

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 681.323 : 621.391.837

МОДЕЛЬ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ИНВАРИАНТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОПИСАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ

И. В. Разин

*Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина),
197376, г. Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, 5
E-mail: IVRazin@mail.eltech.ru*

Проведен анализ годографа нормированного момента энергетического спектра градиентного изображения. Показано, что преобразование матричной формы уравнения годографа к диагональному виду позволяет получить аналитические выражения для инвариантных характеристик описания изображения — главных спектральных моментов градиентных изображений. При этом поворот системы координат до совпадения ее осей с направлениями собственных векторов приводит уравнение годографа к каноническому виду. Анализ канонического уравнения, в свою очередь, позволил получить инвариантные характеристики особых точек годографа. Подмножества инвариантных характеристик описания для градиентных изображений разных порядков составляют иерархическую систему инвариантных характеристик описания исходного изображения.

Ключевые слова: градиентное изображение, энергетический спектр, нормированный момент, ковариационная матрица, собственный вектор, годограф момента, каноническое уравнение, инвариантные характеристики описания.

Введение. Согласно принятой терминологии под описанием изображения (или его объектов) понимают преобразование исходной или предварительно обработанной информации в совокупность количественных и/или качественных (лингвистических, вербальных, логических) характеристик различной сложности, необходимых для решения поставленной задачи [1–3]. В качестве таких характеристик нередко используют яркость, цвет, гистограммы распределения разнообразных параметров и их статистики, параметры, определяющие положение, ориентацию, размеры и форму контуров для предварительно сегментированных объектов, радиальные и кольцевые спектральные выборки преобразования Фурье, спектральные моменты произвольного порядка или моменты функции яркости изображения и т. д.

Из всего многообразия методов описания изображения и получаемых на их основе характеристик следует отметить преобразование Хотеллинга [1], в основу которого положена процедура определения собственных векторов ковариационной матрицы. Преобразование Хотеллинга называют методом приведения к главным компонентам (главным осям). Предлагаемый в работе метод можно считать развитием преобразования Хотеллинга. В основу его положена формализованная модель описания изображения (или его фрагмента), в качестве которой использовано уравнение нормированного момента энергетического спектра градиентного изображения произвольного порядка.

Постановка задачи. В работе [4] показано, что для любой кусочно-непрерывной функции, например энергетического спектра $G(\omega_1, \omega_2)$ изображения, принимающего ненулевые значения в конечной области частотной плоскости ω_1, ω_2 , существует момент любого порядка и множество моментов $\{m_{nk}\}$ $(n + k)$ -го порядка однозначно определяется

функцией $G(\omega_1, \omega_2)$:

$$m_{nk} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1^n \omega_2^k G(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (1)$$

И наоборот, множество моментов $\{m_{nk}\}$ однозначно определяет функцию $G(\omega_1, \omega_2)$. Но характеристики интегрального преобразования вида (1) практически не востребованы для решения широкого круга прикладных задач, поскольку не обладают свойством инвариантности к нестационарным изменениям яркости, к смещению, повороту системы координат и масштабу изображения. Однако они могут служить основой для формирования инвариантных оценок описания изображения или его фрагментов.

Следует заметить, что в литературе известно не так много интегральных инвариантов. Так, в работе [5] получены аналитические выражения для семи инвариантов, представляющих взвешенную сумму моментов функции яркости относительно исходной системы координат, а в работе [3] — аналитические выражения для двух главных моментов функции яркости. Еще шесть спектральных инвариантов приведены в [6]. Они получены из выражения для момента нормированной спектральной функции $G_{\mathbf{n}\ell}(\omega_1, \omega_2)$, ориентированного в направлении единичного вектора:

$$\mu_u^\ell(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega_u)^2 G_{\mathbf{n}\ell}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2, \quad (2)$$

где $\omega_u = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u})$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{u} ; $\boldsymbol{\omega} = i\omega_1 + j\omega_2$ — вектор пространственной частоты с компонентами ω_1 и ω_2 ; $\mathbf{u} = iu_1 + ju_2$ — единичный вектор с компонентами $u_1 = \cos \alpha$, $u_2 = \sin \alpha$, определяющими направление момента; α — угол наклона вектора \mathbf{u} относительно положительного направления оси ω_1 ;

$$G_{\mathbf{n}\ell}(\omega_1, \omega_2) = \frac{|\boldsymbol{\omega}|^{2\ell} G(\omega_1, \omega_2)}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\boldsymbol{\omega}|^{2\ell} G(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2} \quad (3)$$

— нормированный энергетический спектр изображения ($\ell = 0$), градиента ($\ell = 1$), лапласиана ($\ell = 2$) и т. д.; $|\boldsymbol{\omega}| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ — модуль вектора пространственной частоты с координатами ω_1, ω_2 .

Однако анализ выражения (2) в [6] выполнен частично. В данной работе поставлена задача более глубокого анализа уравнения (2). Решение ее позволит расширить наше знание об интегральных инвариантах и создаст предпосылки для разработки алфавита структурных элементов на основе статистик перепадов яркости анализируемого изображения.

Годограф момента энергетического спектра как формализованная модель инвариантного описания изображения. Выражение (2) представляет собой момент второго порядка положительно-определенной функции $G_{\mathbf{n}\ell}(\omega_1, \omega_2)$ относительно проходящей через начало координат частотной плоскости нормали к вектору \mathbf{u} , определяемой уравнением $\omega_u = \omega_1 \cos \alpha + \omega_2 \sin \alpha = 0$. Таким образом, ориентация момента (2) однозначно задана направлением вектора \mathbf{u} , что позволяет рассматривать его как функцию векторного аргумента и использовать для определения выражение «ориентированный в направлении единичного вектора \mathbf{u} момент функции $G_{\mathbf{n}\ell}(\omega_1, \omega_2)$ ».

