

УДК 532.529.5:539.24

Распространение твердых частиц в газодисперсном ограниченном закрученном потоке. Эйлерово и лагранжево описания*

М.А. Пахомов, В.И. Терехов

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

E-mails: pakhomov@ngs.ru, terekhov@itp.nsc.ru

Выполнено моделирование динамики дисперсной фазы в закрученном двухфазном потоке за внезапным расширением трубы с помощью эйлерова и полного лагранжево описаний. Несущая фаза описывается трехмерными осредненными по Рейнольдсу уравнениями Навье–Стокса с учетом обратного влияния частиц на процессы переноса в газе. Профили скорости, рассчитанные с помощью этих двух подходов, практически не отличаются. Показано, что основное отличие между эйлеровым и лагранжевым методами проявляется в профилях концентрации дисперсной фазы. Эйлеров метод предсказывает заниженное значение концентрации частиц по сравнению с лагранжевым (отличие достигает 15–20 %). Концентрация дисперсной фазы, рассчитанная по лагранжево описанию, согласуется с данными измерений несколько лучше эйлерова подхода.

Ключевые слова: двухфазный закрученный поток, твердые частицы, отрыв потока, численное моделирование, модель переноса реингольдсовых напряжений, эйлерово и полное лагранжево описания.

Введение

Закрученные ограниченные двухфазные течения широко используются для интенсификации процессов переноса в различных областях техники, например при стабилизации процесса горения в промышленных топках, для сепарации частиц в циклонах и пр. Закрученные потоки характеризуются большими локальными градиентами осредненных и пульсационных скоростей и других параметров и сопровождаются сложными гидродинамическими явлениями, возникающими за счет действия центробежной силы и силы Кориолиса [1]. Наличие рециркуляционного течения оказывает влияние на интенсивность процессов переноса импульса, теплоты и массы и в значительной мере определяет структуру турбулентного двухфазного течения [1–3]. Существенное влияние на дисперсию частиц и их смешение с газовым потоком оказывает взаимодействие частиц с турбулентностью несущей фазы. Это является важным аспектом при моделировании двухфазных турбулентных течений. Учет и корректное описание всех перечисленных факторов, оказывающих значительное влияние на формирование картины течения в закрученном двухфазном потоке при наличии внезапного расширения, довольно сложны. Поэтому

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФ (проект № 14-19-00402).

несмотря на широкое применение двухфазных закрученных течений в различных практических приложениях, процессы турбулентного переноса в таких потоках остаются недостаточно изученными.

В литературе имеется несколько работ по экспериментальному исследованию закрученных газодисперсных течений за внезапным расширением трубы, например, [4–6]. Численному исследованию таких течений посвящены работы [7–15]. В работе [10] рассматривались газодисперсные закрученные течения, была разработана модель переноса рейнольдсовых напряжений для двухфазного течения и выполнено сопоставление с данными измерений [4, 5]. Численное исследование выполнялось для двух величин параметра закрутки $S = 0,47$ (условия экспериментов [4, 5]) и 1,5. Было показано, что согласование с данными измерений по анизотропным турбулентным характеристикам газовой фазы, рассчитанной по модели переноса рейнольдсовых напряжений, заметно лучше, чем для $k-\varepsilon-k_d$ модели.

Для моделирования динамики двухфазного потока были предложены два основных способа расчета [16, 17]. Первый — эйлерово континуальное описание — так называемые двухжидкостные модели. Ко второму способу относят лагранжев траекторный подход. Оба эти метода имеют свои достоинства и недостатки и дополняют друг друга. При этом плюсы достоинства одного подхода являются недостатками другого. Для описания динамики дисперсной фазы в двухфазных турбулентных течениях, в том числе при наличии закрутки, применяются как эйлеров [7, 9, 15, 18], так и лагранжев [8, 10, 11–14, 19] подходы.

При расчете поля турбулентности несущей фазы весьма часто для инженерных расчетов применяются различные модификации двухпараметрических изотропных моделей [8–11, 14]. Такие модели турбулентности, например, $k-\varepsilon$ модель, при описании течений с закруткой и вращением имеют ряд серьезных ограничений [20]. Одним из методов, позволяющим частично учитывать сложные процессы смешения и анизотропию компонент пульсаций скорости газа в отрывных закрученных течениях, является использование моделей Second Moment Closure (SMC) [21, 22]. Для осредненных и пульсационных характеристик потока получено приемлемое согласование с данными измерений. Остается ряд сложностей при описании таких течений, связанных с неверным отрицательным знаком корреляции uw и сохранении на большом расстоянии от входа вихревой формы профиля осредненной тангенциальной компоненты скорости при малом параметре закрутки [20]. Модель переноса рейнольдсовых напряжений с успехом используется для описания турбулентных характеристик несущей фазы [15, 23–26].

К настоящему времени имеется некоторое количество работ [27–29], посвященных сравнению возможностей эйлерова и лагранжева описаний двухфазных потоков с твердыми частицами или каплями для различных типов течений. Расчеты [27, 28] отрывного газодисперсного потока за внезапным расширением плоского канала [27] и за внезапным расширением трубы [28] по уравнениям Навье–Стокса, осредненными по Рейнольдсу (RANS, Reynolds Averaged Navier–Stokes), не показали явных преимуществ одного подхода перед другим как по осредненным, так и по пульсационным параметрам двухфазного потока. В работе [29] было выполнено численное исследование динамики дисперсной фазы, турбулентности и теплообмена в турбулентном газок капельном потоке за внезапным расширением трубы с использованием эйлерова и лагранжева методов. Было показано, что основное отличие между этими подходами проявляется в профилях концентрации капель.

Таким образом, вопрос о преимуществе одного подхода перед другим при исследовании закрученных двухфазных течений при наличии внезапного расширения остается к настоящему времени открытым. В представленной работе сделана попытка получения частичного ответа на данный вопрос путем сопоставления расчетных данных с результатами известных измерений [4, 5], входящих в базу данных ERCOFTAC.

Рис. 1. Схема экспериментального стенда [4, 5].

1 — незакрученный газодисперсный поток,
2 — закрученный поток газа.

Описание методов расчета двухфазных течений

В работе проведено сравнение возможностей эйлера и лагранжева методов расчета динамики дисперсной фазы для описания закрученного турбулентного течения за внезапным расширением трубы. В лагранжевом (траекторном) подходе детерминированное движение представительного набора частиц вдоль индивидуальных траекторий (не менее нескольких тысяч) описывается в лагранжевых переменных, а несущей среды — в эйлеровых. Уравнения, описывающие движение дискретной фазы, интегрируются вдоль отдельных траекторий в вычисленном заранее поле несущей среды. Далее происходит осреднение решений по всему ансамблю полученных данных. При уменьшении размера частиц число реализаций должно возрастать, т.к. увеличивается вклад их взаимодействий с более мелкими вихрями газовой фазы. В эйлеровом (двухжидкостном) методе для обеих фаз применяются уравнения одного типа и единый численный алгоритм. Описание очень мелких частиц не вызывает никаких принципиальных трудностей, т.к. при $d \rightarrow 0$ осуществляется предельный переход течения безынерционной примеси, где d — размер дисперсной фазы.

