

8. Бордюг В. А., Ведерников Ю. А. и др. Параметрическое исследование гиперзвуковых пространственных форм. — ПМТФ, 1983, № 1.
9. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. II. М.: Физматгиз, 1963.
10. Гарбузов В. М., Колина П. П., Пятнова А. И. Расчет коэффициентов сопротивления трения и теплопередачи пластины и острого конуса, обтекаемого сверхзвуковым потоком, при турбулентном течении в пограничном слое. — Тр. ЦАГИ, 1977, вып. 1881.
11. Майкапар Г. И., Пятнова А. И. Выбор основных параметров крыла с  $\Lambda$ -образным поперечным сечением. — Учен. зап. ЦАГИ, 1984, т. 15, № 1.

Поступила 14/VI 1984 г.

УДК 539.3

## ДИНАМИКА ТРЕХМЕРНОГО ПРОЦЕССА НЕСИММЕТРИЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ С ЖЕСТКОЙ СТЕНКОЙ

В. А. Горельский, И. Е. Хорев, Н. Т. Югов  
(Томск)

Проблеме несимметричного взаимодействия деформируемых тел при динамическом нагружении посвящен ряд экспериментальных работ [1—4]. Экспериментальные исследования трехмерных течений ограничиваются в основном регистрацией конечных интегральных параметров процесса. Проведенные к настоящему времени теоретические исследования возникающих при ударных нагрузках пространственных течений касаются изучения начальной стадии и имеют описательный характер [5]. В данной работе с помощью численного метода конечных элементов [5—7] рассмотрена трехмерная задача взаимодействия деформируемого тела вращения (цилиндра) с жесткой стенкой при скорости удара 300 м/с и углах подхода от 0 до 75°.

1. Система уравнений, описывающих нестационарные адиабатные движения твердой сжимаемой среды, имеет вид

$$(1.1) \quad \rho dv_i/dt = \sigma_{ij,j};$$

$$(1.2) \quad \partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \rho v = 0;$$

$$(1.3) \quad dE/dt = (1/\rho) \sigma_{ij} \epsilon_{ij},$$

где  $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + S_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $\epsilon_{ij}$  — компоненты тензора скоростей деформаций;  $v_i$  — компоненты вектора скорости;  $\rho$  — плотность;  $E$  — удельная внутренняя энергия.

Шаровая часть тензора напряжений является функцией плотности и внутренней энергии:

$$(1.4) \quad P = \sum_{n=1}^3 K_n \left( \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right)^n \left[ 1 - K_0 \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) / 2 \right] + K_0 \rho_0 E_s$$

где  $K_n$ ,  $\rho_0$ ,  $K_0$  — константы материала.

Девятерные составляющие тензора напряжений находятся из соотношения [8]

$$(1.5) \quad 2G \left( \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right) = \frac{dS_{ij}^0}{dt} + \lambda S_{ij}$$

где  $dS_{ij}^0/dt$  — производная по Яуману, определяемая формулой

$$(1.6) \quad dS_{ij}^0/dt = dS_{ij}/dt - S_{ik} W_{jk} - S_{jk} W_{ik},$$

причем  $2W_{ij} = \partial v_i / \partial x_j - \partial v_j / \partial x_i$ . Параметр  $\lambda$  тождественно равен 0 при упругой деформации, а при наличии пластической — определяется с помощью условия текучести Мизеса

$$(1.7) \quad S_{ij} S_{ij} = \frac{2}{3} \sigma_0^2.$$

Здесь  $G$  — модуль сдвига;  $\sigma_0$  — динамический предел текучести.

2. Рассмотрим задачу соударения деформируемого цилиндра с жесткой стенкой. Вектор скорости осесимметричного ударника до начала взаимодействия совпадает с его осью симметрии и образует с нормалью к преграде угол  $\alpha$ . Ударник, занимающий область  $D$ , имеет границу  $R_1$  и  $R_2$ , где  $R_1$  — контактная граница ударника и жесткой преграды, а  $R_2$  — свободная граница ударника. Для уравнений (1.1)—(1.7) ставится задача с начальными при  $t = 0$  и граничными на поверхностях  $R_1$  и  $R_2$  условиями. Начальные условия имеют вид

$$(2.1) \quad \sigma_{ij}(0, x) = E(0, x) = 0, \quad \rho(0, x) = \rho_0, \\ v_1(0, x) = 0, \quad v_2(0, x) = -v_0 \sin \alpha, \quad v_3(0, x) = -v_0 \cos \alpha \quad \text{при } x \in D.$$