Раскрывая с учетом (3) под знаком интеграла в (2) квадрат скалярного произведения, получим квадратичную форму относительно переменных u_1, u_2 :

$$\mu^\ell(\mathbf{u}) = \mu_{20}^\ell (u_1)^2 + 2\mu_{11}^\ell u_1 u_2 + \mu_{02}^\ell (u_2)^2. \quad (4)$$

В полярной системе координат (4) приводится к виду

$$\mu^\ell(\alpha) = \mu_{20}^\ell \cos^2 \alpha + 2\mu_{11}^\ell \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \mu_{02}^\ell \sin^2 \alpha, \quad (4a)$$

где

$$\mu_{20}^\ell = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2)^\ell G(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 / \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega_1^2 + \omega_2^2)^\ell G(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2, \quad (5)$$

$$\mu_{02}^\ell = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_2^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2)^\ell G(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 / \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega_1^2 + \omega_2^2)^\ell G(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2, \quad (6)$$

$$\mu_{11}^\ell = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1 \omega_2 (\omega_1^2 + \omega_2^2)^\ell G(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 / \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega_1^2 + \omega_2^2)^\ell G(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (7)$$

— нормированные центральные моменты второго порядка энергетического спектра градиентного изображения произвольного ℓ -го порядка в направлении осей ω_1, ω_2 и смешанный момент соответственно.

Несложное преобразование приводит уравнение (4a) к неявному виду уравнения шестого порядка в декартовой системе координат:

$$\mu_{20}^\ell \omega_1^2 + 2\mu_{11}^\ell \omega_1 \omega_2 + \mu_{02}^\ell \omega_2^2 - \left(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \right)^3 = 0. \quad (8)$$

Кривую (8) можно представить графически в виде радиуса-вектора, величина которого определяется выражением (4), а направление — единичным вектором \mathbf{u} . При полном его повороте вокруг начала координат конец радиуса-вектора описывает плоскую кривую, названную годографом момента нормированного энергетического спектра градиентного изображения. Можно дать следующее геометрическое определение кривой, удовлетворяющей (8): точка частотной плоскости принадлежит годографу, если сумма моментов (радиусов-векторов) в направлении осей ортогональной системы координат является величиной постоянной и не зависит от выбора ее ориентации (поворота). Пример графического представления уравнения (8) с произвольно выбранными значениями коэффициентов (5)–(7) и положительной величиной смешанного момента (7) приведен на рис. 1, *a*. На рис. 1, *b* показан пример годографа с другими значениями коэффициентов (5)–(7), отрицательной величиной (7), а также годограф модуля смешанного момента (показан пунктирной линией). На рис. 1, *c* представлены фазовые портреты приведенных на рис. 1, *b* годографов.

Изменяя порядок градиентного оператора, можно сформировать ряд подсистем первичных характеристик описания. Так, например, для исходного изображения ($\ell = 0$) выражения (5)–(7) с учетом (1) принимают соответственно вид:

$$\mu_{20}^0 = m_{20}/m_{00}; \quad \mu_{02}^0 = m_{02}/m_{00}; \quad \mu_{11}^0 = m_{11}/m_{00}. \quad (9)$$

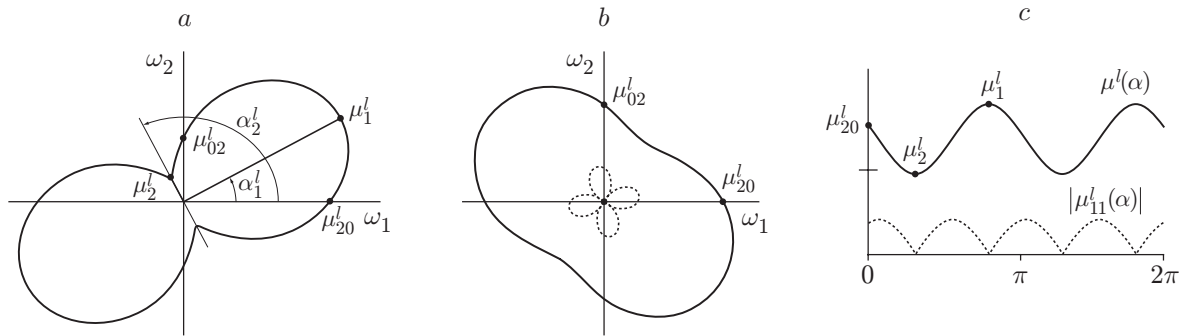


Рис. 1

Характеристики описания для градиентного изображения первого порядка ($\ell = 1$) выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}\mu_{20}^1 &= (m_{40} + m_{22}) / (m_{20} + m_{02}); \\ \mu_{02}^1 &= (m_{22} + m_{04}) / (m_{20} + m_{02}); \\ \mu_{11}^1 &= (m_{31} + m_{13}) / (m_{20} + m_{02}),\end{aligned}\quad (10)$$

а для изображения лапласиана ($\ell = 2$):

$$\begin{aligned}\mu_{20}^2 &= \frac{m_{60} + 2m_{42} + m_{24}}{m_{40} + 2m_{22} + m_{04}}; & \mu_{02}^2 &= \frac{m_{42} + 2m_{24} + m_{06}}{m_{40} + 2m_{22} + m_{04}}; \\ \mu_{11}^2 &= \frac{m_{51} + 2m_{33} + m_{15}}{m_{40} + 2m_{22} + m_{04}}; \dots\end{aligned}\quad (11)$$

