

УДК 622.233.6

## ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ СТУПЕНЧАТОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ

А. А. Битюрин

Ульяновский государственный технический университет, 432027 Ульяновск  
E-mail: denjgy0706@yandex.ru

Моделируется продольный упругий центральный удар системы однородного и ступенчатого стержней о жесткую преграду с помощью точного аналитического решения волнового дифференциального уравнения методом Даламбера с заданием необходимых начальных и граничных условий. С использованием формулы Эйлера получено аналитическое выражение для расчета критической скорости, при которой происходит потеря устойчивости стержневой системы.

**Ключевые слова:** стержневые системы, продольный удар, критические скорости, устойчивое состояние.

**Введение.** Устойчивая форма равновесия деформированного элемента зависит от величины приложенной к нему продольной нагрузки. Достижение критических значений нагрузок равносильно разрушению рассматриваемого элемента или системы элементов. В качестве продольной сжимающей нагрузки может выступать, в частности, ударная сила, возникающая при взаимодействии ударного элемента с жестким препятствием или технологической средой. В связи с этим исследование потери устойчивости рабочих элементов (бойка, волновода и т. д.) существующих в настоящее время ударных механизмов и машин в процессе их работы достаточно актуально.

Впервые задача о динамической устойчивости упругих стержней при мгновенном продольном действии сжимающей нагрузки, значение которой остается постоянным, решена М. А. Лаврентьевым и А. Ю. Ишлинским в работе [1]. Позднее с использованием метода малых возмущений [2] проводилось теоретическое исследование потери устойчивости мгновенно сжатого бесконечного упругого стержня, а также изучалась потеря устойчивости полубесконечного упругого стержня [3, 4]. В работах [5, 6] предложен подход к исследованию потери устойчивости стержней при больших и малых прогибах на основе асимптотического метода линеаризации на неустановившейся стадии выпучивания полубесконечного упругого стержня при ударе по нему телом большой массы, движущимся с постоянной скоростью.

Решение поставленных задач сводилось либо к аналитическому, либо к численному решению линеаризованного дифференциального уравнения четвертого порядка, а также системы дифференциальных уравнений движения стержня с начальным прогибом. Недостатком данного подхода является трудность математического решения, обусловленная громоздкими математическими выкладками, а также недостаточное соответствие результатов математического моделирования экспериментальным данным лишь в узком интервале изменения той или иной характеристики вследствие накопления погрешностей в процессе вычислений. В указанных работах, а также в [3, 7–9] задача о потере устойчивости неоднородных ступенчатых стержней при их ударе о преграды не рассматривалась.

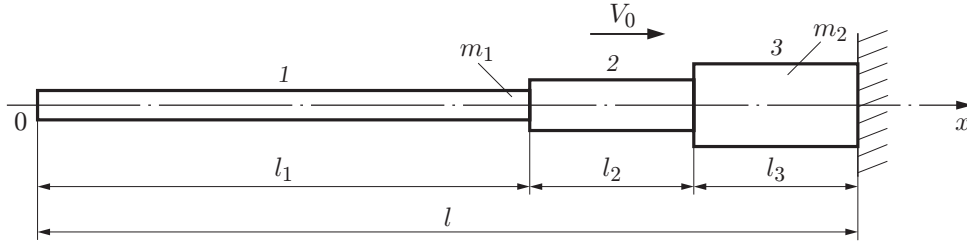


Рис. 1. Схема удара неоднородной стержневой системы о жесткую преграду при неударяющих связях:

1 — начальный участок ступенчатого стержня; 2 — конечный участок ступенчатого стержня; 3 — однородный стержень

Ниже предложено несколько подходов для расчета критической предупредной скорости неоднородной системы, состоящей из ступенчатого стержня, имеющего два однородных участка, и однородного стержня. С помощью точного аналитического метода Даламбера решается волновое дифференциальное уравнение. С использованием метода характеристик строится диаграмма относительной продольной деформации, по которой рассчитываются критические значения силы и предупредной скорости.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрена модель продольного удара системы ступенчатого и однородного стержней о жесткую преграду (рис. 1). Длина начального участка ступенчатого стержня равна  $l_1$ , конечного —  $l_2$ , масса обоих участков —  $m_1$ . Длина однородного стержня  $l_3 = l - (l_1 + l_2)$ , масса —  $m_2$ . Предупредная скорость стержневой системы равна  $V_0$ , общая ее длина —  $l$ , все ее участки выполнены из одного материала. Используется волновая модель продольного удара [10–12].

