

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБА ТОНКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИХ ПЛИТ

С. А. Калоеров, А. В. Сероштанов

Донецкий национальный университет, 83001 Донецк

E-mails: kaloerov@mail.ru, aleks.serosht@gmail.com

Приведены основные соотношения теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит, в которой используются комплексные потенциалы. Получены точные аналитические решения задач об изгибе эллиптической плиты и бесконечной плиты с эллиптическим отверстием. Установлено, что в случае односвязной конечной плиты при механических воздействиях электрическая и магнитная индукции не возникают, при действии индукций механические напряжения не возникают, несмотря на то что пьезоэффект имеет место вследствие возникновения деформаций, перемещений и потенциалов поля; в случае бесконечной односвязной плиты пьезоэффект наблюдается всегда и оказывает существенное влияние на значения изгибающих моментов. В случае плиты с эллиптическим отверстием изучено влияние физико-механических свойств материала и геометрических характеристик отверстия на значения изгибающих моментов.

Ключевые слова: теория изгиба тонких плит, электромагнитоупругость, комплексные потенциалы, метод рядов, точные решения, пьезоэффект.

DOI: 10.15372/PMTF20220214

Введение. В различных областях современной науки и техники в качестве элементов конструкций широко используются тонкие плиты из пьезоматериалов [1, 2], подвергаемые различным механическим и электромагнитным воздействиям (поперечный изгиб). Зачастую такие элементы имеют отверстия и инородные включения, вблизи которых при эксплуатации конструкций возникают высокие концентрации напряжений, приводящие к разрушению. Это обуславливает необходимость разработки методов решения задач определения электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) таких плит. Для сплошных плит некоторые методы решения данных задач предложены в работах [3–5]. В случае многосвязных пьезоплит с произвольными отверстиями и включениями оптимальные решения получаются при использовании функций обобщенных комплексных переменных. Эти функции были введены в работе [6] для решения плоских задач, а в [7] использованы при решении краевых задач об изгибе тонких плит [8], полученных путем обобщения гипотез Кирхгофа [9] на случай электромагнитоупругих плит.

В данной работе кратко изложены принятые гипотезы теории изгиба тонких пьезоплит, сформулированы получаемые на их основе краевые задачи и предложены комплексные потенциалы электромагнитоупругости; последние использованы при получении точных аналитических решений задач об изгибе сплошной конечной плиты и бесконечной плиты с эллиптическим отверстием.

1. Краевые задачи теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит.

Рассматривается тонкая плита из пьезоматериала, имеющая постоянную толщину $2h$, в прямоугольной системе координат $Oxyz$, плоскость Oxy которой совмещена со срединной плоскостью плиты. Принимаются следующие предположения: 1) в каждой точке плиты имеется плоскость материальной симметрии, параллельная ее срединной плоскости; 2) прямолинейные отрезки, до начала деформации нормальные к срединной плоскости, при изгибе плиты остаются прямолинейными и нормальными к изогнутой срединной поверхности и не меняют своей длины; 3) срединная поверхность плиты является нерастяжимой, т. е. при $z = 0$ перемещения u, v точек срединной плоскости равны нулю; 4) влияние взаимодействия продольных слоев плиты на удлинения и сдвиги материальных волокон, лежащих в этих слоях, пренебрежимо мало, поэтому напряжениями σ_z и компонентами D_z, B_z электрической и магнитной индукций также можно пренебречь; 5) на поверхностях плиты имеют место условия

$$\begin{aligned} z = -h: \quad \sigma_z = -q(x, y), \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = D_z = B_z = 0, \\ z = h: \quad \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = D_z = B_z = 0 \end{aligned}$$

($\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ — напряжения; D_z, B_z — нормальные проекции векторов электрической и магнитной индукций).

С учетом данных условий так же, как в теории изгиба тонких анизотропных плит [10], получаем, что точки срединной плоскости перемещаются на расстояние $w(x, y)$ по оси Oz (прогиб), а для перемещений u, v произвольных точек имеют место равенства

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Следовательно, при малых деформациях имеем

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

По аналогии с перемещениями u, v потенциалы электрического и магнитного полей выберем в виде линейных функций z :

$$\varphi(x, y) = z\varphi_0(x, y), \quad \psi(x, y) = z\psi_0(x, y).$$

Здесь $\varphi_0(x, y), \psi_0(x, y)$ — плотности потенциалов электрического и магнитного полей на единицу длины.

Учитывая наличие в каждой точке плиты плоскости материальной симметрии, параллельной ее срединной плоскости, уравнения электромагнитоупругого состояния запишем в виде [8]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y + s_{16}\tau_{xy} + g_{11}D_x + g_{21}D_y + p_{11}B_x + p_{21}B_y, \\ \varepsilon_y &= s_{12}\sigma_x + s_{22}\sigma_y + s_{26}\tau_{xy} + g_{12}D_x + g_{22}D_y + p_{12}B_x + p_{22}B_y, \\ \gamma_{xy} &= s_{16}\sigma_x + s_{26}\sigma_y + s_{66}\tau_{xy} + g_{16}D_x + g_{26}D_y + p_{16}B_x + p_{26}B_y, \\ E_x &= -g_{11}\sigma_x - g_{12}\sigma_y - g_{16}\tau_{xy} + \beta_{11}D_x + \beta_{12}D_y + \nu_{11}B_x + \nu_{12}B_y, \\ E_y &= -g_{21}\sigma_x - g_{22}\sigma_y - g_{26}\tau_{xy} + \beta_{12}D_x + \beta_{22}D_y + \nu_{12}B_x + \nu_{22}B_y, \\ H_x &= -p_{11}\sigma_x - p_{12}\sigma_y - p_{16}\tau_{xy} + \nu_{11}D_x + \nu_{12}D_y + \chi_{11}B_x + \chi_{12}B_y, \\ H_y &= -p_{21}\sigma_x - p_{22}\sigma_y - p_{26}\tau_{xy} + \nu_{12}D_x + \nu_{22}D_y + \chi_{12}B_x + \chi_{22}B_y. \end{aligned}$$

