leqslant \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \\ &\frac{1}{1+b}\,(\sigma_1 + b\sigma_2) - \sigma_3 = 1 \qquad \text{при} \quad \sigma_2 \geqslant \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \end{aligned} \tag{7}$$

(σ_1, σ_2, σ_3 ($\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$) — главные напряжения).

На рис. 1 показаны сечения поверхностей текучести, соответствующих условию (7), девиаторной плоскостью при различных значениях параметра b. Условие (7) сводится к условию Треска и условию максимальных приведенных напряжений при $b = 0$ и $b = 1$

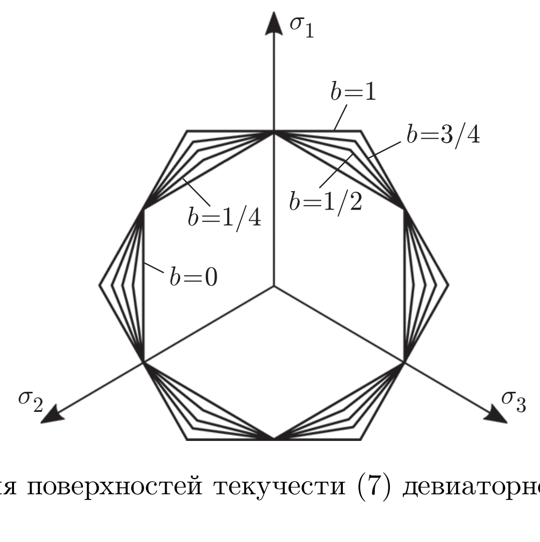


Рис. 1. Сечения поверхностей текучести (7) девиаторной плоскостью

соответственно. Параметр b зависит от отношения λ предела текучести при чистом сдвиге к пределу текучести при одноосном растяжении (сжатии):

$$b = \frac{2\lambda - 1}{1 - \lambda}, \qquad \lambda = \frac{\tau_0}{\sigma_t}$$

и определяется экспериментально. В настоящей работе предполагается, что $b \in [0, 1]$. Заметим, что только в этом случае поверхность текучести, соответствующая условию (7), является выпуклой.

Ассоциированный закон пластического течения имеет вид

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda \, \frac{df}{d\sigma_{ij}}, \tag{8}$$

где $d\varepsilon_{ij}^{p}$ — приращения пластических деформаций; $d\lambda$ — положительный множитель; f — пластический потенциал, соответствующий грани поверхности текучести (7).

Если напряженное состояние в области пластичности соответствует ребру поверхности текучести (7), то вместо закона (8) используется обобщенный ассоциированный закон пластического течения [15]

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda_1 \, \frac{df_1}{d\sigma_{ij}} + d\lambda_2 \, \frac{df_2}{d\sigma_{ij}}, \tag{9}$$

где $d\lambda_1$, $d\lambda_2$ — положительные множители; f_1, f_2 — пластические потенциалы, соответствующие граням поверхности текучести, на линии пересечения которых лежит рассматриваемое ребро.

Приведенная система уравнений (2)–(9) дополняется граничными условиями задачи. Заметим, что условие $\varepsilon_{zz} = 0$ соответствует вращающемуся цилиндру с закрепленными торцами. Если $\varepsilon_{zz} = \mathrm{const} \neq 0$, то система (2)–(9) помимо граничных условий задачи дополняется интегральным уравнением равновесия.

Определяющая система уравнений (2)–(9) записана в следующих безразмерных переменных:

$$\beta = \frac{r}{r_o}, \qquad \bar{u} = \frac{E}{\sigma_y} \frac{u_r}{r_o}, \qquad \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{E}{\sigma_y} \, \varepsilon_{ij}, \quad \bar{\varepsilon}_{ij}^{e} = \frac{E}{\sigma_y} \, \varepsilon_{ij}^{e}, \qquad \bar{\varepsilon}_{ij}^{p} = \frac{E}{\sigma_y} \, \varepsilon_{ij}^{p},$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_y}, \qquad \Omega = \frac{\rho r_o^2}{\sigma_y} \, \omega^2$$

(E — модуль Юнга; σ_y — предел текучести при одноосном растяжении-сжатии; ρ — плотность материала цилиндра). Параметр нагружения Ω будем называть скоростью вращения. Предполагаем, что Ω монотонно возрастает от нуля до выбранного максимума $\Omega_{\max}$. Далее черта над безразмерными величинами опущена.

2. Решение. В случае если используется кусочно-линейное условие пластичности, решение упругопластической задачи зависит от того, какой грани или ребру поверхности текучести соответствует напряженное состояние в области пластичности. В общем случае возможно появление нескольких областей пластичности, соответствующих разным граням и ребрам кусочно-линейной поверхности текучести. Конфигурация областей пластичности во вращающемся цилиндре зависит от типа цилиндра (сплошной или полый), граничных условий на боковых поверхностях и торцах, а также от скорости вращения. Ниже приведено общее решение для произвольной грани и произвольного ребра поверхности, определяемой общим кусочно-линейным условием (7). Ребра поверхности текучести (7) будем обозначать нечетными числами от 1 до 23, а грани — четными от 2 до 24 (рис. 2).