В настоящем исследовании рассмотрена задача о динамике двухфазного закрученного турбулентного газодисперсного потока. При решении используется система стационарных RANS-уравнений, записанных с учетом обратного влияния частиц на процессы переноса в газовой фазе в осредненном и пульсационном движениях. Схематическое представление течения приведено на рис. 1. Расчеты проведены для вертикального турбулентного двухфазного течения с опускным направлением потока. Незакрученная струя смеси воздуха и стеклянных частиц (1) подается в центральный цилиндрический канал ($2R_1 = D_1$), а закрученный однофазный поток воздуха проходит через периферийный кольцевой канал ($R_3 - R_2 = (D_3 - D_2)/2$). Объемная концентрация дисперсной фазы весьма мала, она составляет $\Phi = M_d \rho / \rho_d = 1,6 \cdot 10^{-5}$, частицы достаточно мелкие ($d_1 < 100$ мкм), поэтому можно пренебречь эффектами их столкновений друг с другом. Здесь M_d — массовая концентрация частиц, ρ и ρ_d — плотность газа и материала частиц.

Следует отметить, что все нижеприведенные уравнения записаны в тензорном виде, применяемом в декартовой системе координат только с целью их компактности. Уравнения имеют форму, подходящую для описания осесимметричного течения.

Система осредненных уравнений газовой фазы

В работе используются стационарные трехмерные RANS-уравнения с учетом обратного влияния частиц на процессы осредненного и турбулентного переноса в газе:

$$\rho \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0,$$

$$\frac{\partial (U_i U_j)}{\partial x_j} = - \frac{\partial (P + 2k/3)}{\rho \partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \langle u_i u_j \rangle \right) - (U_i - U_{d,i}) \Phi \frac{\rho_d}{\tau \rho} + S_i, \quad (1)$$

здесь U_i и u_i (U, V, W и u, v, w) — аксиальные, радиальные и тангенциальные компоненты осредненных и пульсационных скоростей соответственно, ν — коэффициент кинематической вязкости, x_i — проекции на оси координат, $2k = \langle u_i u_i \rangle = \langle u^2 \rangle + \langle v^2 \rangle + \langle w^2 \rangle$ — кинетическая энергия турбулентности газовой фазы, P — давление, $\tau = \rho_d d^2 / (18\rho\nu W)$ — время динамической релаксации частиц с учетом отклонения от закона обтекания Стокса, $W = 1 + \text{Re}_d^{2/3} / 6$, $\text{Re}_d = |U - U_d| d / \nu$ — число Рейнольдса дисперсной фазы, построенной по межфазной скорости, ν — коэффициент кинематической вязкости воздуха, d — диаметр частицы, S_i — влияние закрутки потока ($S_U = 0$, $S_V = W^2 / r - \nu V / r^2 + \langle w^2 \rangle / r$, $S_W = -VW / r - \nu W / r^2 + \langle vw \rangle / r$ [20]), индекс d соответствует дисперсной фазе. Все уравнения системы (1) записаны с учетом влияния дисперсной фазы на процессы переноса импульса в газовом потоке.

Модель переноса рейнольдсовых напряжений

Турбулентность газовой фазы $\langle u_i u_j \rangle$ и скорость ее диссипации ε рассчитывались с использованием модели переноса рейнольдсовых напряжений [30, 31]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (U_k \langle u_i u_j \rangle)}{\partial x_k} &= P_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \delta_{kl} + \frac{C_\mu T_T}{\sigma_k} \langle u_k u_l \rangle \right) \frac{\partial}{\partial x_l} \langle u_i u_j \rangle - A_{d,i}, \\ \frac{\partial (U_k \varepsilon)}{\partial x_k} &= \frac{1}{T_T} (C_{\varepsilon 1} \tilde{P} - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \delta_{kl} + \frac{C_\mu T_T}{\sigma_\varepsilon} \langle u_k u_l \rangle \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} - \varepsilon_{d,i}, \\ \beta - L_T^2 \nabla^2 \beta &= 1, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь $P_{ij} = -\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ — интенсивность переноса энергии от осредненного движения к пульсационному; $\tilde{P} = 0,5P_{ii}$, $T_T = \max(k/\varepsilon; C_T \sqrt{\nu/\varepsilon})$ и $L_T = C_L \max(k^{3/2}/\varepsilon; C_\eta \sqrt{\nu^3/\varepsilon})$ — временной и геометрический макромасштабы турбулентности соответственно [30]; $\phi_{ij} = (1 - \beta^2) \phi_{ij}^W + \beta^2 \phi_{ij}^H$ — перераспределяющее слагаемое, которое описывает обмен энергией между отдельными составляющими $\langle u_i u_j \rangle$ вследствие корреляции давление–скорость деформации [30], ε — диссипация или скорость передачи энергии от крупномасштабных мелкомасштабным вихрям и β — коэффициент смешения, определяемый из эллиптического уравнения и используемый для расчета перераспределяющего слагаемого [30], он изменяется от нуля на стенке до единицы вдали от стенки, ϕ_{ij}^W — «негомогенная» часть перераспределяющего слагаемого (в пристеночной области стенки) и ϕ_{ij}^H — «гомогенная» часть перераспределяющего слагаемого (вдали от стенки) [31], индекс T соответствует турбулентному параметру. Перераспределяющее слагаемое записывается с учетом влияния двухфазности потока [25]. Последние слагаемые A_d и ε_d в правых частях уравнений системы (2) учитывают обратное влияние частиц на несущую фазу за счет пульсационного межфазного скольжения [32, 33], $A_{d,i} = \frac{2\rho_d \Phi}{\rho \tau} (1 - f_u) \langle u_i u_i \rangle$, $\varepsilon_{d,i} = \frac{2\rho_d \varepsilon}{\rho \tau} [\Phi (1 - f_\varepsilon)]$, где f_u и f_ε — коэффициенты вовлечения частиц в турбулентное движение газа [32].

Константы и функции SMC-модели турбулентности в системе (2) были приведены в работе [30]: $C_\mu = 0,22$, $C_{\varepsilon 1} = 1,44 \left[1 + 0,03(1 - \beta^2) \sqrt{\frac{k}{\langle u_i u_i \rangle n_i n_j}} \right]$, $C_{\varepsilon 2} = 1,85$, $\sigma_k = 1$, $\sigma_\varepsilon = 1,22$, $C_T = 0,161$, $C_T = 6$ и $C_\eta = 80$.