Решив эти уравнения относительно напряжений и индукций, получаем [8]

$$\sigma_x = b_{11}\varepsilon_x + b_{12}\varepsilon_y + b_{16}\gamma_{xy} + c_{g11}E_x + c_{g21}E_y + c_{p11}H_x + c_{p21}H_y,$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y &= b_{12}\varepsilon_x + b_{22}\varepsilon_y + b_{26}\gamma_{xy} + c_{g12}E_x + c_{g22}E_y + c_{p12}H_x + c_{p22}H_y, \\
\tau_{xy} &= b_{16}\varepsilon_x + b_{26}\varepsilon_y + b_{66}\gamma_{xy} + c_{g16}E_x + c_{g26}E_y + c_{p16}H_x + c_{p26}H_y, \\
D_x &= -c_{g11}\varepsilon_x - c_{g12}\varepsilon_y - c_{g16}\gamma_{xy} + c_{\beta11}E_x + c_{\beta12}E_y + c_{\nu11}H_x + c_{\nu12}H_y, \\
D_y &= -c_{g21}\varepsilon_x - c_{g22}\varepsilon_y - c_{g26}\gamma_{xy} + c_{\beta12}E_x + c_{\beta22}E_y + c_{\nu12}H_x + c_{\nu22}H_y, \\
B_x &= -c_{p11}\varepsilon_x - c_{p12}\varepsilon_y - c_{p16}\gamma_{xy} + c_{\nu11}E_x + c_{\nu12}E_y + c_{\chi11}H_x + c_{\chi12}H_y, \\
B_y &= -c_{p21}\varepsilon_x - c_{p22}\varepsilon_y - c_{p26}\gamma_{xy} + c_{\nu12}E_x + c_{\nu22}E_y + c_{\chi12}H_x + c_{\chi22}H_y,
\end{aligned}$$

где коэффициенты связи представляют собой элементы обратной матрицы

$$\begin{pmatrix}
b_{11} & b_{12} & b_{16} & c_{g11} & c_{g21} & c_{p11} & c_{p21} \\
b_{12} & b_{22} & b_{26} & c_{g12} & c_{g22} & c_{p12} & c_{p22} \\
b_{16} & b_{26} & b_{66} & c_{g16} & c_{g26} & c_{p16} & c_{p26} \\
-c_{g11} & -c_{g12} & -c_{g16} & c_{\beta11} & c_{\beta12} & c_{\nu11} & c_{\nu12} \\
-c_{g21} & -c_{g22} & -c_{g26} & c_{\beta12} & c_{\beta22} & c_{\nu12} & c_{\nu22} \\
-c_{p11} & -c_{p12} & -c_{p16} & c_{\nu11} & c_{\nu12} & c_{\chi11} & c_{\chi12} \\
-c_{p21} & -c_{p22} & -c_{p26} & c_{\nu12} & c_{\nu22} & c_{\chi12} & c_{\chi22}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} & p_{11} & p_{21} \\
s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} & p_{12} & p_{22} \\
s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} & p_{16} & p_{26} \\
-g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & \nu_{11} & \nu_{12} \\
-g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & \nu_{12} & \nu_{22} \\
-p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & \nu_{11} & \nu_{12} & \chi_{11} & \chi_{12} \\
-p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & \nu_{12} & \nu_{22} & \chi_{12} & \chi_{22}
\end{pmatrix}^{-1},$$

s_{ij} — коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей; g_{ij} , p_{ij} — пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули деформаций и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях; β_{ij} , ν_{ij} , χ_{ij} — коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивости, измеренные при постоянных напряжениях.

Введем моменты по толщине плиты, вызванные напряжениями σ_x , σ_y , τ_{xy} , индукциями D_x , D_y , B_x , B_y , потенциалами φ , ψ , и поперечные силы, обусловленные касательными напряжениями τ_{xz} , τ_{yz} :

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_{-h}^h z\sigma_x dz, & M_y &= \int_{-h}^h z\sigma_y dz, & H_{xy} &= \int_{-h}^h z\tau_{xy} dz, \\
M_{dx} &= \int_{-h}^h zD_x dz, & M_{dy} &= \int_{-h}^h zD_y dz, & M_{bx} &= \int_{-h}^h zB_x dz, & M_{by} &= \int_{-h}^h zB_y dz,
\end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}
M_\varphi &= \int_{-h}^h z\varphi dz, & M_\psi &= \int_{-h}^h z\psi dz; \\
N_x &= \int_{-h}^h \tau_{xz} dz, & N_y &= \int_{-h}^h \tau_{yz} dz.
\end{aligned} \quad (1.2)$$

Учитывая, что введенные величины не зависят от z , и вычисляя интегралы (1.1), (1.2), находим [8]

$$\begin{aligned}
M_x = - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - C_{g11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - C_{g21} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - \right. \\
\left. - C_{p11} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - C_{p21} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right),
\end{aligned}$$

$$M_y = - \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - C_{g12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - C_{g22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - \right. \\ \left. - C_{p12} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - C_{p22} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right), \quad (1.3)$$

$$H_{xy} = - \left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - C_{g16} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - C_{g26} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - \right. \\ \left. - C_{p16} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - C_{p26} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right);$$

$$M_{dx} = C_{g11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{g16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{g12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{\beta 11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + C_{\beta 12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \\ + C_{\nu 11} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + C_{\nu 12} \frac{\partial \psi_0}{\partial y},$$

$$M_{dy} = C_{g21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{g26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{g22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{\beta 12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + C_{\beta 22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \\ + C_{\nu 12} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + C_{\nu 22} \frac{\partial \psi_0}{\partial y},$$

$$M_{bx} = C_{p11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{p16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{p12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{\nu 11} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + C_{\nu 12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \\ + C_{\chi 11} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + C_{\chi 12} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \quad (1.4)$$

$$M_{by} = C_{p21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{p26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{p22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{\nu 12} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + C_{\nu 22} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \\ + C_{\chi 12} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + C_{\chi 22} \frac{\partial \psi_0}{\partial y};$$

$$M_\varphi = D_0 \varphi_0, \quad M_\psi = D_0 \psi_0; \quad (1.5)$$

$$N_x = - \left(D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - C_{g11} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - \right. \\ \left. - (C_{g21} + C_{g16}) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - C_{g26} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} - C_{p11} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - (C_{p21} + C_{p16}) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} - C_{p26} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right),$$

$$N_y = - \left(D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - C_{g16} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - \right. \\ \left. - (C_{g12} + C_{g26}) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - C_{g22} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} - C_{p16} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - (C_{p12} + C_{p26}) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} - C_{p22} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right), \quad (1.6)$$

где $D_{ij} = b_{ij} D_0$ — упругие жесткости материала плиты; $C_{gij} = c_{gij} D_0$, $C_{pij} = c_{pij} D_0$, $C_{\beta ij} = c_{\beta ij} D_0$, $C_{\nu ij} = c_{\nu ij} D_0$, $C_{\chi ij} = c_{\chi ij} D_0$ — электромагнитные жесткости материала плиты; $D_0 = 2h^3/3$ — постоянная, зависящая от толщины плиты.