Сформированная таким образом (для конечного значения ℓ) каждая подсистема первичных характеристик описания служит основой для формирования инвариантов. С этой целью представим квадратичную форму (4) в матричном виде:

$$\begin{aligned}\mu^\ell(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^2 \omega_i u_i \right)^2 G_{\text{н}\ell}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 = \\ &= [u_1, u_2] \begin{bmatrix} \mu_{20}^\ell & \mu_{11}^\ell \\ \mu_{11}^\ell & \mu_{02}^\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = [u]^T [\mu^\ell] [u],\end{aligned}\quad (12)$$

где $[\mu^\ell] = \begin{bmatrix} \mu_{20}^\ell & \mu_{11}^\ell \\ \mu_{11}^\ell & \mu_{02}^\ell \end{bmatrix}$ — ковариационная матрица, элементы которой зависят от порядка градиентного оператора ℓ и определены выражениями (9)–(11). Задача сводится к нахождению такой ортогональной матрицы, которая преобразовала бы ковариационную матрицу $[\mu^\ell]$ к диагональному виду. В основу преобразования положено решение задачи нахождения собственных векторов матрицы $[\mu^\ell]$. Корни характеристического уравнения определителя матрицы $[\mu^\ell]$ имеют вид

$$\mu_{1,2}^\ell = (\mu_{20}^\ell + \mu_{02}^\ell) \pm \sqrt{(\mu_{20}^\ell - \mu_{02}^\ell)^2 + 4(\mu_{11}^\ell)^2} / 2. \quad (13)$$

Соответствующие значениям μ_1^ℓ и μ_2^ℓ ортогональные направления собственных векторов матрицы $[\mu^\ell]$ выражены через угол их наклона относительно положительного направления оси ω_1 частотной плоскости:

$$\alpha_{1,2}^\ell = \arctg \left(\left(\mu_{02}^\ell - \mu_{20}^\ell \pm \sqrt{(\mu_{20}^\ell - \mu_{02}^\ell)^2 + 4(\mu_{11}^\ell)^2} \right) / 2\mu_{11}^\ell \right). \quad (14)$$

Преобразование матрицы $[\mu^\ell]$ к диагональному виду приводит к сокращению избыточности исходного описания изображения — в новой системе координат, ориентированной по направлениям собственных векторов, соответствующий энергетический спектр (изображения, градиента, лапласиана и т. д.) становится функцией с некоррелированными переменными. Собственные значения (13) μ_1^ℓ и μ_2^ℓ ковариационной матрицы $[\mu^\ell]$ определяют экстремальные значения спектрального момента (4) функции $G_{\text{н}\ell}(\omega_1, \omega_2)$ по направлениям собственных векторов и называются главными моментами второго порядка нормированного энергетического спектра градиентного изображения ℓ -го порядка (см. рис. 1). Это подтверждается рис. 1, с: нулевым значениям смешанного момента $\mu_{11}^\ell(\alpha)$ соответствуют экстремальные значения годографа $\mu^\ell(\alpha)$. В силу симметричности матрицы $[\mu^\ell]$ значения μ_1^ℓ и μ_2^ℓ всегда действительны и ранжированы по величине $\mu_1^\ell \geq \mu^\ell(\alpha) \geq \mu_2^\ell$.

Как видно, выражения (13), (14) порождают задаваемую порядком ℓ градиентного оператора иерархию главных нормированных моментов, ортогональных друг другу. Так, с учетом (9)–(11) выражения для главных нормированных моментов энергетического спектра изображения и их направлений ($\ell = 0$) принимают соответственно следующий вид:

$$\mu_{1,2}^0 = \left(\mu_{20} + \mu_{02} \pm \sqrt{(\mu_{20} - \mu_{02})^2 + 4\mu_{11}^2} \right) / 2, \quad (15)$$

$$\alpha_{1,2}^0 = \arctg \left[\left(m_{02} - m_{20} \pm \sqrt{(m_{20} - m_{02})^2 + 4m_{11}^2} \right) / 2m_{11} \right], \quad (16)$$

выражения (13), (14) для спектра градиента ($\ell = 1$) соответственно:

$$\mu_{1,2}^1 = \left(m_{40} + 2m_{22} + m_{04} \pm \sqrt{(m_{40} - m_{04})^2 + 4(m_{31} + m_{13})^2} \right) / 2(m_{20} + m_{02}), \quad (17)$$

$$\alpha_{1,2}^1 = \arctg \left[\left(m_{04} - m_{40} \pm \sqrt{(m_{40} - m_{04})^2 + 4(m_{31} + m_{13})^2} \right) / 2(m_{31} + m_{13}) \right], \quad (18)$$

а для спектра лапласиана ($\ell = 2$):

$$\begin{aligned} \mu_{1,2}^2 &= \frac{m_{60} + 3(m_{42} + m_{24}) + m_{06} \pm}{2(m_{40} + 2m_{22} + m_{04})} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\pm \sqrt{(m_{60} + m_{42} - m_{24} - m_{06})^2 + 4(m_{51} + 2m_{33} + m_{15})^2}}{2(m_{40} + 2m_{22} + m_{04})}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\alpha_{1,2}^2 = \arctg \left[\frac{m_{06} + m_{24} - m_{42} - m_{60} \pm}{2(m_{51} + 2m_{33} + m_{15})} \rightarrow \right]$$

$$\rightarrow \frac{\pm \sqrt{(m_{60} + m_{42} - m_{24} - m_{06})^2 + 4(m_{51} + 2m_{33} + m_{15})^2}}{2(m_{51} + 2m_{33} + m_{15})} \Big]. \quad (20)$$

Этот ряд можно продолжить, последовательно увеличивая порядок ℓ градиентного оператора на единицу.