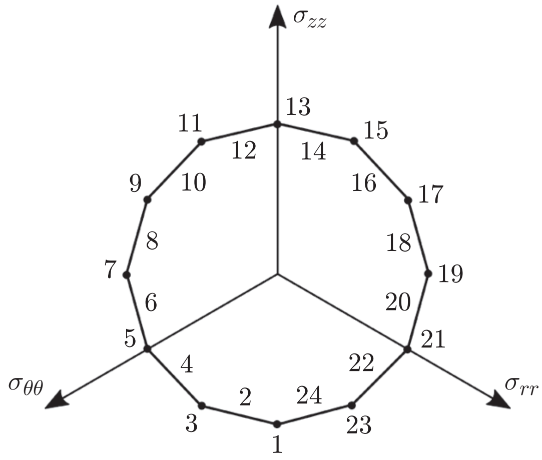


Рис. 2. Нумерация ребер и граней поверхности, определяемой условием пластичности (7)

Значения коэффициентов для граней поверхности, определяемой условием пластичности (7)

Номер грани	Напряженное состояние	Коэффициент в (10)		
		k_{rr}	$k_{\theta\theta}$	k_{zz}
2	$\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$, $\sigma_2 \geqslant (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	$b/(1+b)$	$1/(1+b)$	-1
4	$\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$, $\sigma_2 \leqslant (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	$-b/(1+b)$	1	$-1/(1+b)$
6	$\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$, $\sigma_2 \leqslant (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	$-1/(1+b)$	1	$-b/(1+b)$
8	$\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$, $\sigma_2 \geqslant (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	-1	$1/(1+b)$	$b/(1+b)$
10	$\sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$, $\sigma_2 \geqslant (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	-1	$b/(1+b)$	$1/(1+b)$
12	$\sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$, $\sigma_2 \leqslant (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	$-1/(1+b)$	$-b/(1+b)$	1
14	$\sigma_{zz} > \sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_2 \leqslant (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	$-b/(1+b)$	$-1/(1+b)$	1
16	$\sigma_{zz} > \sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_2 \geqslant (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	$b/(1+b)$	-1	$1/(1+b)$
18	$\sigma_{rr} > \sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_2 \geqslant (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	$1/(1+b)$	-1	$b/(1+b)$
20	$\sigma_{rr} > \sigma_{zz} > \sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_2 \leqslant (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	1	$-1/(1+b)$	$-b/(1+b)$
22	$\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$, $\sigma_2 \leqslant (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	1	$-b/(1+b)$	$-1/(1+b)$
24	$\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz}$, $\sigma_2 \geqslant (\sigma_1 + \sigma_3)/2$	$1/(1+b)$	$b/(1+b)$	-1

Рассмотрим произвольную грань. Запишем условие пластичности, соответствующее произвольной грани, в виде

$$k_{rr}\sigma_{rr} + k_{\theta\theta}\sigma_{\theta\theta} + k_{zz}\sigma_{zz} = 1. \tag{10}$$

Очевидно, что $k_{rr} + k_{\theta\theta} + k_{zz} = 0$. Также введем обозначение $k_{\alpha\beta} = k_{\alpha\alpha}k_{\beta\beta}$. Значения коэффициентов k_{rr}, $k_{\theta\theta}$, k_{zz} для всех 12 возможных граней поверхности, определяемой общим кусочно-линейным условием пластичности (7), приведены в таблице. Заметим, что в частном случае $b = 0$ каждая пара $n = 1, 2, \ldots, 6$ соседних граней с номерами $(4n-2, 4n)$ вырождается в грань поверхности, определяемой условием Треска. Аналогично при $b = 1$ каждая пара $n = 1, 2, \ldots 6$ соседних граней с номерами $(4n, (4n \bmod 24) + 2)$ вырождается в грань поверхности, определяемой условием максимальных приведенных напряжений.

В соответствии с ассоциированным законом из соотношения (10) получаем

$$d\varepsilon^p_{rr} = k_{rr}\, d\lambda, \qquad d\varepsilon^p_{\theta\theta} = k_{\theta\theta}\, d\lambda, \qquad d\varepsilon^p_{zz} = k_{zz}\, d\lambda.$$

В случае монотонного нагружения формулы (3) записываются в виде

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon^e_{rr} + k_{rr}\lambda, \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon^e_{\theta\theta} + k_{\theta\theta}\lambda, \qquad \varepsilon_{zz} = \varepsilon^e_{zz} + k_{zz}\lambda. \tag{11}$$

Рассмотрим два случая: 1) $k_{zz} \neq 0$; 2) $k_{zz} = 0$. Равенство $k_{zz} = 0$ означает, что рассматриваемая грань соответствует грани $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 1$ или $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1$ поверхности, определяемой условием Треска ($b = 0$).