Учитывая выражения (1.3), (1.4) и интегрируя уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

и уравнения электромагнитостатики [11, 12]

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0, \quad (1.7)$$

для определения функций w , φ_0 , ψ_0 получаем систему дифференциальных уравнений [8]

$$\begin{aligned} L_{4s}w + L_{3g}\varphi_0 + L_{3p}\psi_0 &= q(x, y), \\ L_{3g}w + L_{2\beta}\varphi_0 + L_{2\nu}\psi_0 &= 0, \\ L_{3p}w + L_{2\nu}\varphi_0 + L_{2\chi}\psi_0 &= 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где L_{ij} — дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} L_{4s} &= -\left(D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right), \\ L_{3g} &= C_{g11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (C_{g21} + 2C_{g16}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (C_{g12} + 2C_{g26}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + C_{g22} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\ L_{3p} &= C_{p11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (C_{p21} + 2C_{p16}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (C_{p12} + 2C_{p26}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + C_{p22} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\ L_{2\beta} &= C_{\beta11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{\beta12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{\beta22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_{2\nu} = C_{\nu11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{\nu12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{\nu22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{2\chi} &= C_{\chi11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{\chi12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{\chi22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Систему дифференциальных уравнений (1.8) следует дополнить краевыми условиями [8], зависящими от условий нагружения и подкрепления края плиты.

2. Комплексные потенциалы теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит. В работе [7] с помощью функций комплексной переменной решение системы уравнений (1.8) найдено в виде

$$w(x, y) = w_0(x, y) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 W_k(z_k); \quad (2.1)$$

$$\varphi_0(x, y) = \varphi_{00}(x, y) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \nu_k W'_k(z_k), \quad (2.2)$$

$$\psi_0(x, y) = \psi_{00}(x, y) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \rho_k W'_k(z_k),$$

где $w_0(x, y)$, $\varphi_{00}(x, y)$, $\psi_{00}(x, y)$ — частные решения системы (1.8); $W_k(z_k)$ — функции обобщенных комплексных переменных z_k :

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (2.3)$$

μ_k — корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix} = 0,$$

$l_{ij}(\mu)$ — полиномы:

$$l_{4s}(\mu) = -(D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{66}\mu + D_{11}),$$

$$l_{3g}(\mu) = C_{g22}\mu^3 + (C_{g12} + 2C_{g26})\mu^2 + (C_{g21} + 2C_{g16})\mu + C_{g11},$$

$$l_{3p}(\mu) = C_{p22}\mu^3 + (C_{p12} + 2C_{p26})\mu^2 + (C_{p21} + 2C_{p16})\mu + C_{p11},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = C_{\beta22}\mu^2 + 2C_{\beta12}\mu + C_{\beta11}, \quad l_{2\nu}(\mu) = C_{\nu22}\mu^2 + 2C_{\nu12}\mu + C_{\nu11},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = C_{\chi22}\mu^2 + 2C_{\chi12}\mu + C_{\chi11}, \quad \nu_k = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_{0k}}, \quad \rho_k = \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{0k}},$$

$$\Delta_{1k} = \begin{vmatrix} -l_{3g}(\mu_k) & l_{2\nu}(\mu_k) \\ -l_{3p}(\mu_k) & l_{2\chi}(\mu_k) \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2k} = \begin{vmatrix} l_{2\beta}(\mu_k) & -l_{3g}(\mu_k) \\ l_{2\nu}(\mu_k) & -l_{3p}(\mu_k) \end{vmatrix}, \quad \Delta_{0k} = \begin{vmatrix} l_{2\beta}(\mu_k) & l_{2\nu}(\mu_k) \\ l_{2\nu}(\mu_k) & l_{2\chi}(\mu_k) \end{vmatrix}.$$

Подставив функции (2.1), (2.2) в выражения (1.3)–(1.5), для изгибающих и крутящего моментов, моментов индукций электрического и магнитного полей, перерезывающих сил с использованием комплексных потенциалов получаем следующие выражения:

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = (M_{0x}, M_{0y}, H_{0xy}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k) W_k''(z_k),$$

$$p_k = D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2 - (C_{g11} + C_{g21}\mu_k)\nu_k - (C_{p11} + C_{p21}\mu_k)\rho_k,$$

$$q_k = D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2 - (C_{g12} + C_{g22}\mu_k)\nu_k - (C_{p11} + C_{p22}\mu_k)\rho_k, \quad (2.4)$$

$$r_k = D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2 - (C_{g16} + C_{g26}\mu_k)\nu_k - (C_{p16} + C_{p26}\mu_k)\rho_k;$$

$$(M_{dx}, M_{dy}, M_{bx}, M_{by}) = (M_{0dx}, M_{0dy}, M_{0bx}, M_{0by}) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (d_{xk}, d_{yk}, b_{xk}, b_{yk}) W_k''(z_k),$$

$$d_{xk} = C_{g11} + 2C_{g16}\mu_k + C_{g12}\mu_k^2 - (C_{\beta11} + C_{\beta12}\mu_k)\nu_k - (C_{\nu11} + C_{\nu12}\mu_k)\rho_k,$$

$$d_{yk} = C_{g21} + 2C_{g26}\mu_k + C_{g22}\mu_k^2 - (C_{\beta12} + C_{\beta22}\mu_k)\nu_k - (C_{\nu12} + C_{\nu22}\mu_k)\rho_k, \quad (2.5)$$

$$b_{xk} = C_{p11} + 2C_{p16}\mu_k + C_{p12}\mu_k^2 - (C_{\nu11} + C_{\nu12}\mu_k)\nu_k - (C_{\chi11} + C_{\chi12}\mu_k)\rho_k,$$

$$b_{yk} = C_{p21} + 2C_{p26}\mu_k + C_{p22}\mu_k^2 - (C_{\nu12} + C_{\nu22}\mu_k)\nu_k - (C_{\chi12} + C_{\chi22}\mu_k)\rho_k;$$

$$(M_\varphi, M_\psi) = (M_{0\varphi}, M_{0\psi}) + D_0(\varphi_0, \psi_0); \quad (2.6)$$

$$(N_x, N_y) = (N_{0x}, N_{0y}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (l_k, -s_k) W_k'''(z_k),$$

$$s_k = -D_{16} - (D_{12} + 2D_{66})\mu_k - 3D_{26}\mu_k^2 - D_{22}\mu_k^3 +$$

$$+ (C_{g16} + (C_{g12} + C_{g26})\mu_k + C_{g22}\mu_k^2)\nu_k + (C_{p16} + (C_{p12} + C_{p26})\mu_k + C_{p22}\mu_k^2)\rho_k,$$

$$l_k = D_{11} + 3D_{16}\mu_k + (D_{12} + 2D_{66})\mu_k^2 + D_{26}\mu_k^3 + \quad (2.7)$$

$$+ (C_{g11} + (C_{g21} + C_{g16})\mu_k + C_{g26}\mu_k^2)\nu_k - (C_{p11} + (C_{p21} + C_{p16})\mu_k + C_{p26}\mu_k^2)\rho_k.$$