Эйлерово описание

Система осредненных уравнений, описывающих процессы переноса в дисперсной среде, имеет вид [15]

$$\frac{\partial(\Phi \rho_d U_{d,j})}{\partial x_j} = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho_d \Phi U_{d,j} U_{d,i})}{\partial x_j} + \frac{\partial(\rho_d \Phi \langle u_{d,i} u_{d,j} \rangle)}{\partial x_j} = \Phi (U_i - U_{d,i}) \frac{\rho_d}{\tau} + \Phi \rho_d g - \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\partial(\rho_d D_{d,ij} \Phi)}{\partial x_j}, \quad (3)$$

где $D_{d,ij}$ — тензор турбулентной диффузии частиц [32, 33], уравнения вторых моментов пульсаций скорости $\langle u_{d,i} u_{d,j} \rangle$ имеют тот же вид, что и в работах [32, 33]. Система уравнений (3) с соответствующими граничными условиями позволяет рассчитать движение и концентрацию дисперсной фазы в закрученном турбулентном потоке.

Полное лагранжево описание

Уравнение движения газовой фазы имеет такой же вид, как и в эйлеровом подходе. В лагранжевом методе влияние частиц на течение несущего газа реализуется с использованием подхода, изложенного в работе [34]. В этом случае переход от результатов расчетов траекторий к распределениям параметров дисперсной фазы в физическом пространстве (например, при расчете концентрации капель) осуществляется путем осреднения этих результатов по контрольному объему эйлеровой сетки, применяемой для расчета газовой фазы.

При расчетах динамики частиц обычно используется модель SSF (Stochastic Separated Fow) [35], учитывающая стохастическое влияние турбулентности газа на движение частицы. В качестве характерной скорости газа в модели при расчете используется мгновенная (актуальная) скорость газа $\tilde{U}_i = U_i + u'_i$, определяемая как сумма осредненной U_i (устанавливается непосредственно из RANS-расчета) и случайной пульсационной u'_i составляющих скорости. Случайная пульсационная величина $u'_i = \xi \sqrt{k}$ определяется с использованием гауссовой функции ξ , среднее значение которой равно нулю, а среднеквадратичное отклонение — единице. В качестве критерия генерации случайной составляющей скорости газа выбирается наименьшее из значений времени жизни вихря и времени взаимодействия частицы с турбулентным вихрем. Это означает, что газовая фаза оказывает влияние на турбулентную дисперсию частиц только в точках, соответствующих моменту начала взаимодействия вдоль всей траектории движения дисперсной фазы. Взаимодействие рассматривается как дискретный процесс, поэтому для получения статистически достоверного решения вдоль траектории дисперсной фазы необходимо проводить большое количество вычислений траекторий частиц (порядка 10^4). Простая и надежная SSF-модель использовалась в расчетах двухфазных течений различного типа, например, в работах [8, 10, 11, 27, 28]. Основной ее недостаток связан с тем, что пульсационное поле скорости газа не является непрерывным, кроме того, не учитывается тот факт, что турбулентные пульсации являются коррелированными во времени и пространстве [36].

Существует ряд модифицированных SSF-моделей, например, ISSF (Improved Stochastic Separated Flow) [36], основное отличие которой от модели-SSF [35] заключается в использовании значительно меньшего количества расчетных частиц (порядка $10^2 \div 10^3$) и в том, что межфазное взаимодействие представляет собой непрерывный процесс. При этом в уравнениях движения используется осредненная скорость фаз. Случайные среднеквадратичные пульсации дисперсной фазы рассчитываются вдоль стохастической траектории, что позволяет сохранить стохастический характер движения дисперсной фазы. Данный подход был использован авторами настоящей работы в исследовании [29] при сравнении эйлерова и лагранжева методов при описании двухфазных отрывных течений без закрутки.

Расчет положения и скорости дисперсной фазы лагранжевым методом

Координаты x_d и компоненты скорости дисперсной фазы U_d рассчитываются по уравнениям:

$$\frac{dx_d}{dt} = \tilde{U}_d, \quad (4)$$

$$m_d \frac{d\tilde{U}_d}{dt} = F_D + F_P + F_S + F_g, \quad (5)$$

где $x_{d,i}$ — компоненты координаты частицы, определенной вдоль стохастической траектории, \tilde{U}_d — мгновенная скорость дисперсной фазы, $m_d = \rho_d \pi d^3 / 6$ — масса частицы; ρ_d и d — ее диаметр и плотность материала соответственно, F_D — сила аэродинамического сопротивления, F_P — сила, учитывающая градиент давления несущей среды, F_S — сила Сэффмена, F_g — сила тяжести. Влиянием вращения частиц, сил присоединенной массы и Бассе на динамику движения частицы в уравнении (5) можно пренебречь. Сила аэродинамического сопротивления определяется по формуле $F_D = 1/8 \cdot \rho d^2 C_D (U_S - \tilde{U}_d) |U_S - \tilde{U}_d|$, здесь $C_D = \frac{24}{Re_d} (1 + 0,15 Re_d^{2/3})$ — коэффициент сопротивления твердой сферы при $Re_d < 1000$, записанный с учетом отклонения от закона обтекания Стокса; $Re_d = d |U_S - \tilde{U}_d| / \nu$ — число Рейнольдса дисперсной фазы, ρ , ν — плотность и кинематическая вязкость газовой фазы; $U_S = U(x_p(t), t)$ — скорость газа в точке расположения твердой частицы.

Градиент давления несущей среды F_P , радиальная сила (сила Сэффмена) F_S [37] и сила тяжести F_g рассчитываются по соотношениям:

$$F_P = -m_d \frac{\rho}{\rho_d} \cdot \frac{DU}{Dt}, \quad F_S = 1,615 d^2 \rho (U_S - \tilde{U}_d) \sqrt{\nu \left| \frac{dU}{dx} \right|}, \quad F_g = m_d g.$$

Пульсационная скорость частицы определяется из алгебраического соотношения, представленного в работе [38]:

$$\langle u_{d,i} u_{d,j} \rangle = f_u \langle u_i u_j \rangle = \frac{\Omega_{LP}}{\tau + \Omega_{LP}} \langle u_i u_j \rangle, \quad (6)$$

где Ω_{LP} — время взаимодействия частицы с энергоемкими флуктуациями газовой фазы [32, 33]. Для случая малоинерционных частиц можно считать, что $\Omega_{LP} \approx \Omega_L$ [32, 33], тогда $\langle u_{d,i} u_{d,j} \rangle \approx \frac{\Omega_L}{\tau + \Omega_L} \langle u_i u_j \rangle$, где $\Omega_L = 0,482 k / \varepsilon$ — турбулентный временной масштаб [39].