Главные моменты позволяют определить другую важную статистическую характеристику описания спектра изображения — главные среднеквадратические пространственные частоты. Поскольку для любого ℓ нормированный энергетический спектр $G_{\mathbf{H}\ell}(\omega_1, \omega_2)$ обладает всеми свойствами двумерной функции плотности распределения частот, то нормированный момент $\mu^\ell(\alpha)$ представляет собой средний квадрат частоты энергетического спектра $G_{\mathbf{H}\ell}(\omega_1, \omega_2)$ в направлении вектора \mathbf{u} :

$$\mu^\ell(\alpha) = \left[\overline{\omega_u^2} \right]_{G_{\mathbf{H}\ell}} = \left[(\omega_1 \cos \alpha + \omega_2 \sin \alpha)^2 \right]_{G_{\mathbf{H}\ell}}.$$

В силу симметрии спектра $G_{\mathbf{H}\ell}(\omega_1, \omega_2)$ относительно начала координат частотной плоскости и симметричности пределов интегрирования в (2) момент первого порядка $\left[\overline{\omega_u} \right]_{G_{\mathbf{H}\ell}} = \left[\overline{\omega_1 \cos \alpha + \omega_2 \sin \alpha} \right]_{G_{\mathbf{H}\ell}}$ функции спектра $G_{\mathbf{H}\ell}(\omega_1, \omega_2)$ равен нулю и средний квадрат компоненты ω_u равен ее дисперсии. Но тогда корень из дисперсии частоты ω_u представляет собой среднеквадратическую частоту спектра $G_{\mathbf{H}\ell}(\omega_1, \omega_2)$ в направлении вектора \mathbf{u} :

$$\left[\sqrt{\overline{\omega_u^2(\alpha)}} \right]_{G_{\mathbf{H}\ell}} = \sqrt{\mu^\ell(\alpha)} = \sqrt{\mu_{20}^\ell \cos^2 \alpha + 2\mu_{11}^\ell \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \mu_{02}^\ell \sin^2 \alpha}.$$

Это уравнение определяет уравнение годографа среднеквадратической пространственной частоты спектра $G_{\mathbf{H}\ell}(\omega_1, \omega_2)$. Следовательно, $\sqrt{\omega_{\alpha_{1,2}}^2} = \sqrt{\mu_{1,2}^\ell}$ — два главных значения среднеквадратической частоты спектра $G_{\mathbf{H}\ell}(\omega_1, \omega_2)$ градиентного изображения в направлении (14) собственных векторов. Таким образом, для каждого фиксированного порядка оператора ℓ выражение (14) определяет на частотной плоскости два взаимно ортогональных направления с преимущественной пространственной организацией структуры градиентного изображения ℓ -го порядка по сравнению с другими направлениями.

В отличие от среднеквадратической частоты в фиксированном направлении круговая среднеквадратическая частота не зависит от направления и дает интегральную оценку степени высокочастотного характера изображения, учитывая вклад в ее величину спектральных компонент от всех направлений на частотной плоскости. Круговая среднеквадратическая частота определена как среднеквадратический модуль вектора пространственной частоты энергетического спектра:

$$\begin{aligned} \left[\sqrt{\overline{|\boldsymbol{\omega}|^2}} \right]_{G_{\mathbf{H}\ell}} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\boldsymbol{\omega}|^2 G_{\mathbf{H}\ell}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \right)^{1/2} = \\ &= \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\mathbf{H}(\ell+1)}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\mathbf{H}\ell}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2} \right)^{1/2} = \sqrt{\mu_{20}^\ell + \mu_{02}^\ell}. \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, круговая среднеквадратическая частота энергетического спектра градиентного изображения ℓ -го порядка равна корню из суммы моментов относительно осей исходной системы координат частотной плоскости.

Следствием поворота системы координат до совмещения ее с направлениями собственных векторов является приведение уравнения (4а) к канонической форме (к главным осям):

$$\mu^\ell(\beta) = \mu_1^\ell \cos^2 \beta + \mu_2^\ell \sin^2 \beta, \quad (22)$$

где β — угол, отсчитываемый от оси ω_1 системы координат, повернутой на угол α_1^ℓ (см. рис. 1). При таком преобразовании системы координат устраняется отмеченная в [3] неоднозначность, поскольку максимальный момент μ_1^ℓ всегда будет ориентирован в направлении горизонтальной оси частотной плоскости.

Уравнение (22) не содержит слагаемого со смешанным моментом. Главные моменты $\mu_{1,2}^\ell$ однозначно определяют форму кривой (22). Эта кривая в декартовой системе координат определяется уравнением шестого порядка

$$\omega_1^6 + 3\omega_1^4\omega_2^2 + 3\omega_1^2\omega_2^4 + \omega_2^6 - (\mu_1^\ell)^2\omega_1^4 - 2\mu_1^\ell\mu_2^\ell\omega_1^2\omega_2^2 - (\mu_2^\ell)^2\omega_2^4 = 0. \quad (23)$$