Здесь величины, содержащие 0 в индексах, соответствуют частному решению системы уравнений (1.8) и вычисляются по формулам (1.3)–(1.5), в которых функции $w(x, y)$, $\varphi_0(x, y)$, $\psi_0(x, y)$ нужно заменить на функции $w_0(x, y)$, $\varphi_{00}(x, y)$, $\psi_{00}(x, y)$. При выводе формул (2.4)–(2.7) учтены связи

$$l_k - \mu_k s_k = d_{xk} + \mu_k d_{yk} = b_{xk} + \mu_k b_{yk} = 0,$$

из которых следуют равенства

$$l_k = \mu_k s_k, \quad d_{xk} = -\mu_k d_{yk}, \quad b_{xk} = -\mu_k b_{yk}.$$

Кроме того, наложены связи

$$s_k + r_k = -p_k/\mu_k, \quad s_k - r_k = q_k \mu_k.$$

Комплексные потенциалы $W_k(z_k)$ должны удовлетворять определенным граничным условиям на краях плиты. Эти условия следуют из соответствующих условий для системы дифференциальных уравнений (1.8). В общем случае для определения комплексных потенциалов имеем условия [7]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ikp} W_k'(t_k) = f_{ip}(t) \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (2.8)$$

где постоянные g_{ikp} и функции $f_{ip}(t)$ принимают определенные значения в зависимости от способа нагружения или подкрепления контура L_p . При этом, в случае если контур L_p плиты нагружен механическими изгибающими моментами $M_n = m_l(s)$, поперечными усилиями $N_n = p_l(s)$, изгибающими индукционными моментами $M_{dn} = m_{dl}(s)$, $M_{bn} = m_{bl}(s)$, имеем

$$\begin{aligned} g_{1kp} &= p_k/\mu_k, & g_{2kp} &= q_k, & g_{3kp} &= d_{yk}, & g_{4kp} &= b_{yk}, \\ f_{1p}(t) &= I_{0xy1} \pm \int_0^s (m_p dy + f_p dx) - c_p x + c_{1p}, \\ f_{2p}(t) &= I_{0xy2} \pm \int_0^s (m_p dx - f_p dy) + c_p y + c_{2p}, \\ f_{3p}(t) &= M_{0d} \pm \int_0^s m_{dp} ds + c_{3p}, & f_{4p}(t) &= M_{0b} \pm \int_0^s m_{bp} ds + c_{4p}, \\ I_{0xy1} &= \int_0^s (M_{0x} \cos nx + (H_{0xy} - I_0) \cos ny) ds, \\ I_{0xy2} &= \int_0^s ((H_{0xy} + I_0) \cos nx + M_{0y} \cos ny) ds, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$M_{0d} = \int_0^s (M_{0dx} \cos nx + M_{0dy} \cos ny) ds, \quad M_{0b} = \int_0^s (M_{0bx} \cos nx + M_{0by} \cos ny) ds,$$

$$J_{01} = \int_0^s (N_{0xy} - H_{0xy}) dx + M_{0x} dy, \quad J_{02} = - \int_0^s M_{0y} dx - (N_{0xy} + H_{0xy}) dy,$$

$$f_p(s) = \int_0^s p_p(s) ds,$$

где c_p, c_{il} — вещественная и комплексные постоянные; верхний знак соответствует внешнему контуру L_0 плиты, нижний — контурам отверстий L_l ; s — длина дуги контура, обходимого против часовой стрелки. В случае если контур L_p плиты жестко подкреплён, имеют место соотношения

$$g_{1kp} = 1, \quad g_{2kp} = \mu_k, \quad g_{3kp} = d_{yk}, \quad g_{4kp} = b_{yk},$$

$$f_{1p}(t) = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + c_{1p}, \quad f_{2p}(t) = -\frac{\partial w_0}{\partial y} + c_{2p},$$

функции $f_{3p}(t), f_{4p}(t)$ сохраняют вид (2.9). Если контур жестко закреплён, то выполняется условие $c_{1p} = c_{2p} = 0$.

Определив комплексные потенциалы, основные характеристики ЭМУС при изгибе можно вычислить по формулам (2.4)–(2.7), а напряжения индукции — по формулам

$$\sigma_x = \frac{3M_x}{2h^3} z, \quad \sigma_y = \frac{3M_y}{2h^3} z, \quad \tau_{xy} = \frac{3H_{xy}}{2h^3} z,$$

$$\tau_{xz} = \frac{3N_x}{4h^3} (h^2 - z^2), \quad \tau_{yz} = \frac{3N_y}{4h^3} (h^2 - z^2),$$

$$D_x = \frac{3M_{dx}}{2h^3} z, \quad D_y = \frac{3M_{dy}}{2h^3} z, \quad B_x = \frac{3M_{bx}}{2h^3} z, \quad B_y = \frac{3M_{by}}{2h^3} z.$$

Пусть в общем случае плита занимает многосвязную область S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами отверстий L_l ($l = \overline{1, L}$). Плита находится под действием приложенных к ее контурам распределенных механических и электромагнитных нагрузок; во внутренних точках $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ ($r = \overline{1, R}$) области S действуют сосредоточенные силы $P_r^0(X_r^0, Y_r^0)$ и сосредоточенные моменты индукций M_{Dr}^0, M_{Br}^0 . В частном случае бесконечной многосвязной плиты будем полагать, что на бесконечности заданы моменты $M_x^\infty, M_y^\infty, H_{xy}^\infty$, а также компоненты моментов индукций $M_{dx}^\infty, M_{dy}^\infty, M_{bx}^\infty, M_{by}^\infty$.