Граничные условия задаются следующим образом. На свободной поверхности

$$(2.2) \quad T_{NN}(t, x) = T_{N\tau_1}(t, x) = T_{N\tau_2}(t, x) = 0 \quad \text{при } x \in R_2.$$

На контактной поверхности между ударником и жесткой стенкой реализуется условие скольжения без трения

$$(2.3) \quad T_{N\tau_1}(t, x) = T_{N\tau_2}(t, x) = 0, \quad v_N = 0 \quad \text{при } x \in R_1,$$

где  $N$  — единичный вектор нормали к поверхности в рассматриваемой точке;  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — взаимно перпендикулярные единичные векторы в плоскости, касательной к поверхности в рассматриваемой точке;  $T_N$  — вектор силы на площадке с нормалью  $N$ . В (2.2), (2.3) индексы  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $N$  у векторов  $T_N$ ,  $v$  означают проекции их на соответствующий базисный вектор.

3. Для решения сформулированной выше краевой задачи используется метод конечных элементов [5, 7—9]. На основе этого метода строится дискретная модель тела, состоящая из конечного числа связанных соответствующим образом в угловых точках конечных элементов. Уравнение движения для типичного конечного элемента сплошной среды выводится с учетом принципа возможных скоростей. Уравнение движения для всего ансамбля элементов в предположении, что масса элементов равномерно распределена в узлах используемых в расчетах тетраэдральных элементов, имеет вид [9]

$$(3.1) \quad m_k v'_{rk} = \sum_{l=1}^L \Omega_k^{n(l)} F_{rn}^{(l)},$$

где  $m_k$  — масса  $k$ -го узла;  $v'_{rk}$  —  $r$ -я компонента ускорения  $k$ -го узла;  $F_{rn}^{(l)}$  —  $r$ -я компонента эквивалентной силы  $n$ -го узла  $l$ -го элемента. Элементы массива  $\Omega_k^{n(l)}$  определяются следующим образом:

$$\Omega_k^{n(l)} = \begin{cases} 1, & \text{если узел } n\text{-го элемента } l \text{ соответствует} \\ & \text{узлу } k \text{ связанной модели,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Входящие в (3.1) индексы принимают следующие значения:  $k = 1, 2, \dots, M$ , где  $M$  — число узлов в конечно-элементной модели цилиндра;  $r = 1, 2, 3$ ;  $n = 1, 2, 3, 4$ ;  $l = 1, 2, \dots, L$ , где  $L$  — полное число элементов.

Уравнение энергии для  $l$ -го элемента имеет вид

$$E^{(l)} = (-P + Q)V^{(l)} + V^{(l)} S_{ij} \varepsilon_{ij},$$

где  $V^{(l)}$  — относительный объем элемента;  $Q$  — искусственная вязкость.

Уравнение сохранения массы для элемента

$$(\rho/\rho_0)V^{(l)} = 1.$$

В соответствии с методом конечных элементов  $r$ -я компонента скорости внутри  $l$ -го тетраэдрального элемента выражается через четыре узловых

величины в рамках принятой в расчетах линейной аппроксимации формулой

$$(3.2) \quad v_r^{(l)} = \frac{1}{6A^{(l)}} (a_n + b_n x_1 + c_n x_2 + d_n x_3) v_{rn}^{(l)}$$

Входящие в (3.2) коэффициенты определяются через координаты для каждого из четырех узлов тетраэдрального элемента, обозначенных индексами  $p, q, s, u$ :

$$(3.3) \quad A = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_{1p} & x_{2p} & x_{3p} \\ 1 & x_{1q} & x_{2q} & x_{3q} \\ 1 & x_{1s} & x_{2s} & x_{3s} \\ 1 & x_{1u} & x_{2u} & x_{3u} \end{vmatrix}, \quad a_p = \begin{vmatrix} x_{1q} & x_{2q} & x_{3q} \\ x_{1s} & x_{2s} & x_{3s} \\ x_{1u} & x_{2u} & x_{3u} \end{vmatrix},$$

$$b_p = \begin{vmatrix} 1 & x_{2q} & x_{3q} \\ 1 & x_{2s} & x_{3s} \\ 1 & x_{2u} & x_{3u} \end{vmatrix}, \quad c_p = \begin{vmatrix} 1 & x_{1q} & x_{3q} \\ 1 & x_{1s} & x_{3s} \\ 1 & x_{1u} & x_{3u} \end{vmatrix},$$

$$d_p = \begin{vmatrix} 1 & x_{1q} & x_{2q} \\ 1 & x_{1s} & x_{2s} \\ 1 & x_{1u} & x_{2u} \end{vmatrix}.$$