На рис. 2, *a* – *e* приведены графические примеры канонического уравнения годографа. Видно, что при переходе от изображения годографа на рис. 2, *a* к изображению на рис. 2, *e* форма годографа по мере увеличения момента μ_2^ℓ от нуля (см. рис. 2, *a*) до величины μ_1^ℓ (см. рис. 2, *e*) эволюционирует из «повернутой восьмерки» к окружности. Таким образом, форма его определяется только соотношением величин главных моментов и не зависит от порядка градиентного оператора. Годограф на рис. 2, *a* соответствует случаю классического анизотропного спектра, «стянутого» на ось ω_1 частотной плоскости. Для такого спектра момент в направлении ω_2 (в исходной системе координат определяется углом α_2) равен нулю. При этом уравнение (22) приводится к виду $\mu^\ell(\beta) = \mu_1^\ell \cos^2 \beta$, а (23) выражается следующим образом: $\omega_1^6 + 3\omega_1^4\omega_2^2 + 3\omega_1^2\omega_2^4 + \omega_2^6 - (\mu_1^\ell)^2\omega_1^4 = 0$. Годограф на рис. 2, *e* соответствует другому крайнему случаю изотропного спектра, когда величина момента не зависит от направления, и тогда уравнения (22), (23) приводятся к уравнению окружности с радиусом μ_1^ℓ . Качественное изменение формы годографа отражено на рис. 2, *c* и соответствует следующему соотношению между главными моментами: $\mu_2^\ell = 2\mu_1^\ell/3$. Особенность годографа на рис. 2, *c* (как и годографов на рис. 2, *d, e*) в том, что он не имеет точки перегиба (точки с нулевой кривизной). В этом принципиальное отличие его от годографов на рис. 2, *a, b*. Это равенство определяет границу раздела между изотропным и анизотропным спектрами. Нарушение равенства позволяет говорить об изотропии или анизотропии спектра, количественная оценка которых задается отношением главных моментов. Как следует из (23), годограф симметричен относительно начала координат и пересекает оси ω_1 и ω_2 частотной плоскости в точках μ_1^ℓ и μ_2^ℓ соответственно, а его главные оси (оси

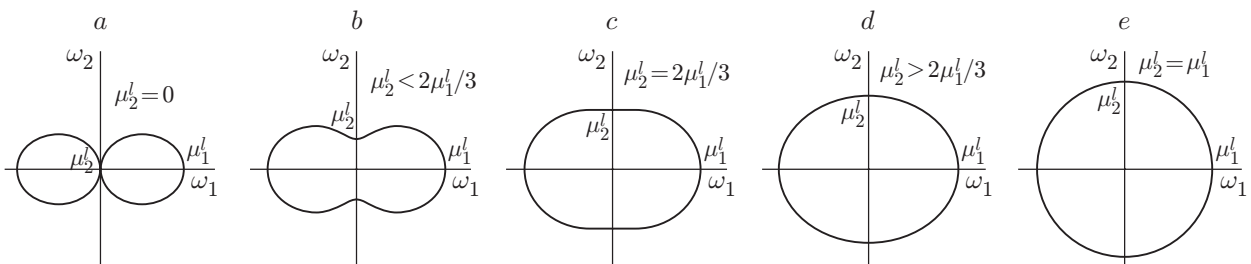


Рис. 2

симметрии) ориентированы по направлениям координатных осей. Точки пересечения кривой годографа с осями частотной плоскости являются его основными особыми точками. Анализ годографа позволил получить метрические характеристики собственно годографа и параметры его других особых точек, не изменяющихся от преобразования системы координат. Уравнение годографа, таким образом, выступает в качестве формализованной модели инвариантного описания исходного изображения.

Подсистема инвариантных оценок описания особых точек годографа. Для анализа годографа удобно использовать параметрическую форму записи его уравнения, вытекающую из (22) и позволяющую существенно упростить процедуру определения инвариантных характеристик

$$\omega_1 = (\mu_1^\ell - (\mu_1^\ell - \mu_2^\ell) \sin^2 \beta) \cos \beta, \quad (24)$$

$$\omega_2 = (\mu_1^\ell - (\mu_1^\ell - \mu_2^\ell) \sin^2 \beta) \sin \beta. \quad (25)$$

Поскольку годограф симметричен относительно начала координат, достаточно получить характеристики для первого квадранта частотной плоскости. При произвольном порядке ℓ градиентного оператора приведем подсистему инвариантов, независимых от сдвига, вращения и нестационарных изменений яркости изображения. Дадим краткие пояснения для некоторых инвариантов, смысл которых неочевиден:

- I_1^ℓ — позволяет дать приведенное выше геометрическое определение годографа (8);
- I_2^ℓ — разность полуосей годографа;
- I_4^ℓ — максимум ординаты (25) годографа;
- I_5^ℓ — абсцисса (24) годографа, соответствующая максимуму ординаты I_4^ℓ ;
- I_6^ℓ — величина радиуса-вектора в точку максимума ординаты годографа;
- I_7^ℓ — абсцисса ω_1 , соответствующая ординате годографа $\omega_2 = \mu_2^\ell$;
- I_8^ℓ — величина радиуса-вектора в точку годографа с ординатой $\omega_2 = \mu_2^\ell$;
- I_9^ℓ — максимум модуля производной ординаты годографа $d\omega_2/d\beta$ (производная выражения (25));
- I_{10}^ℓ — абсцисса ω_1 максимума модуля производной ординаты годографа I_9^ℓ ;
- I_{11}^ℓ — величина радиуса-вектора в точку максимума модуля производной ординаты годографа;
- $I_{12}^\ell - I_{14}^\ell$ — круговая, максимальная и минимальная среднеквадратические пространственные частоты нормированного энергетического спектра;
- I_{15}^ℓ — сторона эквивалентного квадрата с периметром $P(\mu_1^\ell, \mu_2^\ell)$, равным периметру годографа;
- $I_{16}^\ell = S_{\text{и}}^\ell$ — площадь (истинная), ограниченная годографом;
- $I_{17}^\ell = S_{\text{о}}^\ell$ — площадь прямоугольника, описывающего годограф;
- $I_{18}^\ell = S_{\text{в}}^\ell$ — площадь вписанного в годограф прямоугольника;
- $I_{19}^\ell, I_{20}^\ell, I_{21}^\ell$ — стороны эквивалентного квадрата с площадью, равной соответственно площади истинной $S_{\text{и}}^\ell$, площади прямоугольника, описывающего годограф, $S_{\text{о}}^\ell$ и площади прямоугольника, вписанного в него, $S_{\text{в}}^\ell$;
- $I_{20}^\ell - I_{27}^\ell$ — разности сторон эквивалентных квадратов;
- $I_{28}^\ell - I_{33}^\ell$ — отношения сторон эквивалентных квадратов;
- $I_{34}^\ell - I_{42}^\ell$ — отношения инвариантов, характеризующих анизотропные свойства спектра;