Расчет скорости газовой фазы в точке расположения частицы

Для моделирования скорости газовой фазы в точке расположения частицы применяется подход [40]

$$\mathbf{U}_{S,i} = \mathbf{U}_i + \mathbf{u}_{S,i}, \quad (7)$$

где \mathbf{U}_i и $\mathbf{u}_{S,i}$ — соответственно осредненная (определяется из RANS-расчета) и пульсационная скорости газа в точке расположения частицы. В англоязычной литературе для этого параметра используется название «dispersion modeling» [39–42]. Одним из способов его расчета является модель Continuous Random Walk (см. [41]):

$$u_{S,i}^m = a_{ij} u_{d,j}^{m-1} + b_{ij} \zeta_j + A_i \Delta t, \quad \zeta_i \in N(0, 1), \quad (8)$$

здесь надстрочный символ m относится к текущему временному шагу, $N(0, 1)$ — случайная гауссова величина, имеющая распределение со средним значением, равным нулю, и среднеквадратичным отклонением, равным единице, \mathbf{A} — вектор скорректированного смещения, Δt — временной шаг. Тензоры смещения \mathbf{a} и диффузии \mathbf{b} определяются из следующих соотношений, приведенных в работе [40]:

$$a_{ij} = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{S,i}}\right) \delta_{ij}, \quad b_{ik} b_{jk} = (1 - a_{ii} a_{jj}) u_{ij}.$$

При расчете турбулентных масштабов в дисперсионном моделировании используются соотношения, приведенные в [42]: $\tau_{S,\parallel} = \frac{(\beta^* / \beta) \Omega_L}{1 + m \beta^* \zeta}$, $\tau_{S,\perp} = \frac{(\beta^* / \beta) \Omega_L}{1 + 2m \beta^* \zeta}$, где

$$\beta^* = \left[(1 + \tau / \Omega_L)^{-0,5} (\beta^{-1} - 1) + 1 \right]^{-1} \text{ и } \zeta = \frac{U - U_d}{\sqrt{u_i u_j}}, \text{ здесь } m = 1 \text{ — структурный параметр,}$$

$\beta = 0,356$ [40], $i = \parallel$ и $i = \perp$ — направления параллельное и перпендикулярное $U - U_d$ соответственно.

Для расчета компонент вектора скорректированного смещения \mathbf{A} применяются соотношения, приведенные в работе [43]: $\mathbf{A} = \frac{1}{1 + St_d} \left[\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \langle u_i u_j \rangle) \right]$, где $St_d = \frac{\tau}{1/7(k/\varepsilon)}$ — число Стокса в крупномасштабном турбулентном движении.

Расчет концентрации частиц

Важной стороной эйлерово-лагранжева описания является расчет концентрации дисперсной фазы. Для этого используются процедуры пространственного [34] или пространственно-временного [35] осреднения результатов по всем траекториям частиц по контрольному объему эйлеровой сетки, используемой для расчета поля газовой фазы.

Другой подход к расчету параметров дисперсной фазы состоит в использовании так называемого полного лагранжева метода [44]. Данный метод основан на привлечении дополнительных уравнений для компонентов якобиана перехода от эйлеровых к лагранжевым переменным. Концентрация дисперсной фазы вычисляется из уравнения неразрывности, записанного в лагранжевой форме. Основным преимуществом этого подхода является то, что все параметры дисперсной фазы, включая концентрацию, находятся из решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений на выбранных траекториях частиц. Данный подход исключает необходимость проведения осреднения траекторий частиц по малому физическому контрольному объему, приводит к существенному уменьшению необходимого числа траекторий частиц и снимает практически неразрешимый вопрос об инвариантности полученного решения относительно формы и размера применяемой вычислительной сетки. Он и будет использован авторами в настоящей работе.

Система уравнений для определения параметров частиц на фиксированной траектории состоит из уравнения неразрывности для массы частиц, записанного с учетом парообразования на поверхности испаряющихся капель, уравнений движения частиц, записанных в лагранжевых переменных, и дополнительных уравнений для нахождения компонент якобиана в уравнении неразрывности [44]. Алгебраическое уравнение баланса численной концентрации дисперсной фазы n в лагранжевых переменных имеет вид:

$$n = n_0 / |J_{EL}|, \quad (9)$$

где n — численная концентрация частиц в текущий момент времени, n_0 — численная концентрация частиц в момент времени $t = 0$ и $|J_{EL}|$ — модуль якобиана при переходе от эйлеровых к лагранжевым координатам [44].

Уравнения (4–9) численно интегрируются вдоль траекторий движения частицы. Компоненты осредненной скорости дисперсной фазы в системе уравнений (5) рассчитываются с учетом (7). Численная концентрация частиц вычисляется из уравнения (9). Граничные условия для якобиана в случае двумерного стационарного течения двухфазного потока рассматривались в работе [45].

Методика численной реализации

Методика численной реализации подробнее описана в работах [15, 29]. Компоненты рейнольдсовых напряжений газовой фазы определялись согласно подходу, предложенному в работе [46]. Все расчеты проводились на сетке $200 \times 80 \times 80 = 1,28 \cdot 10^6$ контрольных объемов. Дальнейшее увеличение их числа не оказывает существенного влияния на результаты численных расчетов. Длина вычислительного домена составляла $X = 1$ м.

На оси трубы в эйлеровой постановке ставились условия плавности сопряжения для обеих фаз. Для дисперсной фазы на стенке канала использовались граничные условия, описанные в [33]. Как и в работах [15, 29], считалось, что частицы отражаются от стенки с коэффициентом восстановления 0,8. В выходном сечении задавались условия равенства нулю производных всех искомых параметров в аксиальном направлении. Входные распределения параметров задавались с использованием экспериментальных данных [4, 5]. В случае отсутствия необходимых результатов измерений они определялись исходя из предположения о равномерном распределении искомых параметров по сечению трубы. Для определения начальных значений радиальных осредненных скоростей фаз были использованы соотношения для закона вращения твердого тела, приведенные в работе [9]: $V_1 = 4S U_{m1} r / R$, $V_{d1} = 4S_d U_{d1} r / R$, где $S = \int_0^{R_3} \rho U_1 W_1 r^2 dr / \int_0^{R_3} \rho U_1^2 r dr$ — параметр закрутки воздушного потока и $S_d = \int_0^{R_3} \rho_d U_{d1} W_{d1} r^2 dr / \int_0^{R_3} \rho_d U_{d1}^2 r dr$ — параметр закрутки потока дисперсной фазы.

На первом этапе проводились сопоставления с данными измерений [47] для однофазного воздушного закрученного потока в трубе с внезапным расширением. Было получено хорошее согласование между расчетными и измеренными данными по осредненным и пульсационным характеристикам (отличие не превышало 15 %), что послужило основой для проведения расчетов двухфазного газодисперсного потока с применением модели переноса рейнольдсовых напряжений.

Анализ полученных результатов и их обсуждение

Численные расчеты выполнялись для условий измерений [4, 5]. Геометрия экспериментального участка была следующей: $2R_1 = D_1 = 32$ мм, $2R_2 = D_2 = 38$ мм, $2R_3 = D_3 = 64$ мм, $2R_4 = D_4 = 70$ мм и $2R_5 = D_5 = 194$ мм, высота ступеньки составляла $H = 65$ мм (см. рис. 1).

Рис. 2. Изменение объемной концентрации дисперсной фазы вдоль оси трубы.

Непрерывные линии — эйлерово описание, штриховые линии — полный лагранжев подход; $M_d = 0,034$, $S = 0,47$; $d = 30$ (1), 45 (2), 100 (3) мкм.