Значения остальных двенадцати коэффициентов определяются по данным формулам циклической перестановкой индексов. Скорости деформации внутри элемента  $l$  вычисляются с помощью соотношения

$$\varepsilon_{ij}^{(l)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^{(l)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(l)}}{\partial x_i} \right)$$

с использованием (3.2) и (3.3).

Входящие в уравнение (3.1) компоненты эквивалентных узловых сил находятся по формулам

$$F_{1n} = -(1/6)(b_n \sigma_{11} + c_n \sigma_{12} + d_n \sigma_{13}),$$

$$F_{2n} = -(1/6)(c_n \sigma_{22} + b_n \sigma_{21} + d_n \sigma_{23}),$$

$$F_{3n} = -(1/6)(d_n \sigma_{33} + c_n \sigma_{32} + b_n \sigma_{31}).$$

При численном счете использована искусственная вязкость [10]

$$Q = \begin{cases} \frac{1}{2} \rho a_0 \left| \frac{V'}{V} \right| + 4\rho h^2 \left| \frac{V'}{V} \right|^2, & \frac{V'}{V} < 0, \\ 0, & \frac{V'}{V} = 0, \end{cases}$$

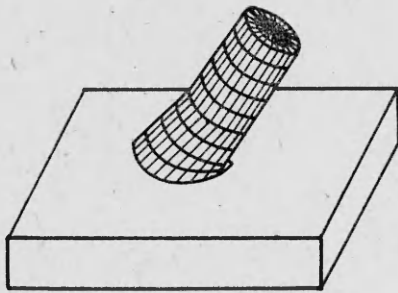
где  $a_0$  — скорость звука материала цилиндра;  $h$  — минимальная высота тетраэдра.

Временной интервал интегрирования, обеспечивающий устойчивое решение и определяемый из численного эксперимента, имеет вид

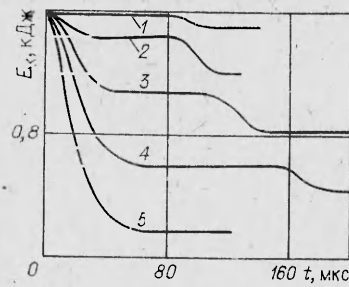
$$\Delta t = \frac{4}{5} \left( \frac{h}{\sqrt{g^2 + \sqrt{g^2 + a_0^2}}} \right), \quad g^2 = 4Q/\rho.$$

4. Исследовано взаимодействие стального цилиндра диаметром 0,0125 м и длиной 3 диаметра с жесткой стенкой. Скорость ударника составляла 300 м/с. Угол встречи варьировался от 0 до 75°. Используются в расчетах следующие численные значения констант материала:  $\rho_0 = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $a_0 = 5100$  м/с,  $\sigma_0 = 10,1 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>,  $G = 7,9 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $K_1 = 1,53 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $K_2 = 1,76 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $K_3 = 0,532 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $K_0 = 1,91$ .

Возможность детально проследить процесс взаимодействия реализовывалась построением на графопостроителе конфигураций ударников в



Ф и г. 1



Ф и г. 2.

последовательные моменты времени. На фиг. 1 приведена полученная с графопостроителя конфигурация ударника в момент времени 40 мкс при угле встречи  $30^\circ$ . Динамику взаимодействия характеризует фиг. 2, где представлены кривые изменения кинетической энергии ударника от времени в исследованном диапазоне углов встречи. Здесь и на остальных фигурах кривые 5—1 соответствуют углу встречи  $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ . Анализ кривых позволяет выделить четыре основные характерные стадии процесса. Первая из них, характеризующаяся снижением кривых, соответствует деформированию головной части цилиндра и является преобладающей при малых углах встречи и единственной при нормальном осесимметричном ударе.