Движение поперечных сечений соударяемых стержней описывается волновыми дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} &= 0, & 0 \leq x \leq l_1, \\ \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t^2} &= 0, & l_1 \leq x \leq l_1 + l_2, \\ \frac{\partial^2 u_3(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_3(x, t)}{\partial t^2} &= 0, & l_1 + l_2 \leq x \leq l, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u_1(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$ ,  $u_3(x, t)$  — продольные перемещения поперечного сечения стержней 1, 2, 3 (см. рис. 1);  $x$  — координата сечения;  $t$  — время;  $a$  — скорость распространения продольной волны деформации [10–12].

Начальные условия определяют состояние участков стержневой системы перед их соударением при  $t = t_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(x, t_0)}{\partial t} &= V_0, & \frac{\partial u_1(x, t_0)}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial u_2(x, t_0)}{\partial t} &= V_0, & \frac{\partial u_2(x, t_0)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u_3(x, t_0)}{\partial t} &= V_0, & \frac{\partial u_3(x, t_0)}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Краевые условия определяют отсутствие силы в сечении  $x = 0$  и равенство нулю скорости сечения  $x = l$  при взаимодействии однородного стержня (участок 3) с жесткой преградой:

$$\frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_3(l, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\partial u_3(l, t)}{\partial x} < 0,$$

а также равенство сил и скоростей в контактном сечении  $x = l_1 + l_2$  участка 2 ступенчатого и однородного стержней при непосредственном их взаимодействии:

$$EA_2 \frac{\partial u_2(l_1 + l_2, t)}{\partial x} = EA_3 \frac{\partial u_3(l_1 + l_2, t)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_2(l_1 + l_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_3(l_1 + l_2, t)}{\partial t} \quad \text{при} \quad \frac{\partial u_2(l_1 + l_2, t)}{\partial x} < 0$$

либо отсутствие сил в сечении  $x = l_1 + l_2$  стержней, если они не взаимодействуют:

$$\frac{\partial u_2(l_1 + l_2, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_3(l_1 + l_2, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad u_2(l_1 + l_2, t) - u_3(l_1 + l_2, t) \leq 0.$$

Здесь  $E$  — модуль упругости первого рода;  $A_2$  — площадь поперечного сечения ступенчатого стержня на участке 2;  $A_3$  — площадь поперечного сечения однородного стержня (участок 3) [10–12].

В сечении  $x = l_1$  краевые условия определяют равенство сил и скоростей:

$$EA_1 \frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial x} = EA_2 \frac{\partial u_2(l_1, t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(l_1, t)}{\partial t}$$

( $A_1$  — площадь поперечного сечения ступенчатого стержня на участке 1).

Разрыв контакта в сечениях  $x = l_1 + l_2$  и  $x = l$  происходит при условии, что разность скоростей в сечениях  $x = l_1 + l_2$  участков 2, 3, а также скорость в сечении  $x = l$  отрицательны:

$$\frac{\partial u_2(l_1 + l_2, t)}{\partial t} - \frac{\partial u_3(l_1 + l_2, t)}{\partial t} < 0, \quad \frac{\partial u_3(l, t)}{\partial t} < 0.$$

Повторный удар о жесткую преграду может произойти после разрыва контакта в этих сечениях при условии, что разность скоростей в сечениях  $x = l_1 + l_2$  участков 2, 3 и скорость в сечении  $x = l$  положительны:

$$\frac{\partial u_2(l_1 + l_2, t)}{\partial t} - \frac{\partial u_3(l_1 + l_2, t)}{\partial t} > 0, \quad \frac{\partial u_3(l, t)}{\partial t} > 0.$$

**2. Метод решения.** Решение дифференциальных уравнений (1) строится с помощью точного аналитического метода Даламбера в виде суммы двух разрывных функций  $f_i$  и  $\varphi_i$  на  $i$ -м однородном участке [10, 11]:

$$u_i(x, t) = f_i(at - x) + \varphi_i(at + x), \quad 0 \leq x \leq l_i.$$

В случае удара неоднородной ступенчатой стержневой системы о жесткую преграду определить критическую ударную нагрузку, вызывающую потерю устойчивого состояния, достаточно трудно, поскольку в процессе удара функция относительной продольной деформации  $\tilde{\varepsilon}$  будет кусочно-линейной [12].