Сначала рассмотрим грани, соответствующие случаю $k_{zz} \neq 0$. Из третьего соотношения (11) находим выражение

$$\lambda = \frac{\varepsilon^p_{zz}}{k_{zz}} = \frac{1}{k_{zz}}\,\varepsilon_{zz} - \frac{1}{k_{zz}}\,\varepsilon^e_{zz},$$

с использованием которого преобразуем первые два соотношения (11):

$$k_{zz}\varepsilon^e_{rr} - k_{rr}\varepsilon^e_{zz} = k_{zz}\varepsilon_{rr} - k_{rr}\varepsilon_{zz}, \qquad k_{zz}\varepsilon^e_{\theta\theta} - k_{\theta\theta}\varepsilon^e_{zz} = k_{zz}\varepsilon_{\theta\theta} - k_{\theta\theta}\varepsilon_{zz}. \tag{12}$$

Заметим, что из условия пластичности (10) следует выражение для осевого напряжения

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{k_{zz}} - \frac{k_{rr}}{k_{zz}}\,\sigma_{rr} - \frac{k_{\theta\theta}}{k_{zz}}\,\sigma_{\theta\theta}. \tag{13}$$

Преобразуем соотношения (12) с помощью выражения (13) и закона Гука (5). В результате получаем линейную систему, связывающую напряжения и полные деформации:

$$(k^2_{rr} + 2\nu k_{rz} + k^2_{zz})\sigma_{rr} + (k_{r\theta} - 2\nu k^2_{zz})\sigma_{\theta\theta} = k^2_{zz}\varepsilon_{rr} - k_{rz}\varepsilon_{zz} + k_{rr} + \nu k_{zz},$$
$$(k_{r\theta} - 2\nu k^2_{zz})\sigma_{rr} + (k^2_{zz} + 2\nu k_{\theta z} + k^2_{\theta\theta})\sigma_{\theta\theta} = k^2_{zz}\varepsilon_{\theta\theta} - k_{\theta z}\varepsilon_{zz} + k_{\theta\theta} + \nu k_{zz}.$$

Из решения этой системы с учетом (13) находим напряжения в цилиндре в виде функций полных деформаций:

$$\begin{gathered} \sigma_{rr} = a_{rr}\varepsilon_{rr} + a_{r\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + a_{rz}\varepsilon_{zz} + b_r, \\ \sigma_{\theta\theta} = a_{r\theta}\varepsilon_{rr} + a_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + a_{\theta z}\varepsilon_{zz} + b_\theta, \qquad \sigma_{zz} = a_{rz}\varepsilon_{rr} + a_{\theta z}\varepsilon_{\theta\theta} + a_{zz}\varepsilon_{zz} + b_z. \end{gathered} \tag{14}$$

Выражения для коэффициентов в решении (14) имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} a_{rr} = \frac{k^2_{rr} - 2(1-\nu)k_{\theta z}}{\Delta}, \qquad a_{\theta\theta} = \frac{k^2_{\theta\theta} - 2(1-\nu)k_{rz}}{\Delta}, \qquad a_{zz} = \frac{k^2_{zz} - 2(1-\nu)k_{r\theta}}{\Delta}, \\ a_{r\theta} = \frac{2\nu k^2_{zz} - k_{r\theta}}{\Delta}, \qquad a_{\theta z} = \frac{2\nu k^2_{rr} - k_{\theta z}}{\Delta}, \qquad a_{rz} = \frac{2\nu k^2_{\theta\theta} - k_{rz}}{\Delta}, \\ b_r = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\Delta}\,k_{rr}, \qquad b_\theta = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\Delta}\,k_{\theta\theta}, \qquad b_z = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\Delta}\,k_{zz}, \\ \Delta = -2(1+\nu)(1-2\nu)(k_{r\theta} + k_{rz} + k_{\theta z}). \end{gathered} \tag{15}$$

Заметим, что величина Δ всегда строго положительна, поскольку

$$k_{r\theta} + k_{rz} + k_{\theta z} = \frac{b}{(1+b)^2} - 1 < 0.$$

Докажем, что коэффициенты a_{rr}, $a_{\theta\theta}$, a_{zz} также строго положительны. Рассмотрим числитель выражения (15) для a_{rr}. Очевидно, что если коэффициенты $k_{\theta\theta}$ и k_{zz} имеют разные знаки, то $a_{rr} > 0$. В противном случае с учетом того, что $\nu \in (-1, 1/2)$ и $b \in [0, 1]$, находим

$$k^2_{rr} - 2(1-\nu)k_{\theta z} = 1 - 2(1-\nu)\,\frac{b}{(1+b)^2} > 0.$$

Из этого выражения и неравенства $\Delta > 0$ следует, что $a_{rr} > 0$. Аналогично доказывается, что $a_{\theta\theta} > 0$ и $a_{zz} > 0$.