Комплексные потенциалы $W_k(z_k)$ определены в областях S_k обобщенных комплексных переменных z_k , ограниченных контурами L_{kl} , соответствующими контурам L_l области S при аффинных преобразованиях (2.3), и в общем случае имеют вид [6, 7]

$$W'_k(z_k) = g\Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) +$$

$$+ \sum_{r=1}^R (A_{kr}^0 z_k + B_{kr}^0) \ln(z_k - z_{kr}^0) + W'_{0k}(z_k), \quad (2.10)$$

где g — постоянная ($g = 0$ в случае конечной области, $g = 1$ в случае бесконечной области); Γ_k — постоянные, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2 - \nu_k(C_{g11} + C_{g21}\mu_k) - \rho_k(C_{p11} + C_{p21}\mu_k))\Gamma_k = -M_x^\infty,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2 - \nu_k(C_{g12} + C_{g22}\mu_k) - \rho_k(C_{p12} + C_{p22}\mu_k))\Gamma_k = -M_y^\infty,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2 - \nu_k(C_{g16} + C_{g26}\mu_k) - \rho_k(C_{p16} + C_{p26}\mu_k))\Gamma_k = -H_{xy}^\infty,$$

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (C_{g11} + C_{g16}\mu_k + C_{g12}\mu_k^2 + \nu_k(C_{\beta11} + C_{\beta12}\mu_k) + \rho_k(C_{\nu11} + C_{\nu12}\mu_k))\Gamma_k &= -M_{dx}^\infty, \\
2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (C_{g21} + C_{g26}\mu_k + C_{g22}\mu_k^2 + \nu_k(C_{\beta12} + C_{\beta22}\mu_k) + \rho_k(C_{\nu12} + C_{\nu22}\mu_k))\Gamma_k &= -M_{dy}^\infty, \\
2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (C_{p11} + C_{p16}\mu_k + C_{p12}\mu_k^2 + \nu_k(C_{\nu11} + C_{\nu12}\mu_k) + \rho_k(C_{\chi11} + C_{\chi12}\mu_k))\Gamma_k &= -M_{bx}^\infty, \\
2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (C_{p21} + C_{p26}\mu_k C_{p22}\mu_k^2 + \nu_k(C_{\nu12} + C_{\nu22}\mu_k) + \rho_k(C_{\chi12} + C_{\chi22}\mu_k))\Gamma_k &= -M_{by}^\infty, \\
2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k &= 0,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

A_{kl}, B_{kl} — постоянные, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k}, \nu_k, \nu_k \mu_k, \rho_k, \rho_k \mu_k\right) i A_{kl} = \left(0, 0, 0, \frac{P_l + P_{0l}}{2\pi D_{11}}, 0, 0, 0, 0\right); \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k}, \nu_k, \nu_k \mu_k, \rho_k, \rho_k \mu_k\right) i B_{kl} &= \\
&= \left(0, 0, -\frac{M_{xl} + M_{0xl}}{2\pi D_{22}}, -\frac{M_{yl} + M_{0yl}}{2\pi}, 0, 0, M_{Dl} + M_{0Dl}, M_{Bl} + M_{0Bl}\right), \tag{2.13}
\end{aligned}$$

P_l, M_{xl}, M_{yl} — главный вектор и компоненты главного момента поперечных внешних усилий, приложенных к контуру отверстия L_l ; M_{Dl}, M_{Bl} — суммарные моменты электрической и магнитной индукций по контуру L_l ; $P_{0l}, M_{0xl}, M_{0yl}, M_{0Dl}, M_{0Bl}$ — величины, аналогичные величинам $P_l, M_{xl}, M_{yl}, M_{Dl}, M_{Bl}$ и соответствующие частному решению системы дифференциальных уравнений (1.8); A_{kr}^0, B_{kr}^0 — постоянные, удовлетворяющие системам, получаемым из систем (2.12), (2.13) путем замены величин $A_{jl}, B_{jl}P_l, M_{xl}, M_{yl}$ на величины $A_{kr}^0, P_r^0, M_{xr}^0, M_{yr}^0$, при этом величины с нулями в индексах опускаются; $W'_{0k}(z_k)$ — функции, голоморфные в многосвязных областях S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями (2.3) и ограниченных контурами L_{kl} ; z_{kl}, z_{kr}^0 — точки в областях S_k , соответствующие при аффинных преобразованиях произвольным точкам $z_{0l}(x_{0l}, y_{0l})$ внутри контуров L_l и точкам, в которых приложены сосредоточенные силы z_r^0 .

Аналогичным образом для плит строятся решения задач электроупругости (ЭУ), в случае когда не учитываются магнитные свойства материала, соответствующие уравнения и гипотезы; задач магнитоупругости (МУ), в случае когда не учитываются электрические свойства, соответствующие уравнения и гипотезы; задач классической теории упругости (ТУ) анизотропного тела, в случае когда не учитываются электрические и магнитные свойства, уравнения (1.7) и гипотезы об электромагнитных свойствах. Однако, если составлена программа численной реализации решения некоторой задачи электромагнитоупругости (ЭМУ), то для частных случаев задач ЭУ, МУ и ТУ можно не составлять новую программу, а использовать программу решения задачи ЭМУ, задавая значения

некоторых параметров $\lambda_g, \lambda_p, \lambda_{gp}$, характеризующих каждую из частных задач. Эти параметры введены таким образом, чтобы постоянные $g'_{ij}, \beta'_{ij}, p'_{ij}, \chi'_{ij}, \nu'_{ij}$ модельного материала вычислялись по формулам $g'_{ij} = \lambda_g g_{ij}, \beta'_{ij} = \beta_{ij}/\lambda_p, p'_{ij} = \lambda_p p_{ij}, \chi'_{ij} = \chi_{ij}/\lambda_p, \nu'_{ij} = \lambda_{gp} \nu_{ij}$. Тогда для задач ЭУ нужно принимать значения $\lambda_p \leq 10^{-3}, \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$, для задач МУ — $\lambda_g \leq 10^{-3}, \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$, для задач ТУ — $\lambda_p \leq 10^{-3}, \lambda_g \leq 10^{-3}, \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$.

3. Точные аналитические решения задач для односвязных плит. В случае односвязных конечных и бесконечных плит с эллиптическими контурами методом рядов получены точные аналитические решения задач об их электромагнитоупругом изгибе.