Последующие горизонтальные участки кривых описывают скольжение цилиндра по стенке с одновременным его вращением при отсутствии заметной деформации.

При этом для углов соударения от  $30^\circ$  до  $60^\circ$  существует некоторый промежуток времени, в течение которого цилиндр не имеет контакта с препятствием. Передняя часть ударника в это время движется вверх от стенки, тыльная — вниз, т. е. по направлению к стенке.

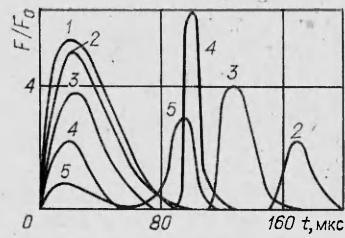
Повторное резкое падение кинетической энергии вызвано ударом тыльного конца цилиндра по препятствию. Из графика видно, что падение энергии на этой стадии для угла соударения  $45^\circ$  примерно такое же, как при взаимодействии с преградой передней части ударника, а для углов  $60^\circ$  и  $75^\circ$  даже несколько больше.

Завершающие горизонтальные участки кривых определяют стадию скольжения цилиндра по препятствию с последующим окончательным отходом от него.

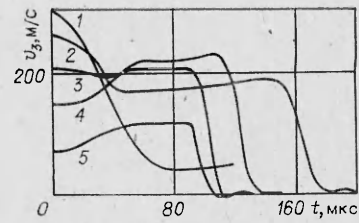
Для угла соударения  $15^\circ$  участок повторного падения кинетической энергии отсутствует. В данном случае вертикальная составляющая вектора скорости центра масс ударника с момента времени 70 мкс меняет свой знак на противоположный и цилиндр начинает постепенно отходить от стенки, имея при этом незначительную угловую скорость вращения. Причем центр масс практически совпадает с центром вращения. К моменту времени, когда тыльный конец цилиндра оказывается внизу, центр масс ударника успевает удалиться от препятствия на дистанцию, превышающую расстояние от центра вращения до тыльного конца цилиндра, который проходит над преградой, не задевая ее.

Приведенные на фиг. 3 графики сил взаимодействия ударника со стенкой во времени для различных углов соударения дополнительно характеризуют описанный многостадийный процесс. Начальные всплески кривых на фиг. 3 характеризуют взаимодействие передней части цилиндра с препятствием. Затем наблюдаются спады, которые для углов  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  идут до нуля. Для угла  $75^\circ$  о наличии постоянного контакта ударника с препятствием свидетельствует отличная от нуля до окончательного отхода цилиндра от препятствия сила взаимодействия. Вторичные всплески соответствуют удару тыльного конца ударника по стенке.

Как видно из графика, сила воздействия на преграду при ударе тыльным концом цилиндра для угла  $45^\circ$  сравнима с силой, оказываемой перед-



Ф и г. 3



Ф и г. 4

ней частью ударника, а для углов 60 и 75° даже больше. Это объясняется возрастанием за счет вращения вертикальной составляющей скорости тыльного конца цилиндра.

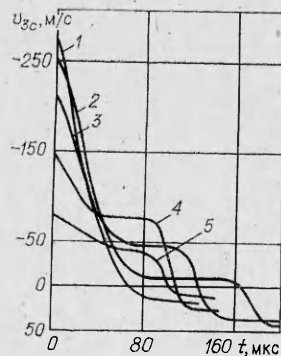
Изменения вертикальной составляющей скорости осевой точки тыльной поверхности ударника от времени для различных углов соударения представлены на фиг. 4.

Для угла 15° наиболее резко выражено торможение тыльной поверхности. Скорость с 290 м/с в начальный момент времени падает до 40 м/с к 80 мкс. Вертикальная составляющая скорости центра масс, как это видно из фиг. 5, к этому времени уже сменила свой знак и направлена вверх от преграды. С момента времени 90 мкс контакт цилиндра с преградой отсутствует, при этом ударник, двигаясь вверх, одновременно вращается, что результируется некоторым увеличением вертикальной скорости тыльной поверхности.