I_{42}^{ℓ} — инвариант, известный как коэффициент Ферре, представляет собой отношение истинной площади $S_{\text{и}}^{\ell}$ годографа к квадрату его периметра $P(\mu_1^{\ell}, \mu_2^{\ell})$; величина инварианта лежит в диапазоне $0,486 \leq I_{42}^{\ell} \leq 1$;

I_{43}^{ℓ} — отношение площади, ограниченной годографом, к площади прямоугольника, описывающего годограф;

I_{44}^{ℓ} — отношение площади вписанного в годограф прямоугольника к площади, ограниченной годографом;

I_{45}^{ℓ} — отношение площади вписанного в годограф прямоугольника к площади прямоугольника, описывающего годограф;

$I_{46}^{\ell} - I_{48}^{\ell}$ — отношения среднеквадратических пространственных частот: минимальной к максимальной, максимальной к круговой и минимальной к круговой соответственно;

I_{49}^{ℓ} — отношение максимума модуля производной ординаты годографа к максимальному моменту;

I_{50}^{ℓ} — отношение максимума ординаты годографа к максимуму модуля производной;

$I_{51}^{\ell}, I_{52}^{\ell}$ — синус и косинус угла соответственно, при котором кривизна годографа равна нулю (точка перегиба);

$I_{53}^{\ell} - I_{55}^{\ell}$ — абсцисса, ордината и радиус-вектор точки перегиба соответственно.

Инварианты $I_1^{\ell} - I_{27}^{\ell}, I_{53}^{\ell} - I_{55}^{\ell}$ определяют метрические характеристики годографа, а $I_{28}^{\ell} - I_{52}^{\ell}$ — различные соотношения между ними. В силу безразмерности они дополнительно инвариантны к масштабу изображения. Число инвариантных к масштабу характеристик можно расширить, если использовать отношения инвариантов, отличающихся порядком градиентного оператора: $I_i^{\ell} / I_i^{\ell+1}$. Аналитические выражения для некоторых инвариантов приведены в [7].

Увеличение порядка ℓ , применяемого к анализируемому изображению градиентного оператора, приводит к выявлению все более «тонкой» его структуры и порождает бесконечный ряд чередующихся скалярных (при ℓ четном) и векторных (при ℓ нечетном) изображений и соответствующих им энергетических спектров. Любое градиентное изображение и спектр из этого ряда могут быть описаны приведенным выше подмножеством инвариантов. Совокупность таких подмножеств образует иерархическую систему инвариантных характеристик описания анализируемого изображения, составляющих алфавит описания исходного изображения.

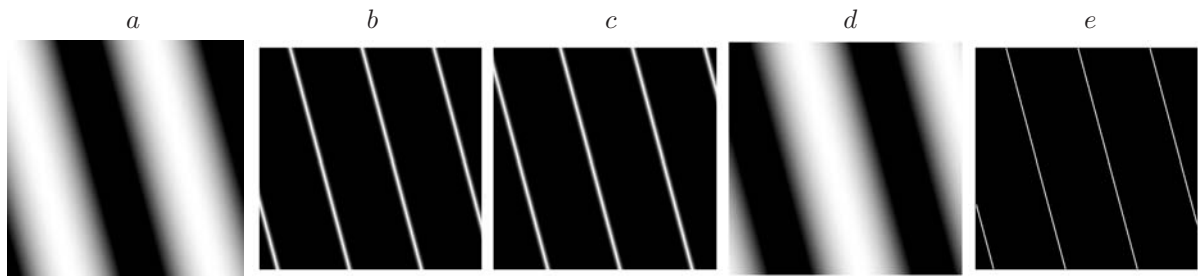
Методика проведения эксперимента и результаты численного моделирования. Спектральные моменты (5)–(7) оценивались в плоскости пространственных переменных изображения без выполнения прямого преобразования Фурье и перехода в спектральную область анализа. Методика их оценки основана на усреднении производных функции яркости изображения и приведена в работе [4]. Если операцию усреднения проводить по всей площади анализируемого изображения, то метрические характеристики представляют собой «глобальные» оценки изображения. Однако усреднение можно проводить по некоторой локальной окрестности каждого элемента изображения и формировать «скользящие» локальные оценки. Пространственный размер апертуры локализации оценок выбирают в соответствии с шириной полосы частот сигнала. Такой подход к оценке скользящих характеристик описания соответствует общей схеме анализа нестационарных сигналов на коротких интервалах (малых пространственных размерах).