Основная незакрученная струя смеси газа и стеклянных частиц входила через осевое отверстие, закрученная воздушная струя подавалась через кольцевое отверстие. Массовый расход основной струи газа G_1 равнялся 9,9 г/с, вторичной кольцевой струи G_2 — 38,3 г/с.

Параметр закрутки потока изменялся в диапазоне $S = 0-1$. Число Рейнольдса $Re = U_m 2R_3/\nu = 5,24 \cdot 10^4$, средняя начальная скорость потока воздуха $U_{m1} = 12,9$ м/с, диаметр стеклянных частиц варьировался в диапазоне $d = 30-100$ мкм, их массовая концентрация $M_d = 0,034$. Температура воздуха и частиц составляла 300 К, плотность газа — $\rho = 1,18$, плотность частиц — $\rho_d = 2500$ кг/м³. Критерием, характеризующим степень вовлечения частиц в движение газовой фазы, является число Стокса в осредненном движении: $Stk = \tau/\tau_f$, где τ_f — турбулентный временной макромасштаб. По данным работы [48] $\tau_f = 5H/U_{m1} = 0,025$ с, с учетом того, что $\tau = 6,9 \cdot 10^{-3} - 0,01$, получим $Stk \approx 0,3-3$; это говорит о том, что частицы могут как хорошо вовлекаться в турбулентное движение газа при $Stk < 1$, так и не взаимодействовать с ним при $Stk > 1$ [49].

Профили осредненных компонент скорости и дисперсной фазы при расчетах скоростей компонент дисперсной фазы по эйлерову и лагранжевым подходам практически не отличаются друг от друга, что согласуется с более ранними расчетами авторов по закрученному двухфазному течению за внезапным расширением трубы [29]. Поэтому в настоящей работе они не представлены.

На рис. 2 и 3 приведены данные численных расчетов распределения объемной концентрации дисперсной фазы вдоль оси трубы (рис. 2) и в нескольких сечениях от положения сечения отрыва потока (рис. 3) в зависимости от изменения диаметра частиц. Здесь Φ_0 , Φ и Φ_1 — объемные концентрации частиц на оси трубы в рассматриваемом контрольном объеме и во входном сечении соответственно. Разница в размере дисперсных частиц приводит к значительным различиям в распределении концентрации частиц

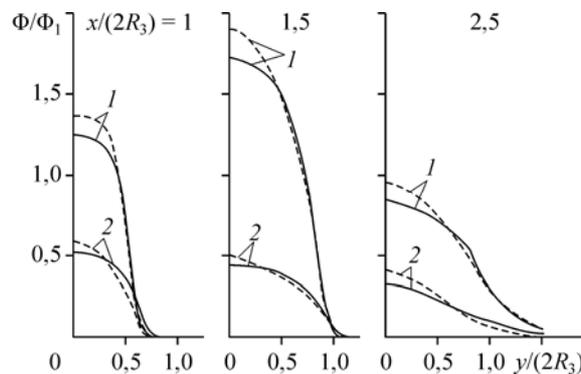
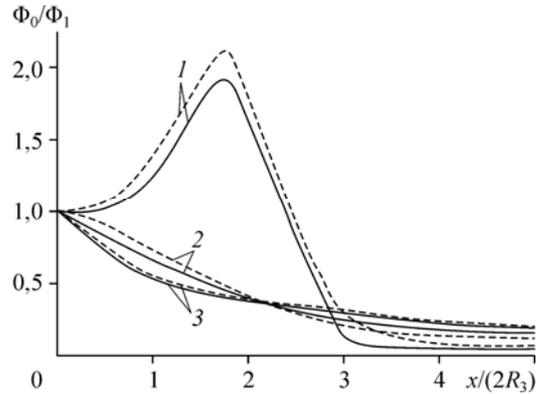


Рис. 3. Профили объемной концентрации частиц по длине трубы при вариации размера дисперсной фазы в закрученном потоке.

$M_d = 0,034$, $S = 0,47$; $d = 30$ (1), 100 (2) мкм.

в отрывных зонах закрученного газодисперсного потока. Для мелких частиц ($d = 30$ мкм) наблюдается резкий рост концентрации дисперсной фазы в начальных сечениях за счет ее накопления в области рециркуляции под действием обратных токов. Неравномерность профиля турбулентной кинетической энергии газовой и дисперсной фаз по радиусу трубы приводит к возникновению турбулентной миграции частиц (силы турбофореза) в сторону оси трубы [49, 50]. Этим и вызвано наличие максимума концентрации твердых частиц на оси канала в случае небольших частиц ($d = 30$ мкм). Для самых инерционных частиц ($d = 100$ мкм) характерным является быстрое рассеивание дисперсной фазы по сечению канала из-за действия центробежных сил и турбулентной диффузии и миграции. Эти выводы согласуются с данными измерений [4, 5] и численных расчетов для закрученных двухфазных потоков при наличии отрывных зон, приведенными в работах [12, 49].

Влияние закрутки газового потока на изменения концентрации дисперсной фазы вдоль оси трубы и по ее сечению в двухфазном газодисперсном потоке показано на рис. 4. Для закрученного потока характерным является рост количества частиц на оси трубы за счет действия центробежных сил (см. рис. 4а), тогда как в пристенной области величина концентрации дисперсной фазы пренебрежимо мала. Этот эффект становится более выраженным с увеличением величины параметра закрутки. Распределение частиц по сечению трубы также носит немонотонный характер (см. рис. 4б). Для двухфазного потока без закрутки при $S = 0$ (линия 1) характерным является быстрое рассеивание частиц по сечению трубы за сечением внезапного расширения, что приводит к резкому снижению величины концентрации дисперсной фазы в приосевой зоне трубы [49].

Отметим несколько общих выводов по анализу результатов, приведенных на рис. 2–4. В целом расчет по эйлерову и лагранжеву методам для закрученных двухфазных ограниченных течений дает качественно близкие результаты. Максимальное отличие не превышает 15–20%. Лагранжев расчет дает завышенное значение концентрации частиц в приосевой области трубы в сравнении с эйлеровым подходом под действием силы турбофореза и накопления частиц в зоне обратных токов. Соответственно при продвижении в сторону стенки значение концентрации, определенное лагранжевым методом, получается заниженным при сравнении со значением, рассчитанным по эйлерову приближению. Поэтому далее результаты численных расчетов сравнивались с данными измерений [4, 5], где были представлены радиальные профили потока массы дисперсной фазы в нескольких сечениях за положением внезапного расширения трубы.