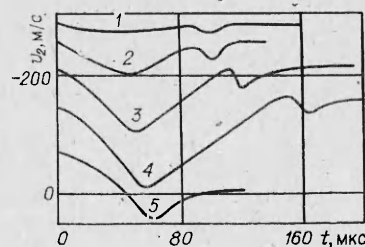
Для угла 30° наблюдается падение скорости от 260 м/с в начальный момент времени до 170 м/с к 50 мкс. Передняя часть цилиндра при этом деформируется и, кроме того, ударник изгибается в средней части. Участок примерно постоянной и равной 170 м/с скорости в интервале от 50 до 100 мкс соответствует скольжению цилиндра по жесткой стенке с его одновременным вращением, в результате чего происходит перераспределение скоростей таким образом, что вертикальная составляющая скорости осевой точки тыльной поверхности постоянна, а площадь контакта цилиндра с преградой уменьшается. При этом дальнейшей значительной деформации передней части цилиндра не происходит. С момента времени 100 мкс контакта ударника с преградой нет. Некоторое увеличение скорости при отходе цилиндра от преграды обусловлено увеличением угловой скорости вращения и соответствующей компонентой ее линейной скорости. В интервале от 120 до 150 мкс ударник, двигаясь в пространстве, вращается. Участок кривой от 160 до 220 мкс соответствует удару тыльного конца цилиндра по препятствию и последующему движению его по нему. Начиная с 220 мкс, тыльный конец цилиндра отходит от стенки, и ударник окончательно теряет контакт с препятствием.

Для угла 45° характер кривой качественно не отличается от кривой, соответствующей углу 30°, наблюдается лишь количественное различие.

Так, из-за увеличения угла встречи деформация передней кромки цилиндра выражена более сильно, за счет чего торможение тыльной поверхности, как, впрочем, и всего ударника, незначительное.



Ф и г. 5



Ф и г. 6

Вертикальная составляющая скорости от 212 м/с в начальный момент времени уменьшается до 195 м/с к 40 мкс. Затем наблюдается небольшое увеличение вертикальной скорости осевой точки тыльной поверхности, когда деформация передней части цилиндра в основном заканчивается и происходит скольжение его по препятствию до момента 80 мкс. С этого времени происходит отход передней части ударника от стенки, и в течение 30 мкс цилиндр движется в пространстве, не имея контакта с препятствием. В интервале 110 — 180 мкс происходят удар тыльного конца ударника по стенке, деформация и скольжение его по ней. Начиная со 180 мкс, тыльный конец цилиндра отделяется от препятствия и в дальнейшем удаляется от него.

Характер кривой для угла  $60^\circ$  несколько иной, чем у кривых, рассмотренных выше. Хорошо видно, что после горизонтального участка, расположенного от 0 до 10 мкс, который соответствует незначительной деформации передней кромки цилиндра (в отличие от углов  $15^\circ$ ,  $30^\circ$  и  $45^\circ$  передняя кромка деформируется здесь внутрь, к оси ударника), кривая идет вверх. Это возрастание обусловлено вращением цилиндра, которое здесь значительно сильнее, чем для меньших углов. Участок от 50 до 90 мкс более плавного возрастания кривой соответствует уменьшению линейной скорости при вращении тела в результате смещения центра вращения к тыльному концу ударника. С момента времени 90 мкс наблюдается взаимодействие тыльной части ударника с препятствием, которое длится до 110 мкс. После этого происходит отход цилиндра от стенки, и процесс взаимодействия на этом заканчивается. Кривая изменения вертикальной составляющей вектора скорости осевой точки тыльной поверхности для угла  $75^\circ$  подобна кривой для угла  $60^\circ$ , поэтому все сказанное выше сохраняет силу и для нее.

Расчеты показали, что горизонтальная составляющая вектора скорости центра масс в течение всего процесса взаимодействия сохраняет значение, равное начальному. Это есть следствие граничных условий, указанных выше (где никакого ограничения на горизонтальную составляющую скорости не накладывается). Таким образом, может происходить лишь перераспределение горизонтальной составляющей скоростей в узлах расчетной области. Для осевой точки тыльной поверхности горизонтальные составляющие скорости ударника для различных углов встречи имеют вид, показанный на фиг. 6. Подобие кривых дополнительно подтверждает общность многостадийного процесса взаимодействия цилиндра с жесткой стенкой для различных углов соударения.

Начальные спады на кривых соответствуют деформации передней части ударника и изгибу его и выражены более или менее сильно в зависимости от угла соударения.