Пусть в момент времени  $T = t_i$  один из однородных участков произвольного многоступенчатого стержня (рис. 2, а), для которого построена диаграмма относительной продольной деформации  $\tilde{\varepsilon}$  (рис. 2, б), находится под действием системы продольных сил  $P_1, P_2, \dots, P_n$  (рис. 2, в). Силы  $P_1, P_2, \dots, P_n$  действуют в различных поперечных сечениях стержня, расстояния до которых от переходного сечения, контактирующего с другим однородным участком, известны и соответственно равны  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . В соответствии с законом Гука [13] и с помощью данных диаграмм выражение для продольной силы  $P_i$  на рассматриваемом однородном участке представим в виде

$$P_i = EA \frac{V_0}{a} (\tilde{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_{i-1}). \quad (2)$$

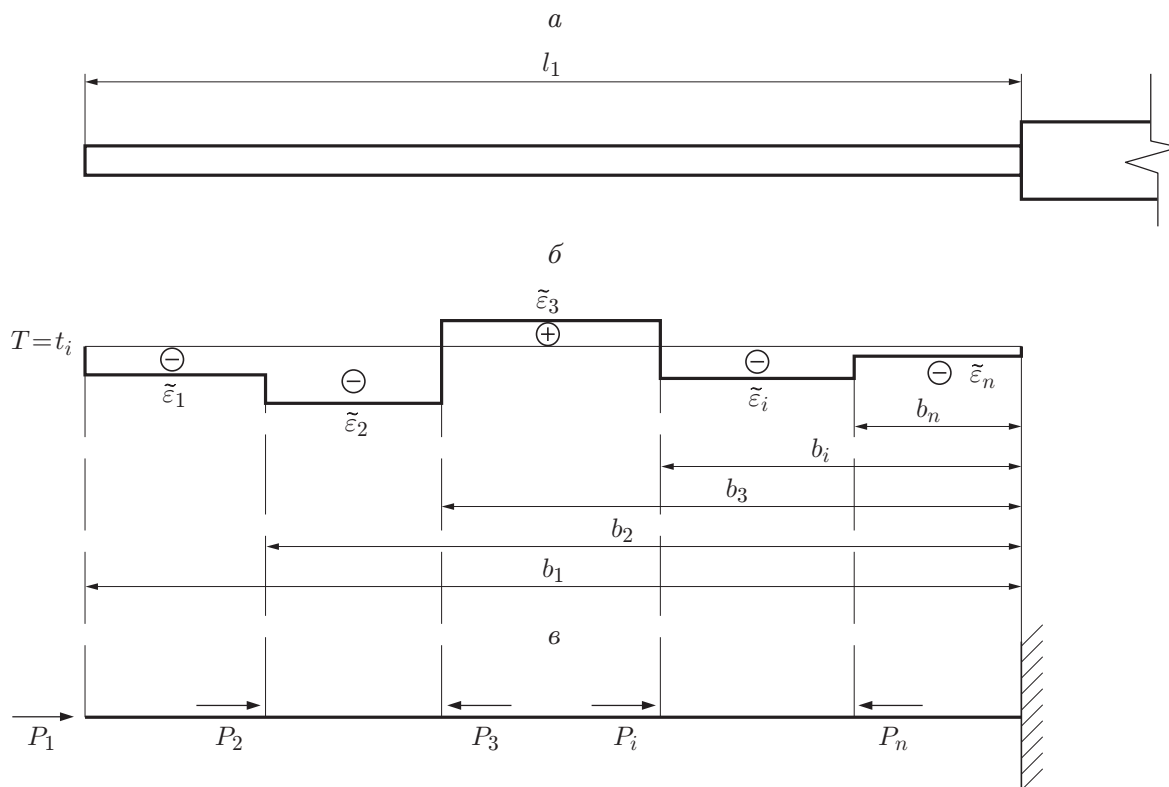


Рис. 2. Деформирование ступенчатого стержня:  
*a* — участок ступенчатого стержня; *б* — диаграмма продольной деформации; *в* — схема нагружения ступенчатого стержня

Здесь  $A$  — площадь поперечного сечения рассматриваемого однородного участка;  $\tilde{\varepsilon}_i$  — относительная продольная деформация на  $i$ -м отрезке рассматриваемого однородного участка стержневой системы.