3.1. *Эллиптическая плита.* Пусть эллиптическая плита, контур которой описывается параметрическими уравнениями $x = a_0 \cos \theta, y = b_0 \sin \theta$, где a_0, b_0 — длины полуосей, находится под действием механических изгибающих моментов $M_n(s) = m_0$, поперечные усилия и индукционные моменты на контуре равны нулю ($p(s) = m_{d0}(s) = m_{b0}(s) = 0$). В этом случае комплексные потенциалы (2.10) имеют вид $W'_k(z_k) = W'_{k0}(z_k)$, где $W'_{k0}(z_k)$ — функции, голоморфные в областях S_k , полученных из заданной области S и ограниченных контурами L_{k0} , соответствующими контуру L_0 при аффинных преобразованиях (2.3). Для нахождения вида этих функций используем конформные отображения.

Отообразим внешности единичных кругов $|\zeta_{k0}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{k0} :

$$z_k = R_{k0} \left(\zeta_{k0} + \frac{m_{k0}}{\zeta_{k0}} \right), \quad R_{k0} = \frac{a_0 - i\mu_k b_0}{2}, \quad m_{k0} = \frac{a_0 + i\mu_k b_0}{a_0 - i\mu_k b_0}.$$

Тогда функции $W'_{k0}(z_k)$, голоморфные в эллипсах L_{k0} , можно разложить в ряды по полиномам Фабера:

$$W'_k(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k0n} P_n(z_k), \quad (3.1)$$

где $P_n(z_k)$ — полиномы Фабера, для которых имеют место равенства

$$P_0 = 1, \quad P_n(z_k) = \zeta_{k0}^n + \frac{m_{k0}^n}{\zeta_{k0}^n},$$

a_{k0n} — неизвестные постоянные, значения которых вычисляются из граничных условий на контуре плиты. На основе (2.8) все условия на L_0 можно записать в векторном виде

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(\frac{p_k}{\mu_k}, q_k, d_{yk}, b_{yk} \right) W'_k(z_k) = (-m_0 y + c_{10}, -m_0 x + c_{20}, c_{30}, c_{40}), \quad (3.2)$$

где c_{i0} — комплексные постоянные.

Подставляя функции (3.1) в условия (3.2) и учитывая, что уравнения контура имеют вид $x = a_0 \cos \theta = (a_0/2)(\sigma + 1/\sigma), y = b_0 \sin \theta = -(ib_0/2)(\sigma - 1/\sigma), \zeta_{k0} = \sigma, \sigma = e^{i\theta}$, методом рядов получаем равенство $a_{k0n} = 0$ при $n \geq 2$ и систему линейных алгебраических уравнений для определения a_{k01} :

$$\sum_{k=1}^4 \left(\left(\frac{p_k}{\mu_k}, q_k, d_{yk}, b_{yk} \right) a_{k0n} m_{k0} + \left(\frac{\bar{p}_k}{\bar{\mu}_k}, \bar{q}_k, \bar{d}_{yk}, \bar{b}_{yk} \right) \bar{a}_{k01} \right) = \left(-m_0 \frac{ib_0}{2}, -m_0 \frac{a_0}{2}, 0, 0 \right).$$

Тогда функции (3.1) с точностью до постоянных слагаемых принимают вид

$$W'_k(z_k) = a_{k01} \left(\zeta_{k0} + \frac{m_{k0}}{\zeta_{k0}} \right) = a_{k01} \frac{z_k}{R_{k0}}.$$

Для моментов (2.4), (2.5) получаем выражения

$$(M_x, M_y, H_{xy}, M_{dx}, M_{dy}, M_{bx}, M_{by}) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k, d_{xk}, d_{yk}, b_{xk}, b_{yk}) \frac{a_{k01}}{R_{k0}},$$

из которых следует, что моменты постоянны во всех точках плиты, причем для любых материалов и длин полуосей эллиптического диска $M_x = M_y = m_0$, $H_{xy} = M_{dx} = M_{dy} = M_{bx} = M_{by} = 0$. Иными словами, в результате действия механических моментов моменты индукций в плите не возникают, несмотря на то что имеет место пьезоэффект, поскольку возникают деформации, перемещения и потенциалы поля, что следует из уравнений состояния.

3.2. *Бесконечная плита с эллиптическим отверстием.* Рассмотрим односвязную область в виде бесконечной плиты с эллиптическим отверстием, имеющим контур L_1 , который описывается параметрическими уравнениями $x = a_1 \cos \theta$, $y = b_1 \sin \theta$, где a_1, b_1 — длины полуосей. Контур отверстия свободен от нагрузжений, на бесконечности действуют механические моменты $M_x^\infty, M_y^\infty, H_{xy}^\infty$ и индукционные моменты $M_{dx}^\infty, M_{dy}^\infty, M_{bx}^\infty, M_{by}^\infty$.

В данном случае функции (2.10) имеют вид

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + W'_{k0}(z_k),$$

где Γ_k — постоянные, определяемые решением системы уравнений (2.11); $W'_{k0}(z_k)$ — функции, голоморфные в бесконечных областях, ограниченных контурами L_{k1} , получаемыми из L_1 путем аффинных преобразований (2.3). Для построения этих функций используем конформные отображения. Отобразим внешность единичных кругов $|\zeta_k| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{k1} :

$$z_k = R_{k1} \left(\zeta_{k1} + \frac{m_{k1}}{\zeta_{k1}} \right), \quad R_{k1} = \frac{a_1 - i\mu_k b_1}{2}, \quad m_{k1} = \frac{a_1 + i\mu_k b_1}{a_1 - i\mu_k b_1}.$$

Тогда функции $W'_{k0}(z_k)$, голоморфные в областях вне контура L_{k1} , включающих бесконечно удаленную точку, можно разложить в ряды Лорана по отрицательным степеням ζ_{k1} :

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k1n}}{\zeta_{k1}^n}, \quad (3.3)$$

где a_{k1n} — неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий (2.8) на контуре отверстия. В рассматриваемом случае эти условия принимают вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(\frac{p_k}{\mu_k}, q_k, d_{yk}, b_{yk} \right) W'_k(z_k) = (c_{10}, c_{20}, c_{30}, c_{40}), \quad (3.4)$$

где c_{i0} — комплексные постоянные.