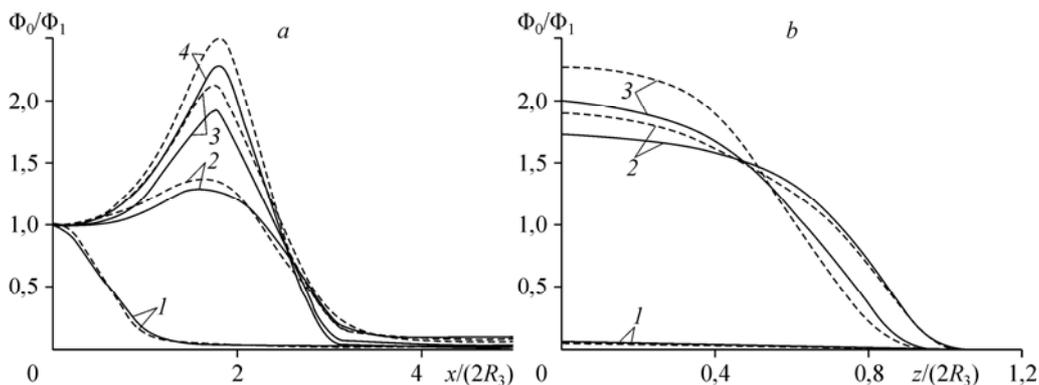


Рис. 4. Влияние параметра закрутки потока на распределение объемной концентрации дисперсной фазы вдоль оси трубы (а) и по ее сечению (б) при $x/(2R_3) = 1,5$.

Непрерывные линии — эйлерово описание, штриховые линии — полный лагранжев подход;
 $M_d = 0,034$, $d = 30$ мкм; $S = 0$ (1), 0,2 (2), 0,47 (3), 1 (4).

Сопоставление с данными измерений

Для сопоставления были использованы известные экспериментальные данные [4, 5]. Закрученное двухфазное течение исследовалось в опускном режиме течения за внезапным расширением трубы (схему экспериментального стенда см. на рис. 1). Измерения выполнялись с использованием однокомпонентного фазового доплеровского анемометра на расстояниях $x = 52, 112, 195$ и 315 мм ($x/(2R_3) = 0,81, 1,75, 3,05$ и $4,92$) от сечения внезапного расширения трубы. Отметим, что расчет начинался с расстояния $x = 3$ мм от сечения отрыва. В этом сечении приведены данные измерений, которые были использованы в качестве входных при проведении численного моделирования. Средний диаметр стеклянных частиц d в экспериментах [4, 5], определенный по их количеству в единице объема (mean number), составлял 45 мкм, размер частиц варьировался в диапазоне от 0 до $123,8$ мкм.

Данные сопоставительного анализа численных расчетов и измерений для осредненных радиальных V и V_d компонент скоростей фаз показаны на рис. 5. Для сечения $x = 315$ мм не приведено экспериментальных данных для частиц в приосевой зоне трубы ввиду их малой скорости на этом участке течения [4, 5]. В начальном сечении, расположенном на расстоянии 3 мм от сечения внезапного расширения трубы, осредненные скорости фаз имеют одинаковые значения. Расчет аксиальной осредненной скорости газа проводился по данным моделирования скорости дисперсной фазы только эйлеровым методом. Результаты применения обоих подходов дают несколько меньшую величину скоростей фаз для частиц, чем данные измерений [4, 5]. Профили радиальных скоростей газовой и дисперсной фаз имеют ожидаемый максимум в слое смешения в первых двух сечениях при $x = 52$ и 112 мм. Отметим, что наблюдается удовлетворительное согласование между результатами измерений и численного моделирования по всей длине расчетной области. Также обнаруживается неплохое согласование с данными расчетов [8, 12] по осредненным полям скорости частиц. Эти данные не приведены на рис. 4, чтобы обеспечить более наглядное представление результатов. Сравнение эйлерова и лагранжева методов показывают, что результаты их применения хорошо согласуются с данными измерений [4, 5]

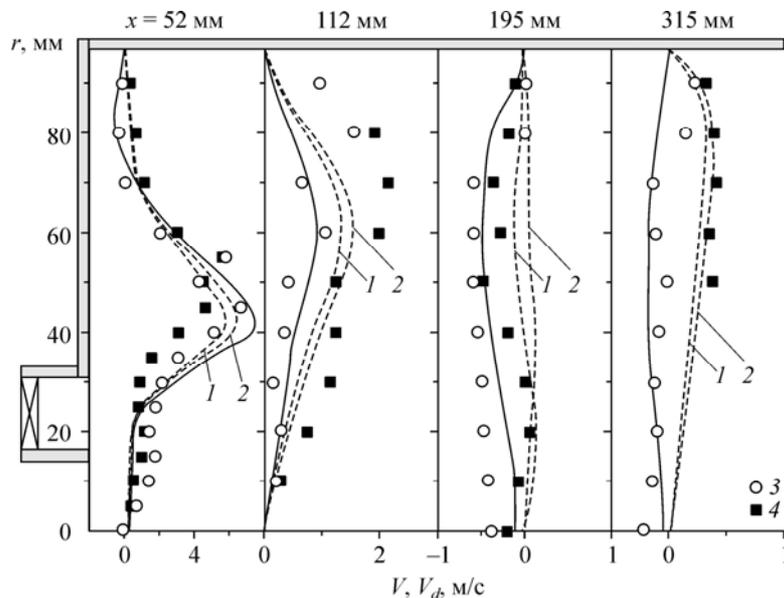


Рис. 5. Профили осредненных радиальных скоростей фаз.

Точки — результаты измерений из работ [4, 5], линии — данные настоящего расчета:
непрерывные линии — газовая фаза, штриховые линии — частицы;

1 — эйлерово описание, 2 — полный лагранжев подход, 3 — газ, 4 — частицы; $M_d = 0,034$ и $S = 0,47$.

(отличие не превышает 10–15 %). В целом можно отметить, что лагранжев метод несколько завышает значение скорости частиц в сравнении с эйлеровым описанием.

Радиальные профили измеренного [4, 5] и рассчитанного массового потока частиц по аксиальной координате показаны на рис. 6. Поток массы рассчитывался по следующей зависимости: $F = \rho_d U_d M_d$, где ρ_d , U_d и M_d — плотность материала частиц, его осредненная аксиальная скорость и массовая концентрация соответственно. По мере продвижения от входного сечения наблюдается значительная перестройка профиля потока массы дисперсной фазы по сечению трубы. Заметно наличие максимума потока дисперсной фазы в приосевой зоне трубы, сохраняющееся до расстояния $x = 195$ мм от ее внезапного расширения. Начиная со второго сечения ($x = 112$ мм) происходит накопление дисперсной фазы в пристенной части цилиндрического канала в результате возрастания тангенциальной скорости частиц и действия силы турбофореза, что согласуется с результатами работ [4, 5]. За исключением приосевой зоны можно отметить хорошее согласование полученных данных с данными измерений [4, 5]. В сечении $x = 315$ мм экспериментальные данные приведены только для пристенной области, так как в приосевой зоне за счет действия центробежных сил происходит вынос частиц к периферии трубы и их количества не хватает для получения достоверных результатов методом фазовой доплеровской анемометрии. В первых трех сечениях ($x = 52, 112$ и 195 мм) уменьшение концентрации дисперсной фазы происходит быстрее, чем отмечается в экспериментах. Соответственно, это приводит к увеличению количества частиц в пристенной части канала. Величина потока массы частиц, вычисленная с помощью полного лагранжева подхода (штриховые линии 3 на рис. 6), лучше согласуется с данными работ [4, 5] в первых двух сечениях и составляет примерно на 15 % больше величины потока массы, полученного с использованием эйлерова описания (сплошные линии 2 на рис. 6). Соответственно, величина аксиальной скорости частиц, рассчитанная по лагранжеву подходу, несколько выше соответствующего значения, полученного по эйлерову методу. Этот вывод подтверждают данные, приведенные на рис. 2–4, согласно которым концентрация частиц, вычисленная по лагранжеву методу, больше концентрации, определенной эйлеровым методом.