Экспериментальные исследования выполнены на модельном материале — тестовых изображениях размером 512×512 элементов. Примеры их приведены на рис. 3, a —8, a . В качестве основной модели перепада яркости изображения выбрана пространственная синусоидальная волна. Ее выбор обусловлен тем, что задание амплитуды, пространственного периода и направления нормали к линиям нулевого уровня волны позволяет моделировать в широком диапазоне перепады яркости с заданной крутизной и ориентацией. Так,

на рис. 3, *a* представлено изображение пространственной синусоиды с периодом $L = 300$ элементов и нормалью с углом $\theta = 15^\circ$ относительно горизонтальной оси изображения, на рис. 4, *a* — изображение синусоиды с периодом $L = 256$ элементов и нормалью с углом $\theta = -77^\circ$. На рис. 5, *a*—8, *a* даны изображения с использованием более сложной модели перепада яркости. Такая модель представляет собой аддитивную смесь двух пространственных синусоид. На этих изображениях указаны параметры используемых пространственных синусоид. Достоинство этой модели перепада яркости в том, что она позволяет моделировать на изображении его характерные элементы, так называемые эллиптические, гиперболические и параболические точки [8]. Классификация их подчиняется известным соотношениям дифференциальной геометрии.

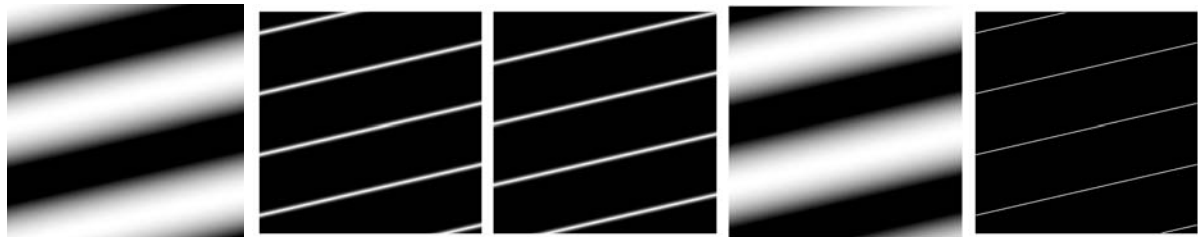
В работе приведены результаты анализа только одного инварианта I_{12}^ℓ для двух низших порядков градиентного оператора. На рис. 3, *b*—8, *b* показаны скользящие локальные оценки круговой среднеквадратической частоты $I_{12}^0 = \sqrt{\mu_1^0 + \mu_2^0} = \sqrt{\mu_{20}^0 + \mu_{02}^0}$. Для понимания физической сущности приведенных локальных оценок на рис. 3, *d*—8, *d* представлены изображения лапласиана соответствующих тестовых изображений на рис. 3, *a*—8, *a*. Лапласиан получен путем сглаживания изображения двумерной функцией Гаусса с последующим применением к результату сглаживания оператора Лапласа. Результатом применения последовательности этих операций к изображению φ будет изображение лапласиана, выраженное следующим тождественным результатом: $\nabla^2(H * \varphi) = (\nabla^2 H) * \varphi$, где $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ — оператор Лапласа; $H(x, y)$ — двумерная функция Гаусса; «*» — символ операции свертки; $\nabla^2 H$ — весовая функция фильтра, предложенного в работе [9]. Выбор $\nabla^2 H$ -фильтра для формирования лапласиана обусловлен тем обстоятельством, что он эффективно обнаруживает перепады яркости и, как следствие, точки пересечения выходным сигналом $\nabla^2 H$ -фильтра нулевого уровня. Эти точки соответствуют контурному сигналу функции яркости [10]. Проведенные в начале 80-х годов XX века нейрофизиологические исследования с очевидностью показали, что некоторые аспекты зрительного восприятия подчиняются именно математической модели $\nabla^2 H$ -фильтра. Изображения «нулей» лапласиана представлены на рис. 3, *e*—8, *e*. Сравнение изображений на рис. 3, *b*—8, *b* и на рис. 3, *e*—8, *e* позволяет заключить, что максимумы локальных оценок I_{12}^0 соответствуют «нулям» исходного изображения, т. е. его контурному сигналу. Они идентичны с той лишь разницей, что изображения на рис. 3, *b*—8, *b* полутонные, тогда как на рис. 3, *e*—8, *e* — бинарные. При этом изображения круговой среднеквадратической частоты получены с помощью дифференциальных операторов первого порядка, в то время как оператор Лапласа — дифференциальный оператор второго порядка. Таким образом, операция формирования контурного сигнала с помощью круговой среднеквадратической частоты потенциально более помехоустойчива, чем аналогичная операция локализации нулей с помощью классического фильтра Марра — Хилдрета [9].

Исследования подтвердили предположение о том, что увеличение порядка градиентного оператора позволяет выявлять более тонкую структуру исходного изображения, что иллюстрируется локальными оценками круговой среднеквадратической частоты $I_{12}^1 = \sqrt{\mu_1^1 + \mu_2^1} = \sqrt{\mu_{20}^1 + \mu_{02}^1}$ градиентного изображения, которые представлены на рис. 3, *c*—8, *c*. Видно, что максимумы оценок на изображениях рис. 3, *c* и 4, *c* соответствуют параболическим элементам (хребтам и разломам), а максимумы оценок на изображениях рис. 5, *c*, 6, *c* и 8, *c* — гиперболическим (седловидным) и эллиптическим элементам (вершинам и впадинам) функции яркости исходного изображения. На рис. 7, *c* можно наблюдать параболические и гиперболические элементы функции яркости. По сути, эти элементы соответствуют нулям более высокого порядка — нулям градиентного изображения. Полученные закономерности выявлены и на реальных изображениях.