С учетом того, что связь рассматриваемого однородного участка с последующим однородным участком жесткая, заменим последующий участок жесткой заделкой. Таким образом, получаем схему нагружения рассматриваемого участка для расчета на устойчивость жестко заделанного стержня, длина которого равна длине этого участка. Для расчета рассматриваемого однородного участка стержня при продольной сжимающей нагрузке данную систему продольных сил (см. рис. 2, *в*) можно заменить одной силой, действующей на свободном торце стержня, которую обозначим  $P_{eq}$ .

В одном из подходов к определению эквивалентной продольной нагрузки, действующей на рассматриваемый участок (см. рис. 2), допускается введение некоторой средней величины относительной продольной деформации в фиксированный момент времени  $t$ :

$$\langle \tilde{\varepsilon} \rangle_t = \frac{\tilde{\varepsilon}_1 s_1 + \tilde{\varepsilon}_2 s_2 + \dots + \tilde{\varepsilon}_i s_i + \dots + \tilde{\varepsilon}_n s_n}{s_1 + s_2 + \dots + s_i + \dots + s_n}, \tag{3}$$

где  $s_i = |b_i - b_{i-1}|$  (см. рис. 2, *б*).

Преимуществом данного подхода является простота расчета, однако следует отметить, что в нем не учитывается характер распределения продольных деформаций по рассматриваемому однородному участку стержневой системы, что обуславливает значительные погрешности вычисления критической сжимающей нагрузки.

В другом подходе величина продольной силы  $P_{eq}$  рассчитывается по известной зависимости [13], если заданы величины сил  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , координаты точек их приложения

$b_1, b_2, \dots, b_n$ , а также длина участка  $l_1$ :

$$P_{eq} = \pm P_1 \left(\frac{b_1}{l_1}\right)^2 \pm P_2 \left(\frac{b_2}{l_1}\right)^2 \pm \dots \pm P_i \left(\frac{b_i}{l_1}\right)^2 \pm P_n \left(\frac{b_n}{l_1}\right)^2. \quad (4)$$

Здесь знак “+” соответствует случаю сжимающей продольной силы, знак “-” — растягивающей.

Формула (4) включает координаты точек приложения продольных сил, соответствующих скачкообразному изменению относительной продольной деформации на диаграмме (см. рис. 2, б), что существенно при оценке критического состояния рассматриваемого участка, поскольку оно зависит не только от величины силы  $P_i$ , но и от места ее приложения.

При расчете устойчивости тонких однородных участков  $l > 15d$  ( $d$  — диаметр рассматриваемого участка) применима формула Эйлера [13]

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (5)$$

где  $J_{\min}$  — минимальный момент инерции поперечного сечения относительно главных центральных осей инерции;  $\mu l$  — приведенная длина [13];  $l$  — длина рассматриваемого однородного участка (в данном случае длина  $l_1$ , поскольку  $l$  — общая длина стержневой системы). В случае если связь рассматриваемого однородного участка с другим участком является жесткой, коэффициент для первого однородного участка принимает значение  $\mu = 2$  [13].

Отметим, что в данном случае речь идет о динамической задаче, тогда как формула Эйлера применяется в случае статического нагружения. Ударная сила, действующая на ступенчатый стержень в результате волновых преобразований, рассматривается как постоянная статическая нагрузка в течение малого промежутка времени.

Для выполнения условия сохранения устойчивого состояния неоднородной стержневой системы необходимо, чтобы значение  $P_{eq}$  было меньше  $P_{cr}$ . С помощью (2), (4), (5), учитывая, что для круглого поперечного сечения  $J_{\min} = \pi d^4/64$ , получаем

$$V_0 < V_{cr} = \frac{\pi^2 d^2 a}{16(\mu l)^2} \left[ \tilde{\varepsilon}_1 \left(\frac{b_1}{l_1}\right)^2 + (\tilde{\varepsilon}_2 - \tilde{\varepsilon}_1) \left(\frac{b_2}{l_1}\right)^2 + (\tilde{\varepsilon}_3 - \tilde{\varepsilon}_2) \left(\frac{b_3}{l_1}\right)^2 + \right. \\ \left. + (\tilde{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_3) \left(\frac{b_i}{l_1}\right)^2 + (\tilde{\varepsilon}_n - \tilde{\varepsilon}_i) \left(\frac{b_n}{l_1}\right)^2 \right]^{-1}. \quad (6)$$

Данная формула применима для расчета критической предупредной скорости многоступенчатой стержневой системы с любым числом однородных участков.