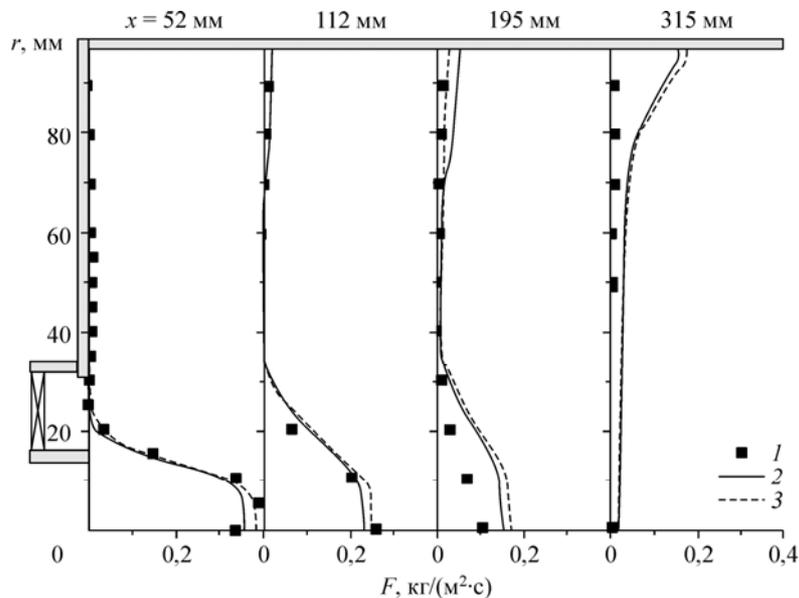


Рис. 6. Радиальные распределения массового потока частиц в отрывном закрученном двухфазном потоке.

Данные измерений из работ [4, 5] (1), расчет авторов: эйлеров (2) и полный лагранжев (3) подходы; $d = 45$ мкм, $M_d = 0,034$ и $S = 0,47$.

Заключение

В работе выполнено численное исследование динамики дисперсной фазы в турбулентном двухфазном закрученном потоке при внезапном расширении трубы с использованием эйлерова и лагранжева методов описания двухфазного потока.

Показано значительное увеличение концентрации дисперсной фазы в приосевой зоне трубы в закрученном потоке с ростом параметра закрутки (более чем в два раза в сравнении с незакрученным отрывным потоком). Причиной этого является действие центробежных сил и силы турбулентной миграции частиц (турбофорез). С увеличением размера частицы могут не вовлекаться в отрывное закрученное течение и при этом сохраняют положительную величину осредненной аксиальной скорости по всей длине расчетной области. В силу инерционности частиц зона обратных токов для дисперсной фазы заметно меньше, по сравнению с зоной рециркуляции газовой фазы.

Получено хорошее согласование с данными измерений с применением эйлерова и полного лагранжева метода [4, 5] для осредненных характеристик двухфазного закрученного потока и потока массы дисперсной фазы (различие измеренных и рассчитанных параметров не превышает 15 %). В целом оба подхода дают близкие результаты. По приведенным данным сложно сделать вывод о преимуществе одного из методов моделирования дисперсной фазы. Требуется проведение более подробного сравнительного исследования, что выходит за рамки настоящей работы.

Список литературы

1. Кутателадзе С.С., Волчков Э.П., Терехов В.И. Аэродинамика и тепломассообмен в ограниченных вихревых потоках. Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1987. 282 с.
2. Гупта А., Лилли Д., Сайред Н. Закрученные потоки. М.: Мир, 1987. 588 с.
3. Халатов А.А. Теория и практика закрученных потоков. Киев: Наукова думка, 1989. 192 с.
4. Sommerfeld M., Qiu H.-H. Detailed measurements in a swirling particulate two-phase flow by a phase-Doppler anemometer // Int. J. Heat Fluid Flow. 1991. Vol. 12. P. 20–28.
5. Sommerfeld M., Qiu H.-H. Characterization of particle-laden, confined swirling flow by phase-doppler anemometer and numerical calculation // Int. J. Multiphase Flow. 1993. Vol. 19. P. 1093–1127.
6. Jing J.P., Li Z.Q., Wang L., Chen Z.C., Chen L.Z., Zhang F.C. Influence of the mass flow rate of secondary air on the gas/particle flow characteristics in the near-burner region of a double swirl flow burner // Chem. Eng. Sci. 2011. Vol. 66. P. 2864–2871.
7. Селезнев Л.И., Цвигун С.Г. Исследование влияний условий закрутки на структуру двухфазного потока в расширяющемся канале // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 5. С. 85–90.
8. Sommerfeld M., Ando A., Wennerberg D. Swirling, particle-laden flows through a pipe expansion // ASME J. Fluids Eng. 1992. Vol. 114. P. 648–656.
9. Винберг А.А., Зайчик Л.И., Першуков В.А. Расчет двухфазных закрученных струйных потоков // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 1. С. 71–78.
10. Zhou L.X., Liao C.M., Chen T. Simulation of strongly swirling turbulent gas-particle flows using USM and $k-\varepsilon-k_p$ two-phase turbulence models // Powder Techn. 2001. Vol. 114. P. 1–11.
11. Сейржич М., Ментер Ф. Измельчение расчетной сетки при моделировании закрученного двухфазного потока // Теплофизика и аэромеханика. 2003. Т. 10, № 2. С. 171–183.
12. Apte S.V., Mahesh K., Moin P., Oefelein J.C. Large-eddy simulation of swirling particle-laden flows in a coaxial-jet combustor // Int. J. Multiphase Flow. 2003. Vol. 29. P. 1311–1331.
13. Liu Y., Zhou L.X., Xu C.X. Numerical simulation of instantaneous flow structure of swirling and non-swirling coaxial-jet particle-laden turbulence flows // Physica A. 2010. Vol. 389. P. 5380–5389.
14. Шваб А.В., Евсеев Н.С. Исследование процесса сепарации частиц в турбулентном закрученном потоке // Теор. основы хим. технологии. 2015. Т. 49, № 2. С. 197–205.
15. Пахомов М.А., Терехов В.И. Численное моделирование турбулентного закрученного газодисперсного потока за внезапным расширением трубы // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22, № 5. С. 621–632.
16. Drew D.A. Mathematical modeling of two-phase flow // Ann. Rev. Fluid Mech. 1983. Vol. 15. P. 261–291.
17. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1. 464 с.; Т. 2. 360 с.
18. Деревич И.В. Спектральная модель диффузии тяжелой инерционной примеси в случайном поле скорости сплошной среды // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22, № 2. С. 151–170.
19. Sikovsky D.P. Singularity of inertial particle concentration in the viscous sublayer of wall-bounded turbulent flows // Flow, Turbulence and Combust. 2014. Vol. 92. P. 41–64.
20. Jakirlic S., Hanjalic K., Tropea C. Modeling rotating and swirling turbulent flows: a perpetual challenge // AIAA J. 2002. Vol. 40. P. 1984–1996.