Подставляя в (3.4) функции (3.3) с учетом

$$x = a_1 \cos \theta = (a_1/2)(\sigma + 1/\sigma), \quad y = b_1 \sin \theta = -(ib_1/2)(\sigma - 1/\sigma)$$

и применяя метод рядов, получаем равенство $a_{k1n} = 0$ при $n \geq 2$ и систему линейных алгебраических уравнений для определения a_{k11} :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \left(\frac{p_k}{\mu_k}, q_k, d_{yk}, b_{yk} \right) a_{k11} &= \\ &= - \sum_{k=1}^4 \left[\left(\frac{p_k}{\mu_k}, q_k, d_{yk}, b_{yk} \right) R_{k1} m_{k1} \Gamma_k + \left(\frac{\bar{p}_k}{\bar{\mu}_k}, \bar{q}_k, \bar{d}_{yk}, \bar{b}_{yk} \right) \bar{R}_{k1} \bar{\Gamma}_k \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Тогда функции (3.3) принимают вид

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + a_{k11}/\zeta_{k1}, \quad (3.6)$$

Значения момента M_s на контуре кругового отверстия в бесконечной плите

Материал	M_s						
	0	$\theta = \pi/12$	$\theta = \pi/6$	$\theta = \pi/4$	$\theta = \pi/3$	$\theta = 5\pi/12$	$\theta = \pi/2$
M1	1,845	1,725	1,400	0,970	0,570	0,305	0,215
M2	2,184	2,003	1,457	0,767	0,336	0,230	0,158
M3	1,719	1,720	1,537	1,130	0,600	0,231	-0,008

где Γ_k , a_{k11} — постоянные, вычисляемые из решения систем уравнений (2.11) и (3.5) соответственно. Продифференцировав (3.6) и подставив $W_k''(z_k)$ в (2.4), (2.5), получаем формулы для моментов

$$(M_x, M_y, H_{xy}, M_{dx}, M_{dy}, M_{bx}, M_{by}) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k, d_{xk}, d_{yk}, b_{xk}, b_{yk}) \left(\Gamma_k - \frac{a_{k11}}{R_{k1}(\zeta_{k1}^2 - m_{k1})} \right). \quad (3.7)$$

В случае жесткого подкрепления контура отверстия в решении (3.7) нужно принять $p_k/\mu_k = 1$, $q_k = \mu_k$.

Если при $b_1 = 0$ эллипс превращается в прямолинейный разрез (трещину или жесткое линейное включение), то можно вычислить коэффициенты интенсивности моментов (КИМ) на его концах: k_{1M}^\pm (КИМ, соответствующий моменту M_y) и k_{2M}^\pm (КИМ, соответствующий моменту H_{xy}).

Проведены численные исследования для пластин с эллиптическим отверстием, изготовленных из следующих материалов: 1) композита на основе $\text{BaTiO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4$ (материал M1) [13]; 2) композита, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия CdSe , а пьезомагнитные и магнитные — BaTiO_3 (материал M2) [14]; 3) композита, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют материалу PZT-4, а пьезомагнитные и магнитные — CoFe_2O_4 (материал M3) [14]. Рассматривались три случая внешнего воздействия: механическое, электрическое или магнитное. Электрическое воздействие не приводит к существенным изменениям напряженно-деформированного состояния, поэтому результаты, полученные для этого случая, в данной работе не приводятся.

В таблице для плит из различных материалов с круговым отверстием радиусом a_1 ($b_1 = a_1$), на которые действуют механические моменты $M_y^\infty = m_y$, приведены нормированные на m_y значения моментов M_s на контуре отверстия на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от величины центрального угла отверстия θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox против часовой стрелки. Из таблицы следует, что на контуре отверстия в окрестности точки $\theta = 0$ наблюдается концентрация моментов M_s (напряжений σ_s). Наиболее значительные изменения этих моментов имеют место в плите, изготовленной из материала M3.

На рис. 1 для плиты с круговым отверстием, изготовленной из материала M3, приведены распределения момента M_s для задач ЭМУ, МУ, ЭУ, ТУ. Из рис. 1 следует, что совместный учет электрических и магнитных свойств оказывает значительное влияние на основные характеристики ЭМУС. В некоторых точках значения моментов M_s , полученные с учетом всех свойств, существенно различаются. Поэтому даже в случае механических воздействий при решении задач нельзя пренебрегать ни электрическими, ни магнитными свойствами пьезоматериалов, тем более что при действии электрических и магнитных моментов в теле возникают значительные напряжения и деформации, которые можно определять, только решая общую задачу электромагнитоупругости. На рис. 2 для плиты

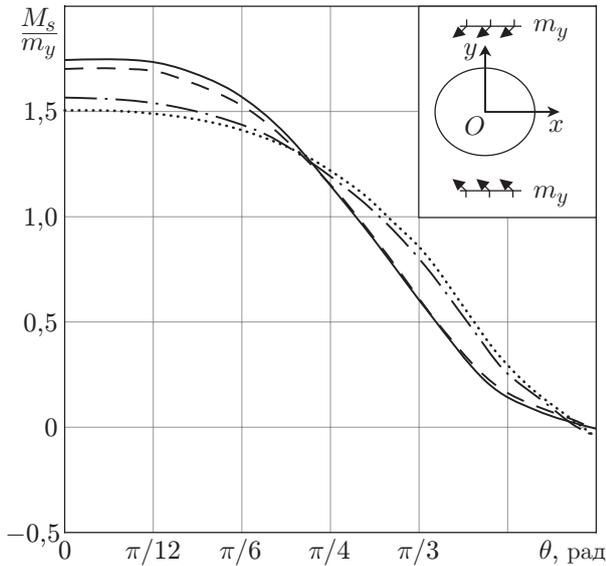


Рис. 1

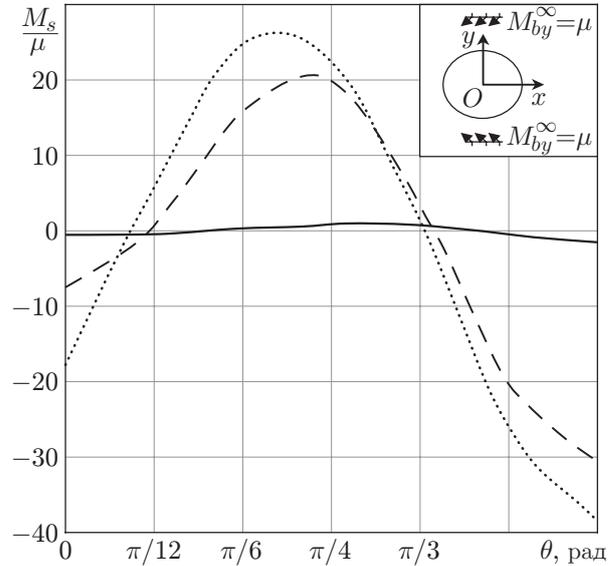


Рис. 2

Рис. 1. Схема плиты с круговым отверстием и распределение момента M_s/m_y на контуре кругового отверстия в плите из материала МЗ при действии на бесконечности механических моментов $M_y^\infty = m_y$: сплошная линия — задача ЭМУ, штриховая — задача МУ, пунктирная — задача ТУ, штрихпунктирная — задача ЭУ