Последующие подъемы кривых соответствуют скольжению цилиндра по препятствию, сопровождаемому вращением. При этом по мере поворота ударника и приближения его тыльного конца к стенке величина и направление горизонтальной составляющей линейной скорости при вращении меняются, чем и объясняется подъем кривых. Локальные минимумы на кривых соответствуют удару конца цилиндра о препятствие, последние горизонтальные участки — скольжению ударника по стенке с последующим отходом от нее. Как видно из графика, горизонтальная скорость на этих участках имеет значение, равное первоначальному.

Таким образом, процесс несимметричного взаимодействия деформируемого цилиндра с жесткой стенкой имеет многостадийный характер. Анализ полученных результатов позволил выделить четыре характерные стадии: деформация передней части и изгиб ударника; движение цилиндра вдоль преграды с его одновременным вращением; удар тыльным концом по препятствию и его деформация; скольжение ударника по стенке с последующим отходом от нее. Данные стадии по-разному выражены для тех или иных углов соударения как в качественном и количественном отношении, так и по продолжительности их действия.

В исследованном диапазоне начальных условий выявлено наличие в интервале  $60-75^\circ$  значения угла встречи, при котором качественно меняется механизм взаимодействия, при меньших значениях угла характеризующийся наличием стадии, когда контакт ударника с преградой отсутствует еще до полного завершения процесса.

Авторы выражают благодарность В. Г. Дулову за внимание к работе и ее обсуждение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Титов В. М., Фадеев Ю. И. Сквозное пробивание при метеоритном ударе. — Космич. исслед., 1972, т. 10, вып. 4.
2. Дулов В. Г., Бордюг В. А. и др. К вопросу оптимизации пространственных ударников. — В кн.: Материалы VII Всесоюз. конф. «Численные методы решения задач теории упругости и пластичности». Новосибирск, 1982.
3. Уткин А. В., Дремин А. Н. и др. Особенности волнообразования при больших углах соударения металлических пластин. — ФГВ, 1982, № 2.
4. Хорев И. Е., Горельский В. А. и др. Исследование деформирования и кинетики разрушения контактирующих тел при несимметричном динамическом взаимодействии. — ФГВ, 1983, № 5.
5. Johnson G. R. High velocity impact calculations in three dimensions. — J. Appl. Mech., 1977, v. 44, № 1.
6. Хорев И. Е., Горельский В. А. Численное моделирование откольных разрушений при осесимметричном взаимодействии твердых тел. — В кн.: Детонация. Материалы II Всесоюз. совещ. по детонации. Черноголовка, 1981, вып. 2.
7. Хорев И. Е., Горельский В. А. Осесимметричный откол в задачах широкогодиапазонного взаимодействия твердых тел. — ДАН СССР, 1983, т. 274, № 3.
8. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. — ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
9. Оден Дж. Конечные элементы в механике сплошной среды. М.: Мир, 1976.
10. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений. — В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967.

Поступила 17/IV 1984 г.

УДК 534.1

### АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

В. П. Ястребов  
(Ленинград)

Закономерности распространения одномерных продольных волн в нелинейных средах описаны в [1—5]. Отмечено [1, 2] существенное влияние вида зависимости между напряжением и деформацией в материале на характер волнового процесса и возможность возникновения разрывных решений (ударной волны). Автомодельные движения при весьма общем виде зависимости напряжение — деформация исследовались в [3] при задании на границе среды мгновенно приложенного постоянного напряжения. Некоторые автомодельные задачи изучались в [6], однако там имеются неточности.

В данной работе указываются условия, при которых задачи о распространении волн будут автомодельными. Такие условия обеспечиваются заданием степенной зависимости между напряжением и деформацией в материале и степенным законом изменения с течением времени величин, определяющих граничные условия. Найдены соответствующие решения. При отыскании решений широко используется метод характеристик. Комбинация этого метода с автомодельным представлением решения позволяет записать его в удобной форме. В случае разрывных решений применение метода характеристик встречает трудности. Поэтому приходится использовать традиционные методы, основанные на свойствах автомодельных задач. Это позволило получить новые результаты и дать оценку некоторых допущений, закладываемых при применении метода характеристик.

1. Рассмотрим вопрос об условиях, при которых решение автомодельное. Одномерная среда трактуется как однородный прямолинейный стержень постоянного сечения единичной площади. Пусть  $u$  — перемещение частиц стержня вдоль его оси,  $p$  — напряжение в поперечном сечении,