**3. Пример.** Рассмотрим продольный удар о жесткую преграду стержневой системы, длина начального участка которой (а также первого участка ступенчатого стержня) равна  $l_1 = 0,6l$ , длина второго участка ступенчатого стержня и длина однородного стержня соответственно равны  $l_2 = l_3 = 0,2l$ , соотношение площадей однородных участков равно  $\tilde{A} = A_1/A_2 = A_2/A_3 = 0,5$ . На основе решения дифференциальных уравнений (1) с использованием метода характеристик [10] построена диаграмма относительной продольной деформации (рис. 3).

Анализ диаграммы продольной деформации позволяет сделать вывод, что максимальное значение деформации имеет место на первом однородном участке ступенчатого стержня при  $t = 0,8l/a$  (при  $0,2l < x < 0,6l$   $\tilde{\varepsilon}_{\max} = -1,77$ ), а также при  $t = 2,6l/a$  (при  $0 < x < 0,2l$   $\tilde{\varepsilon}_{\max} = -0,93$ , при  $0,2l < x < 0,4l$   $\tilde{\varepsilon}_{\max} = -1,69$ , при  $0,4l < x < 0,6l$   $\tilde{\varepsilon}_{\max} = -0,31$ ). Следовательно, в данные моменты времени при достижении некоторого критического значения предупредной скорости первый однородный участок может потерять устойчивость. Найдем критическое значение предупредной скорости с помощью формулы (6). Подставляя значения деформаций, приведенные на рис. 3, в (6), а также учиты-