С учетом соотношений (14), (15) запишем уравнение равновесия (6) относительно неизвестного перемещения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta}\,\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{a_{\theta\theta}}{a_{rr}}\,\frac{u}{\beta^2} = -\frac{a_{rz} - a_{\theta z}}{a_{rr}}\,\frac{\varepsilon_{zz}}{\beta} - \frac{b_r - b_\theta}{a_{rr}}\,\frac{1}{\beta} - \frac{1}{a_{rr}}\,\Omega\beta.$$

Общее решение полученного уравнения имеет вид

$$u = C_1\beta^{-\sqrt{\tau}} + C_2\beta^{\sqrt{\tau}} + \varkappa_1\beta + \varkappa_2\varepsilon_{zz}\beta - \varkappa_3\Omega\beta^3,$$
$$\tau = \frac{a_{\theta\theta}}{a_{rr}}, \qquad \varkappa_1 = \frac{b_\theta - b_r}{a_{rr} - a_{\theta\theta}}, \qquad \varkappa_2 = \frac{a_{\theta z} - a_{rz}}{a_{rr} - a_{\theta\theta}}, \qquad \varkappa_3 = \frac{1}{9a_{rr} - a_{\theta\theta}}, \tag{16}$$

где c_1, c_2 — константы интегрирования. Так как $a_{rr} > 0$ и $a_{\theta\theta} > 0$, то $\tau > 0$.

Коэффициенты в общем решении (16) целесообразно выразить через k_{rr}, $k_{\theta\theta}$, k_{zz}:

$$\tau = \frac{k_{\theta\theta}^2 - 2(1-\nu)k_{rz}}{k_{rr}^2 - 2(1-\nu)k_{\theta z}}, \qquad \varkappa_1 = -\frac{1+\nu}{k_{zz}}, \qquad \varkappa_2 = 1,$$
$$\varkappa_3 = -2\,\frac{(1+\nu)(1-2\nu)(k_{r\theta} + k_{\theta z} + k_{rz})}{(1-10\nu)k_{rr}^2 - 8(1-\nu)k_{zz}^2 - (9-10\nu)k_{\theta\theta}^2}. \tag{17}$$

Следует отметить, что выражения для перемещений (16), записанные для областей, соответствующих противоположным граням поверхности (7), различаются только третьим слагаемым.

Полные деформации определяются из (16), (17) с помощью кинематических соотношений (3). Напряжения можно найти через полные деформации по формулам (14), (15). Упругие деформации вычисляются по напряжениям с использованием закона Гука (5). Наконец, пластические деформации представляют собой разность полных и упругих деформаций.

Рассмотрим случай $k_{zz} = 0$, т. е. грани $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 1$ и $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1$ поверхности, определяемой условием Треска ($b = 0$). Запишем условие пластичности, соответствующее указанным граням:

$$k_{rr}\sigma_{rr} - k_{rr}\sigma_{\theta\theta} = 1.$$

Отсюда следует

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} - k_{rr}, \qquad \sigma_{zz} = 2\nu\sigma_{rr} - \nu k_{rr} + \varepsilon_{zz}. \tag{18}$$

Уравнение равновесия (6) принимает вид

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} + k_{rr}\,\frac{1}{\beta} = -\Omega\beta.$$

Решением этого уравнения является выражение

$$\sigma_{rr} = C_1 - k_{rr}\log\beta - \Omega\beta^2/2. \tag{19}$$

Поскольку пластическая составляющая деформации удовлетворяет условию несжимаемости, объемная деформация является чисто упругой. Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{u}{\beta} + \varepsilon_{zz} = (1-2\nu)(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}). \tag{20}$$

Используя (18), (19), находим решение уравнения (20)

$$u = C_2/\beta - \nu\varepsilon_{zz}\beta + (1+\nu)(1-2\nu)(C_1\beta + k_{rr}\beta\log\beta - \Omega\beta^3/4). \tag{21}$$

Остальные неизвестные функции вычисляются из (18), (19), (21) аналогично случаю $k_{zz} \neq 0$.

Рассмотрим произвольное ребро поверхности текучести (7). Условие пластичности для этого ребра запишем в виде

$$m_{rr}\sigma_{rr} + m_{\theta\theta}\sigma_{\theta\theta} + m_{zz}\sigma_{zz} = 1, \qquad n_{rr}\sigma_{rr} + n_{\theta\theta}\sigma_{\theta\theta} + n_{zz}\sigma_{zz} = 1. \tag{22}$$

Каждое из соотношений (22) представляет собой грань поверхности (7), поэтому коэффициенты m_{rr}, $m_{\theta\theta}$,m_{zz} и n_{rr}, $n_{\theta\theta}$, n_{zz} определяются с помощью таблицы.