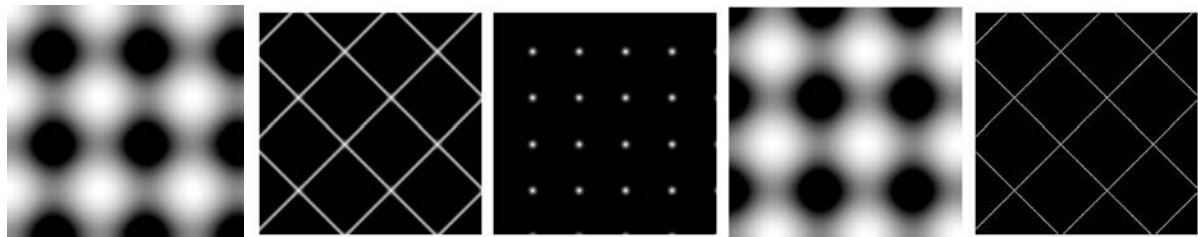
$L_1 = 300, \theta_1 = 15^\circ$

Рис. 3



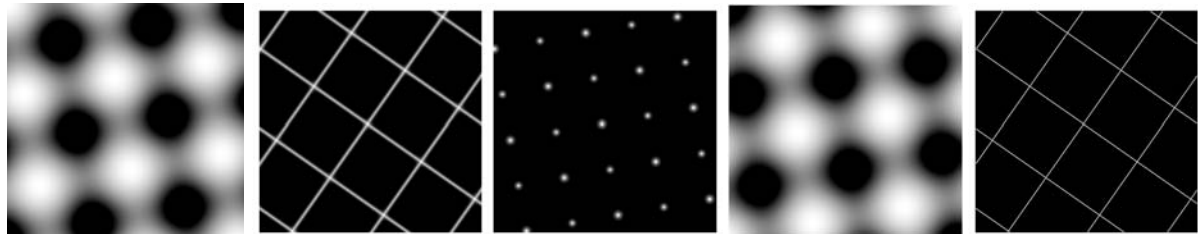
$L_1 = 256, \theta_1 = -77^\circ$

Рис. 4



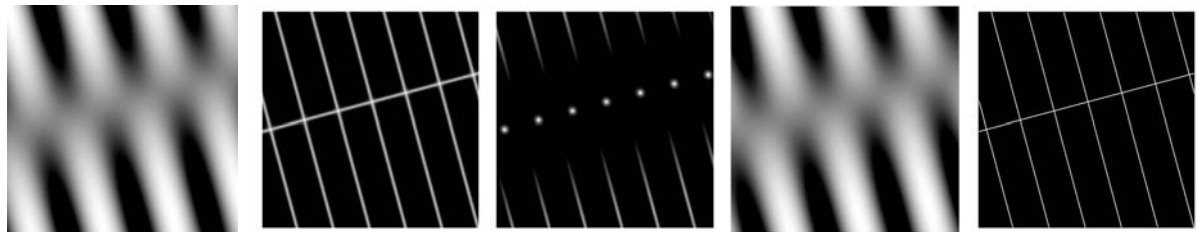
$L_1 = 200, \theta_1 = 0^\circ, L_2 = 200, \theta_2 = 90^\circ$

Рис. 5



$L_1 = 200, \theta_1 = 10^\circ, L_2 = 200, \theta_2 = -80^\circ$

Рис. 6



$L_1 = 300, \theta_1 = 7^\circ, L_2 = 300, \theta_2 = 23^\circ$

Рис. 7



$L_1 = 200, \theta_1 = 35^\circ, L_2 = 200, \theta_2 = -55^\circ$

Рис. 8

Заключение. Созданная в представленной работе математическая модель описания случайных сигналов и полей апробирована на тестовом материале, а теоретические положения работы доказаны проведенными экспериментальными исследованиями, подтвердившими инвариантность предложенных оценок описания к энергетическому масштабу сигналов и преобразованию вращения изображения. Анализ результатов исследований показал, что максимумы локальной оценки круговой среднеквадратической частоты градиентного изображения произвольного порядка соответствуют нулям исходного и дифференцированного изображений. Нули определяют алфавит структурных характеристик, служащий для построения иерархической модели описания изображения. Амплитудная информация в этом случае заменяется информацией о взаимном местоположении нулей исходного и дифференцированного сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гонсалес Р., Вудс Р.** Цифровая обработка изображений: Пер. с англ. /Под ред. П. А. Чочиа. М.: Техносфера, 2005. 1070 с.
2. **Duda R. O., Hart P. E., Stork D. G.** Pattern Classification. N. Y.: John Wiley & Sons, 2001. 738 p.
3. **Мошкин В. И., Петров А. А., Титов В. С. и др.** Техническое зрение роботов /Под общей ред. Ю. Г. Якушенкова. М.: Машиностроение, 1990. 264 с.
4. **Разин И. В., Эмдин В. С.** Оценка спектральных моментов через статистики перепадов яркости изображения // Автометрия. 2003. **39**, № 2. С. 100–107.
5. **Hu M. K.** Visual pattern recognition by moment invariants // IEEE Trans. Inform. Theory. 1962. **IT-8**, N 2. P. 179–187.
6. **Разин И. В., Эмдин В. С.** О системе инвариантов энергетического спектра градиентных изображений произвольного порядка применительно к анализу текстуры // Автометрия. 2003. **39**, № 4. С. 93–108.
7. **Разин И. В.** Иерархическая система инвариантных оценок описания изображения // Сб. докл. X Междунар. конф. по мягким вычислениям и измерениям. С.-Пб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2007. Т. 1. С. 172–175.
8. **Байкин И. А., Цуккерман И. И.** Телевидение и опознавание образов // Техника кино и телевидения. 1966. № 7.
9. **Marr D., Hildreth E.** Theory of edge detection // Proc. Royal Society of London. Ser. B. 1980. **207**, N 1167. P. 187–217.
10. **Марр Д.** Зрение. Информационный подход к изучению представления и обработки зрительных образов: Пер. с англ./ Под. ред. И. Б. Гуревича. М.: Радио и связь, 1987. 399 с.

Поступила в редакцию 29 августа 2008 г.