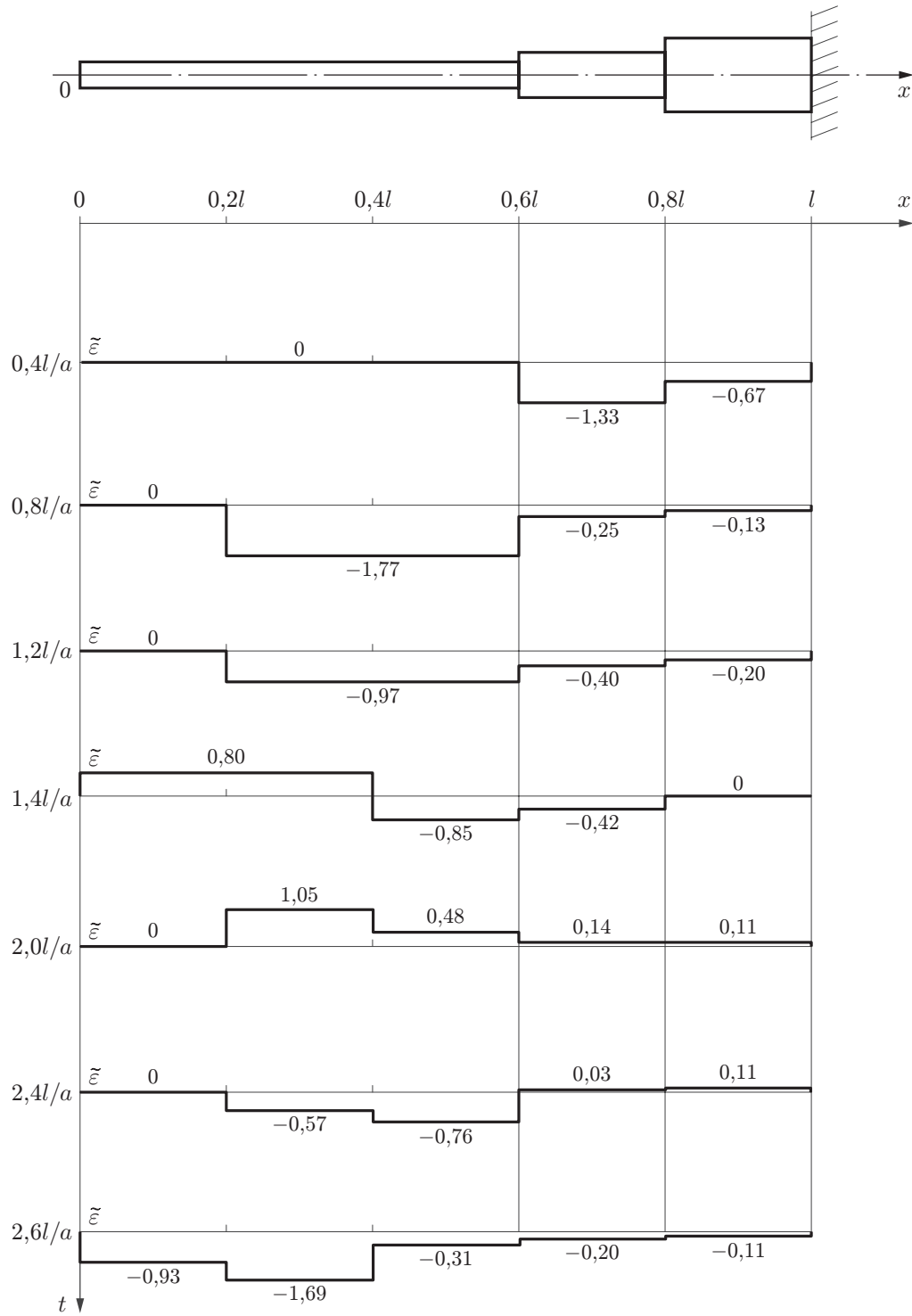


Рис. 3. Диаграммы относительной продольной деформации в различные моменты времени

вая значение  $\mu = 2$  в соответствии со схемой закрепления первого однородного участка [13], получаем  $V_{cr}|_{t=0,8l/a} = 0,02\pi^2 d^2 a / l_1^2$ ,  $V_{cr}|_{t=2,6l/a} = 0,014\pi^2 d^2 a / l_1^2$ . Если длина начального участка  $l_1 = 0,6l$ , то  $V_{cr}|_{t=0,8l/a} = 0,055\pi^2 d^2 a / l^2$ ,  $V_{cr}|_{t=2,6l/a} = 0,039\pi^2 d^2 a / l^2$ . Таким образом, потеря устойчивости ступенчатого стержня возможна при  $t = 0,8l/a$ , поскольку в этот момент времени может быть достигнуто критическое значение продольной сжимающей нагрузки при данном значении предупредительной скорости  $V_{cr}$ .

Рассчитывая критическую предупредительную скорость путем осреднения величины продольной деформации по зависимости (3), получаем значения  $V_{cr}^*|_{t=0,8l/a} = 0,036\pi^2 d^2 a / l^2$ ,  $V_{cr}^*|_{t=2,6l/a} = 0,044\pi^2 d^2 a / l^2$ . Очевидно, что с использованием обоих подходов критические значения скорости  $V_{cr}$  и  $V_{cr}^*$  различаются на  $10 \div 30$  %. Это подтверждает правомерность применения рассмотренной модели продольного удара, в которой учитываются не только величины относительной продольной деформации, но и характер их распределения (см. рис. 2, б).

**Заключение.** С использованием рассмотренного метода можно рассчитать минимальное критическое значение предупредительной скорости ступенчатой стержневой системы любой конфигурации, при котором эта система теряет устойчивое состояние при продольном ударе. Таким образом, использование волновой модели и метода характеристик позволяет получить достаточно простое решение задачи о потере устойчивости при продольном ударе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. 1949. Т. 65, № 6. С. 42–45.
2. Малышев Б. М. Устойчивость стержня при ударном сжатии // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1966. № 4. С. 137–142.
3. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Гостехтеоретиздат, 1962.
4. Малый В. И. Длинноволновое приближение в задачах о потере устойчивости при ударе // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1972. № 4. С. 138–144.
5. Малый В. И. Выпучивание стержня при продольном ударе. Малые прогибы // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1973. № 4. С. 181–186.
6. Малый В. И. Выпучивание стержня при продольном ударе. Большие прогибы // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1975. № 1. С. 52–61.
7. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978.
8. Пановко Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. М.: Наука, 1987.
9. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1974.
10. Алимов О. Д. Распространение волн деформаций в ударных системах / О. Д. Алимов, В. К. Манжосов, В. Э. Еремьянц. М.: Наука, 1985.
11. Битюрин А. А., Манжосов В. К. Моделирование продольного удара однородных стержней при неударяющих связях // Вестн. Ульянов. гос. техн. ун-та. 2005. № 3. С. 23–25.
12. Битюрин А. А. Продольный удар неоднородного стержня о жесткую преграду / А. А. Битюрин, В. К. Манжосов. Ульяновск: Ульянов. гос. техн. ун-т, 2009.
13. Писаренко Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. Киев: Наук. думка, 1989.

Поступила в редакцию 15/II 2010 г.,  
в окончательном варианте — 21/VI 2010 г.