Из условия пластичности (22) выразим тангенциальное и осевое напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} + \Delta_{\theta\theta}, \qquad \Delta_{\theta\theta} = -\frac{m_{zz} - n_{zz}}{m_{\theta\theta}n_{zz} - m_{zz}n_{\theta\theta}}, \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{rr} + \Delta_{zz}, \qquad \Delta_{zz} = \frac{m_{\theta\theta} - n_{\theta\theta}}{m_{\theta\theta}n_{zz} - m_{zz}n_{\theta\theta}}. \end{aligned} \tag{23}$$

С помощью (23) преобразуем уравнение равновесия (6):

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial\beta} - \Delta_{\theta\theta}\,\frac{1}{\beta} = -\Omega\beta.$$

Решением этого уравнения является выражение

$$\sigma_{rr} = C_1 + \Delta_{\theta\theta}\log\beta - \Omega\beta^2/2. \tag{24}$$

Далее преобразуем уравнение (20) с использованием (23), (24). Решение полученного уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} &u = \frac{C_2}{\beta} - \frac{1}{2}\,\varepsilon_{zz}\beta + (1-2\nu)(k_1\beta + k_2C_1\beta + k_3\beta\log\beta + k_4\Omega\beta^3), \\ &k_1 = \frac{1}{4}\,(2\Delta_{zz} - \Delta_{\theta\theta}), \qquad k_2 = \frac{3}{2}, \qquad k_3 = \frac{3}{2}\,\Delta_{\theta\theta}, \qquad k_4 = -\frac{3}{8}. \end{aligned} \tag{25}$$

Остальные функции вычисляются из (23)–(25).

Полученное решение полностью описывает напряженно-деформированное состояние в области пластичности вращающегося цилиндра, соответствующей произвольной грани или ребру поверхности, определяемой общим кусочно-линейным условием (7), и любому значению параметра $b \in [0,1]$. Поскольку в цилиндре может присутствовать одновременно несколько пластических областей, константы интегрирования C_1, C_2 необходимо вычислять отдельно для каждой области. В частности, в соответствии с условием Треска возникают четыре области пластичности во вращающемся сплошном цилиндре [2, 3] и шесть во вращающемся цилиндре с жестким включением [16]. В процессе решения конкретной задачи необходимо определять напряженное состояние в пространстве главных напряжений. В зависимости от значения радиальной координаты точки и скорости вращения имеет место либо выход напряженного состояния на поверхность текучести, либо переход напряженного состояния с грани поверхности текучести на ее ребро. Процесс вычисления констант интегрирования, границ между областями и переходных скоростей подробно описан в работах [2, 3, 6, 16], в которых использовались условия Треска и максимальных приведенных напряжений. Этот процесс применим также в случае общего кусочно-линейного условия (7).

3. Результаты расчетов. Рассмотрим вращающийся сплошной цилиндр с закрепленными торцами $\varepsilon_{zz} = 0$. Коэффициент Пуассона равен $\nu = 0{,}3$. Граничные условия имеют вид

$$u(0) = 0, \qquad \sigma_{rr}(1) = 0. \tag{26}$$

Решение упругой задачи имеет вид

$$u = \frac{D_1}{\beta} + D_2\beta - \frac{1}{8}\,\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\,\Omega\beta^3,$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{D_1}{1+\nu}\,\frac{1}{\beta^2} + \frac{D_2}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{1}{8}\,\frac{3-2\nu}{1-\nu}\,\Omega\beta^2, \tag{27}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{D_1}{1+\nu}\,\frac{1}{\beta^2} + \frac{D_2}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{1}{8}\,\frac{1+2\nu}{1-\nu}\,\Omega\beta^2, \qquad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}),$$

где D_1, D_2 — константы интегрирования.

До момента возникновения пластического течения константы интегрирования D_1, D_2 вычисляются из граничных условий (26). При этом решение (27) принимает вид

$$u = \frac{1}{8}\,\frac{3-5\nu}{1-\nu}\,\Omega\beta - \frac{1}{8}\,\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu}\,\Omega\beta^3, \qquad \sigma_{rr} = \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)}\,\Omega(1-\beta^2),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)}\,\Omega\Big(1-\frac{1+2\nu}{3-2\nu}\,\beta^2\Big), \qquad \sigma_{zz} = \frac{\nu}{2(1-\nu)}\,\Omega\Big(\frac{3-2\nu}{2}-\beta^2\Big).$$