21. Fu S., Huang P.G., Launder B.E., Leschziner M.A. A comparison of algebraic and differential second-moment closures for axisymmetric turbulent shear flows with and without swirl // ASME J. Fluids Eng. 1988. Vol. 110. P. 216–221.
22. Jawarneh A.M., Vatistas G.H. Reynolds stress model in the prediction of confined turbulent swirling flows // ASME J. Fluids Eng. 2006. Vol. 128. P. 1377–1388.
23. Chen X.-Q., Pereira J.C.F. Prediction of evaporating spray in anisotropically turbulent gas flow // Numerical Heat Transfer A. 1995. Vol. 27. P. 143–162.
24. Taulbee D.B., Mashayek F., Barre C. Simulation and Reynolds stress modeling of particle-laden turbulent shear flows // Int. J. Heat Fluid Flow. 1999. Vol. 20. P. 368–373.
25. Beishuizen N., Naud B., Roekaerts D. Evaluation of a modified Reynolds stress model for turbulent dispersed two-phase flows including two-way coupling // Flow, Turbulence and Combust. 2007. Vol. 79. P. 321–341.
26. Meyer D.W. Modelling of turbulence modulation in particle- or droplet-laden flows // J. Fluid Mech. 2012. Vol. 706. P. 251–273.
27. Tian Z.F., Tu J.Y., Yeoh G.H. Numerical simulation and validation of dilute gas-particle flow over a backward-facing step // Aerosol Sci. Techn. 2005. Vol. 39. P. 319–332.
28. Frawley P., O'Mahony A.P., Geron M. Comparison of Lagrangian and Eulerian simulations of slurry flows in a sudden expansion // ASME J. Fluids Eng. 2010. Vol. 132. Paper 091301. 12 pages.
29. Пахомов М.А., Терехов В.И. Сравнение эйлерова и лагранжева описаний при исследовании течения и теплообмена в газокапельном осесимметричном отрывном турбулентном потоке // Прикл. механика и технич. физика. 2013. Т. 54, № 4. С. 96–108.
30. Fadai-Ghotbi A., Manceau R., Boree J. Revisiting URANS computations of the backward-facing step flow using second moment closures. Influence of the numerics // Flow, Turbulence and Combust. 2008. Vol. 81. P. 395–410.
31. Manceau R., Hanjalić K. Elliptic blending model: a new near-wall Reynolds-stress turbulence closure // Phys. Fluids. 2002. Vol. 14. P. 744–754.
32. Zaichik L.I. A statistical model of particle transport and heat transfer in turbulent shear flows // Phys. Fluids. 1999. Vol. 11. P. 1521–1534.
33. Derevich I.V. Statistical modelling of mass transfer in turbulent two-phase dispersed flows. 1. Model development // Int. J. Heat Mass Transfer. 2000. Vol. 43. P. 3709–3723.
34. Crowe C.T., Sharma M.P., Stock D.E. The particle source in cell (PSI-Cell) method for gas-droplet flows // ASME J. Fluids Eng. 1977. Vol. 99. P. 325–332.
35. Gosman A.D., Ioannides E. Aspects of computer simulation of liquid-fuelled combustors // J. Energy. 1983. Vol. 7. P. 482–490.
36. Chan C.K., Zhang H.Q., Lau K.S. An improved stochastic separated flow model for turbulent two-phase flow // Comp. Mech. 2000. Vol. 24. P. 491–502.
37. Saffman P.G. The lift on a small sphere in a slow shear flow // J. Fluid Mech. 1965. Vol. 22. P. 385–400.
Saffman P.G. Corrigendum. "The lift on a small sphere in a slow shear flow. // J. Fluid Mech. 1965. Vol. 22. P. 385–400" // J. Fluid Mech. 1968. Vol. 31. P. 624.
38. Zaichik L.I., Alipchenkov V.M., Avetissian A.R. A statistical model for predicting the heat transfer of solid particles in turbulent flows // Flow, Turbulence and Combust. 2011. Vol. 86. P. 497–518.
39. Minier J.-P., Peirano E., Chibbaro S. PDF model based on Langevin equation for polydispersed two-phase flows applied to a bluff-body gas-solid flow // Phys. Fluids. 2004. Vol. 16. P. 2419–2431.
40. Amani E., Nobari M.R.H. Systematic tuning of dispersion models for simulation of evaporating sprays // Int. J. Multiphase Flow. 2013. Vol. 48. P. 11–31.
41. Moissette S., Oesterle B., Boulet P. Temperature fluctuations of discrete particles in a homogeneous turbulent flow: a Lagrangian model // Int. J. Heat Fluid Flow. 2001. Vol. 22. P. 220–226.
42. Pozorski J., Minier J.-P. On the Lagrangian turbulent dispersion models based on the Langevin equation // Int. J. Multiphase Flow. 1998. Vol. 24. P. 913–945.
43. Bocksell T.L., Loth E. Stochastic modeling of particle diffusion in a turbulent boundary layer // Int. J. Multiphase Flow. 2006. Vol. 32. P. 1234–1253.
44. Osipov A.N. Lagrangian modeling of dust admixture in gas flows // Astrophysics Space Sci. 2000. Vol. 274. P. 377–386.
45. Healy D.P., Young J.B. Full Lagrangian methods for calculating particle concentration fields in dilute gas-particle flows // Proc. Royal Society A. 2005. Vol. 461. P. 2197–2225.
46. Hanjalić K., Jakirlić S. Contribution towards the second-moment closure modelling of separating turbulent flows // Computers & Fluids. 1998. Vol. 27. P. 137–156.
47. Dellenback P.A., Metzger D.E., Neitzel G.P. Measurements in turbulent swirling flow through an abrupt axisymmetric expansion // AIAA J. 1989. Vol. 26. P. 669–681.
48. Fessler J.R., Eaton J.K. Turbulence modification by particles in a backward-facing step flow // J. Fluid Mech. 1999. Vol. 314. P. 97–117.
49. Вараксин А.Ю. Гидрогазодинамика и теплофизика двухфазных потоков: проблемы и достижения // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51, № 3. С. 421–455.
50. Волков Э.П., Зайчик Л.И., Першуков В.А. Моделирование горения твердого топлива. М.: Наука, 1994. 320 с.

Статья поступила в редакцию 17 мая 2016 г.,
после доработки — 21 июня 2016 г.