Рис. 2. Схема плиты с круговым отверстием и распределение момента M_s/μ на контуре кругового отверстия в плитах из материалов М1 (сплошная линия), М2 (штриховая линия) и М3 (пунктирная линия) при действии магнитной индукции $M_{by}^\infty = \mu$

с круговым отверстием приведены распределения на контуре отверстия момента M_s/μ при действии моментов магнитной индукции $M_{by}^\infty = \mu$. Видно, что если плита находится под действием магнитного поля, приложенного на бесконечности, то в ней на контуре отверстия возникают значительные изгибающие моменты. При этом большое влияние на значения основных характеристик оказывают постоянные материала: для плиты из материала М2, пьезомагнитные и пьезоэлектрические постоянные которого на два порядка больше соответствующих постоянных материала М1, максимальные значения моментов в несколько десятков раз больше соответствующих значений моментов для плиты из материала М1.

Как показывают расчеты, на значения моментов и распределение момента M_s на контуре отверстия существенно влияет соотношение длин полуосей эллипса b_1/a_1 . Чем больше это соотношение отличается от единицы, тем больше момент M_s вблизи конца большой полуоси эллипса. На рис. 3 представлены распределения момента M_s на контуре отверстия в случае изгиба плиты механическими моментами $M_y^\infty = m_y$ при различных значениях параметра b_1/a_1 . При $b_1/a_1 \leq 10^{-3}$ вдали от концов большой оси моменты малы, а вблизи них велики.

Заключение. С использованием гипотез теории изгиба тонких плит Кирхгофа с учетом полной связности механических и электромагнитных полей и с помощью комплексных потенциалов решение задачи об электромагнитоупругом состоянии тонких плит сведено к определению четырех функций обобщенных комплексных переменных из соответствующей

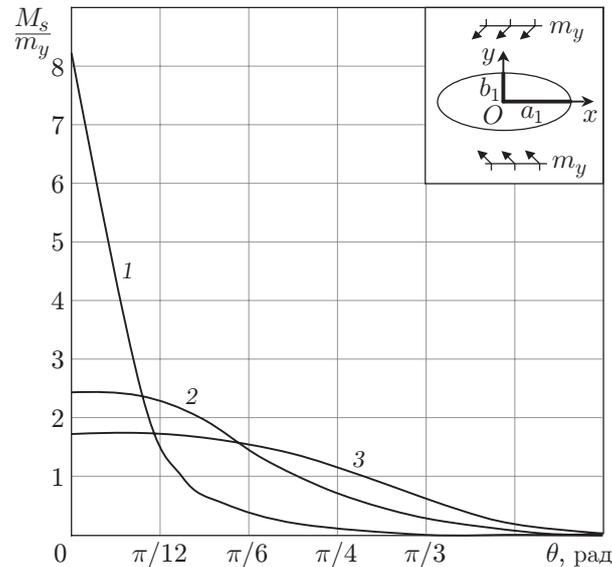


Рис. 3. Схема плиты с эллиптическим отверстием и распределение момента M_s/m_y на контуре эллиптического отверстия в плите из материала МЗ в случае действия на бесконечности механических моментов $M_y^\infty = m_y$ при различных значениях отношения длин полуосей b_1/a_1 :
 1 — $b_1/a_1 = 0,1$, 2 — $b_1/a_1 = 0,5$, 3 — $b_1/a_1 = 1,0$

ющих граничных условий. Приведены решения задач для эллиптической плиты и бесконечной плиты с эллиптическим отверстием. При построении решений использованы представление голоморфных функций в виде рядов по полиномам Фабера или рядов Лорана, а также метод рядов для нахождения неизвестных коэффициентов рядов. Для плиты с эллиптическим отверстием изучено влияние пьезоэффекта, а также закономерности изменения значений изгибающих моментов в зависимости от физико-механических постоянных материала и соотношения длин полуосей отверстия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бичурин М. И. Магнитоэлектрические материалы / М. И. Бичурин, В. М. Петров, Д. А. Филиппов, Г. Сринивасан, С. В. Нан. М.: Акад. естествознания, 2006.
2. Пятаков А. П. Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение // Бюл. Рос. магнит. о-ва (МАГО). 2006. Т. 5, № 2. С. 1–3.
3. Eringen A. C. Theory of electromagnetic elastic plates // Intern. J. Engng Sci. 1989. V. 27, N 4. P. 363–375.
4. Librescu L., Hasanyan D., Ambur D. R. Electromagnetically conducting elastic plates in a magnetic field: modeling and dynamic implications // Intern. J. Non-Linear Mech. 2004. V. 39, N 5. P. 723–739.
5. Gales C., Baroïu N. On the bending of plates in the electromagnetic theory of microstretch elasticity // Z. angew. Math. Mech. 2014. Bd 94, N 1/2. S. 55–71.
6. Калоеров С. А., Петренко А. В. Двумерная задача электромагнитоупругости для многосвязных сред // Мат. методы и физ.-мех. поля. 2008. Т. 51, № 2. С. 208–221.
7. Калоеров С. А. Комплексные потенциалы теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит // Вестн. Дон. нац. ун-та. Сер. А. Естеств. науки. 2019. № 3/4. С. 37–57.

8. **Калоеров С. А.** Краевые задачи прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит // Вестн. Дон. нац. ун-та. Сер. А. Естеств. науки. 2019. № 1. С. 42–58.
9. **Kirchhoff G. R.** Uber das gleichgewichi und die bewegung einer elastischem scheibe // J. reine angew. Math. 1850. Bd 40. S. 51–88.
10. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.
11. **Maxwell J. C.** A treatise on electricity and magnetism: In 2 vol. Oxford: Clarendon Press, 1873. V. 2.
12. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. М.: Наука, 1976.
13. **Tian W.-Y., Gabbert U.** Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids // Europ. J. Mech. Pt A. 2004. V. 23. P. 599–614.
14. **Hou P. F., Teng G.-H., Chen H.-R.** Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material // Mech. Materials. 2009. V. 41. P. 329–338.

*Поступила в редакцию 17/XII 2020 г.,
после доработки — 9/IV 2021 г.
Принята к публикации 26/IV 2021 г.*