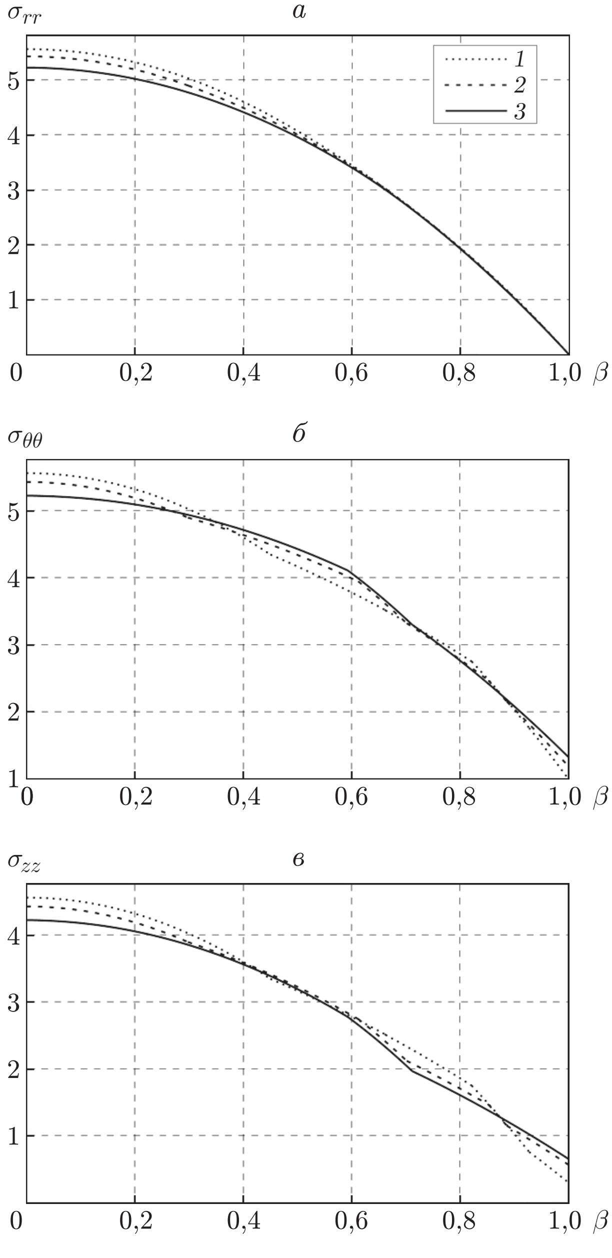
Очевидно, что $\sigma_{rr}(0) = \sigma_{\theta\theta}(0) > \sigma_{zz}(0)$. Это означает, что общее кусочно-линейное условие пластичности (7) сначала выполняется в виде условия, соответствующего ребру 1 (см. рис. 2). Следовательно, критическая скорость вращения, соответствующая моменту возникновения пластического течения, является функцией только коэффициента Пуассона ν:

$$\Omega_p = \frac{8(1-\nu)}{(3-2\nu)(1-2\nu)}.$$

Пластическое течение во вращающемся сплошном цилиндре в случаях $b = 0$ и $b = 1$ условия (7) подробно исследовано в работах [2–4, 6]. Ниже рассматриваются особенности пластического течения в случае $b \in (0,1)$. Области пластичности будем обозначать римскими цифрами I$\div$VI в порядке их появления. Границы между областями по мере удаления от оси цилиндра обозначим $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_5$.

В момент $\Omega = \Omega_p$ на оси цилиндра возникают области пластичности I и II, соответствующие ребру 1 и грани 2 поверхности текучести (7) (см. рис. 2 и таблицу). При $\Omega = \Omega_1$ на внешней поверхности цилиндра появляется область III, соответствующая грани 6. Наличие пластического течения в момент $\Omega = \Omega_2$ зависит от значения параметра b. При $b < b_t$ напряженное состояние на границе между областью II и областью упругости переходит на ребро 3 поверхности текучести (7), в результате чего возникают две новые области пластичности (напряженное состояние в них соответствует ребру 3 и грани 4). При $b > b_t$ переход напряженного состояния на ребро поверхности текучести происходит на границе между областью упругости и областью пластичности III, что приводит к появлению двух новых областей пластичности (напряженное состояние в них соответствует грани 4 и ребру 5). Установлено, что при $\nu = 0{,}3$ $b_t \approx 0{,}553$. Наконец, в момент $\Omega = \Omega_{fp}$ область упругости в цилиндре исчезает и появляется область пластичности VI, напряжения в которой соответствуют ребру поверхности текучести (7). При $b < b_t$ таким ребром является ребро 5, при $b \geqslant b_t$ — ребро 3. Решение рассматриваемой задачи существует также при значениях скорости, превышающих Ω_{fp}. Заметим, что при $\Omega = \Omega_{fp2} > \Omega_{fp}$ на внешней поверхности цилиндра возможен переход напряженного состояния на ребро 7 поверхности текучести, в результате чего на этой поверхности появляется соответствующая область пластичности. Далее полагаем $\Omega_{\max} < \Omega_{fp2}$.

На рис. 3, 4 приведены распределения напряжений и пластических деформаций в цилиндре в момент $\Omega = \Omega_{\max} = 12$ при $b = 0$; 0,5; 1,0. При $b = 0$ (условие пластичности Треска) зависимости получены с использованием результатов работ [2, 3], а при $b = 1{,}0$ (условие максимальных приведенных напряжений) — с использованием результатов работы [6]. При скорости вращения $\Omega = \Omega_{\max} = 12$ весь цилиндр находится в состоянии



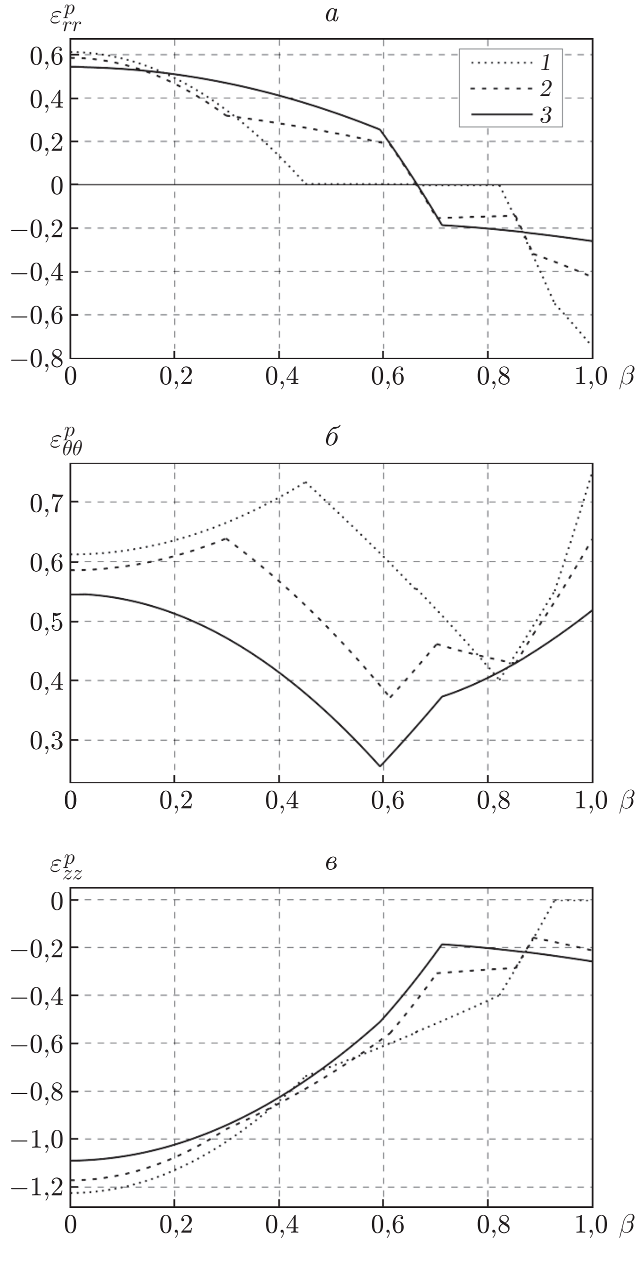


Рис. 3 Рис. 4

Рис. 3. Распределения безразмерных напряжений σ_{rr} (*а*), $\sigma_{\theta\theta}$ (*б*), σ_{zz} (*в*) в цилиндре в момент $\Omega = \Omega_{\max}$ при различных значениях параметра b: *1* — $b = 0$, *2* — $b = 0{,}5$, *3* — $b = 1{,}0$

Рис. 4. Распределения безразмерных пластических деформаций ε^p_{rr} (*а*), $\varepsilon^p_{\theta\theta}$ (*б*), ε^p_{zz} (*в*) в цилиндре в момент $\Omega = \Omega_{\max}$ при различных значениях параметра b: *1* — $b = 0$, *2* — $b = 0{,}5$, *3* — $b = 1{,}0$

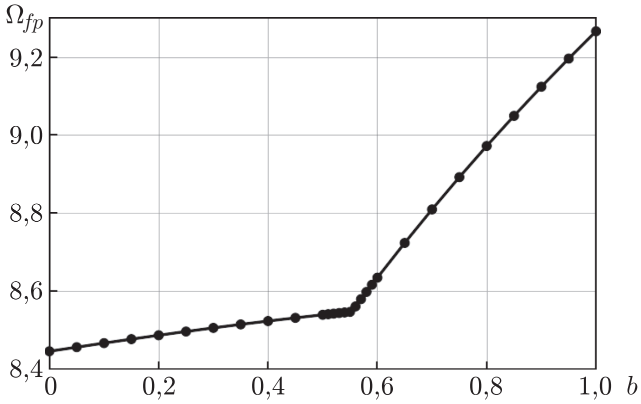


Рис. 5. Зависимость критической скорости вращения Ω_{fp} от параметра b

пластичности для любого $b \in [0, 1]$. На рис. 3 приведены зависимости безразмерных напряжений в цилиндре от безразмерного радиуса β при различных значениях параметра b. Видно, что с увеличением b радиальное напряжение (см. рис. 3,*а*) уменьшается во всем цилиндре. Для тангенциального и осевого напряжений (см. рис. 3,*б,в*) характерна более сложная зависимость от b. В окрестности оси цилиндра значения $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{zz} уменьшаются с ростом b, в то время как вблизи внешней поверхности, наоборот, увеличиваются. На рис. 4 приведены зависимости безразмерных пластических деформаций в цилиндре от величины β при различных значениях параметра b. В целом абсолютная величина пластических деформаций в цилиндре с ростом b уменьшается. Также в отдельных областях цилиндра наблюдается рост радиальной пластической деформации с увеличением b (см. рис. 4,*а*).

На рис. 5 представлена зависимость критической скорости вращения Ω_{fp}, соответствующей полному переходу цилиндра в пластическое состояние, от параметра b. Видно, что с увеличением b критическая скорость Ω_{fp} увеличивается. Следует отметить, что в интервале $b \in [0, b_t]$ увеличение Ω_{fp} незначительно, в то время как при $b > b_t$ наблюдается значительный рост Ω_{fp}. По-видимому, это обусловлено тем, что при $b > b_t$ происходит изменение характера пластического течения: в момент $\Omega = \Omega_2$ области пластичности появляются в окрестности внешней поверхности и с увеличением Ω увеличиваются в направлении к центру цилиндра, при этом увеличение внутренних областей пластичности I и II существенно замедляется. Заметим, что зависимость критической скорости Ω_{fp} вращающегося сплошного диска от параметра b является практически линейной [11].

Заключение. В работе с использованием общего кусочно-линейного условия пластичности получено решение упругопластической задачи для вращающегося сплошного цилиндра с закрепленными торцами. Решение представлено в достаточно компактном виде и легко реализуется в системах компьютерной алгебры. Полученные результаты дополняют результаты ранее опубликованных работ, в которых аналогичная задача решалась с помощью условий пластичности Треска и максимальных приведенных напряжений. Кроме того, поскольку приведенное в п. **2** решение справедливо для произвольной грани и произвольного ребра поверхности, определяемой общим кусочно-линейным условием пластичности, оно применимо и для расчета вращающихся цилиндров с любой другой комбинацией граничных и торцевых условий (цилиндр с жестким включением, полый цилиндр с закрепленными или свободными торцами и т. д.). Очевидно, что в каждом конкретном случае эволюция областей пластичности имеет свои закономерности, которые необходимо установить.

Используемый в работе подход можно обобщить на более сложные схемы нагружения (нагружение цилиндра и следующая за ним разгрузка) и более адекватные модели материала (линейное изотропное упрочнение). Также представляет интерес исследование вращающихся дисков и цилиндров, изготовленных из материалов, пластические свойства которых различны при растяжении и сжатии.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аннин Б. Д.** Упругопластическая задача / Б. Д. Аннин, Г. П. Черепанов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
2. **Gamer U., Mack W., Varga I.** Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends // Intern. J. Engng Sci. 1997. V. 35, N 3. P. 253–267.
3. **Gamer U., Sayir M.** Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft // Z. angew. Math. Phys. 1984. Bd 35, N 5. S. 601–617.
4. **Lindner T., Mack W.** Residual stresses in an elastic-plastic solid shaft with fixed ends after previous rotation // Z. angew. Math. Mech. 1998. Bd 78, N 2. S. 75–86.
5. **Eraslan A. N.** On the linearly hardening rotating solid shaft // Europ. J. Mech. A. Solids. 2003. V. 22, N 2. P. 295–307.
6. **Прокудин А. Н.** Упругопластический анализ вращающегося сплошного цилиндра при условии максимальных приведенных напряжений // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 1. С. 74–94.
7. **Прокудин А. Н., Буренин А. А.** Упругопластическое деформирование вращающегося сплошного цилиндра из линейно-упрочняющегося материала // Прикл. математика и механика. 2021. Т. 85, № 2. С. 172–192.
8. **Eraslan A. N.** Von Mises' yield criterion and nonlinearly hardening rotating shafts // Acta Mech. 2004. V. 168, N 3/4. P. 129–144.
9. **Yu M.-H.** Unified strength theory and its applications. Singapore: Springer Singapore, 2018.
10. **Буренин А. А., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А.** К расчету неустановившихся температурных напряжений в упрогопластических телах // Вычисл. механика сплош. сред. 2017. Т. 10, № 3. С. 245–259.
11. **Ma G., Hao H., Miyamoto Y.** Limit angular velocity of rotating disc with unified yield criterion // Intern. J. Mech. Sci. 2001. V. 43, N 5. P. 1137–1153.
12. **Wang L., Zhang Y.** Plastic collapse analysis of thin-walled pipes based on unified yield criterion // Intern. J. Mech. Sci. 2011. V. 53, N 5. P. 348–354.
13. **Güven U.** Effects of different limit strength on plastic strains of thick walled pressure vessels // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 2013. N 104. P. 37–42.
14. **Wang S., Zhu Q., Zhao J. H., et al.** Elastoplastic assessment of limiting internal pressure in thick-walled cylinders with different tension-compressive response // Strength Materials. 2019. V. 51, N 4. P. 508–519.
15. **Koiter W. T.** Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface // Quart. Appl. Math. 1953. V. 11, N 3. P. 350–354.
16. **Prokudin A. N.** Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion under mechanical loading and unloading // Z. angew. Math. Mech. 2020. Bd 100, N 3. e201900213.

Поступила в редакцию 2/VI 2021 г.,
после доработки — 2/VI 2021 г.
Принята к публикации 26/VII 2021 г.