РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРАБОТКИ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

2022 № 3

УДК 539.3 + 551.24

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ СДВИГОВ И ПЕРЕХОДА ГЕОСРЕДЫ К НЕУСТОЙЧИВЫМ РЕЖИМАМ ДЕФОРМИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Д. С. Журкина¹, С. В. Клишин¹, С. В. Лавриков¹, М. Г. Леонов²

¹Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: daria.zhurk@gmail.com, sv.klishin@gmail.com, lvk64@mail.ru, Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия ²Геологический институт РАН,

E-mail: mgleonov@yandex.ru, Пыжёвский пер., 7, 119017, г. Москва, Россия

На основе метода дискретных элементов разработана методика численных испытаний образцов сыпучих материалов при неравнокомпонентном сжатии по различным программам нагружения. Предложен алгоритм формирования начальных упаковок частиц. Проведена серия численных расчетов при различных способах нагружения в условиях подавления дилатансии и с учетом дилатансионного изменения объема. Получены зависимости макрохарактеристик напряженно-деформированного состояния образцов в зависимости от микросвойств дискретных частиц. Показано, что превышение критической деформации сдвига приводит к неустойчивому поведению, сопровождающемуся локализацией деформаций и появлению ниспадающей ветви на диаграмме нагружения. Указаны области возможного применения разработанного способа численного моделирования локализации сдвигов.

Ключевые слова: метод дискретных элементов, упаковка, сдвиг, численное моделирование, предел упругости, прочность, неустойчивость, локализация деформаций

DOI: 10.15372/FTPRPI20220302	
------------------------------	--

В настоящее время в геотектонике, механике горных пород и механике деформируемого твердого тела весьма актуальны исследования неустойчивых режимов деформирования, сопровождающихся локализацией сдвигов и формированием изолированных поверхностей скольжения.

Локализованные режимы играют существенную роль в процессах сдвижения крупных геологических объектов [1-4]. Они могут приводить к формированию разломных зон, дроблению и разрыхлению горных пород, к дилатансионному увеличению горного давления, росту числа сейсмических событий в массиве и др. В [5] представлен обзор геологических данных по наблюдаемым блочным структурам горных пород. Показано, что такие структуры содержат сетку разломов и трещин, разбивающих породы на отдельные блоки. Отмечено, что одним из существенных факторов процесса объемной дезинтеграции (без нарушения сплошности) породных массивов является усталость горных пород, а поведение дезинтегрированных пород подчиняется законам механики гранулированных сред. Важен тот факт, что неупругая деформация горных пород может осуществляться при нагрузках, значительно меньших, чем предел

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (№ 21-17-00008), https://rscf.ru/project/21-17-00008.

их прочности, захватывая при этом объемы, относительно независимые от внешнего динамического влияния. Иными словами, такая деформация осуществляется за счет относительного сдвижения блоков вдоль поверхностей локализации.

При упругопластическом деформировании твердых тел локализация сдвигов приводит к потере устойчивости и, как следствие, к разупрочнению или разрушению материала [6-8]. В основополагающих работах Райса [9,10] проблема локализации сдвигов исследуется как проблема бифуркации. Существенную роль локализованные режимы деформирования играют в ряде прикладных задач механики горных пород и сыпучих сред, например в задачах о деформировании массива в окрестности выработки, о движении грунта за подпорной стенкой, о выпуске сыпучей среды из сходящихся каналов и др. [11-13].

В континуальной постановке моделирование локализованных режимов наталкивается на значительные математические трудности. Это связано с тем, что поверхности локализации формируются в процессе нагружения и направления их развития заранее неизвестны. Сформированные поверхности меняют картину деформирования качественно — материал разбивается на отдельные блоки, а деформирование сводится к сдвижению этих блоков как жестких целых. Диаграмма сдвига на границах блоков является разупрочняющейся, что способствует образованию областей разгрузки в окрестности поверхностей скольжения. Указанные процессы качественно меняют картину напряженного состояния среды и могут формировать регулярные диссипативные структуры [14, 15]. С математической точки зрения факт локализации приводит к необходимости учета геометрически и физически нелинейных постановок задач, а также к исследованию вопроса о единственности решения.

С другой стороны, в современной геомеханике активно развивается подход, основанный на использовании метода дискретных элементов (МДЭ) [16–18]. Здесь сплошная среда моделируется ансамблем дискретных недеформируемых частиц, а ее свойства определяются формой частиц, их начальной упаковкой и заданием потенциалов взаимодействия между частицами. Моделирование процесса деформирования сводится к интегрированию уравнений движения частиц на основе сил, возникающих за счет перекрытий между частицами при их относительном движении.

МДЭ имеет ряд преимуществ перед континуальными методами механики сплошной среды, где в рамках единого подхода учитываются физическая нелинейность, большие (конечные) деформации, локализация сдвигов, разрушение и т.д. "Плата" за указанные преимущества состоит в трудности интерпретации результатов расчетов. Располагая только информацией о микросвойствах среды (форма частиц и потенциалы взаимодействия между ними), невозможно предсказать какими континуальными макросвойствами будет обладать образец, составленный из множества дискретных частиц. Если при использовании континуальных моделей всегда есть гарантия, что любой макрообъем среды будет обладать набором свойств, заложенных в определяющих уравнениях для бесконечно малого элементарного объема, то при использовании МДЭ такой гарантии нет. Отметим, что в последние годы появились публикации, посвященные данной проблематике [19–21].

Настоящая работа посвящена разработке методики проведения численных испытаний образцов сыпучей среды на неравнокомпонентное сжатие по различным программам нагружения в рамках метода дискретных элементов. Выполнен ряд численных расчетов с целью исследования макронапряженно-деформированного состояния образцов, включая локализацию деформаций, в зависимости от заданных микросвойств дискретных частиц.

Расчеты проводились на основе созданного авторами оригинального программного комплекса по реализации МДЭ в пространственной постановке. Часть расчетов выполнялась с использованием программной системы Altair EDEM (академическая лицензия), для которой разработан ряд встраиваемых программных приложений по реализации различных способов нагружения образцов сыпучих материалов.

ОПИСАНИЕ СВОЙСТВ СРЕДЫ В МЕТОДЕ ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Свойства среды в рамках МДЭ задаются выбором формы частиц, их начальной упаковки и различных потенциалов взаимодействия между частицами. В базовой версии МДЭ форма частиц является сферической. Сила реакции, возникающая в нормальном направлении при вза-имодействии двух частиц, связана с упругим отталкиванием. Она зависит от величины перекрытия между частицами и рассчитывается на основе решения задачи Герца о соударении упругих тел [22]. Касательная сила учитывает сухое трение между частицами и вычисляется с помощью подхода Миндлина [23].

Существует множество различных модификаций МДЭ, в которых учитываются несферическая форма частиц, сопротивление качению, адгезионные и капиллярные силы, гравитационное и магнитное взаимодействие частиц, теплоперенос и др. Выберем базовую версию МДЭ и заменим потенциал Герца на потенциал, основанный на линейном законе Гука. Примем, что зависимость нормальной силы F_n от величины перекрытия δ_n на контакте между частицами имеет вид

$$F_n = k_n \delta_n - c_n \dot{\delta}_n \,, \tag{1}$$

где k_n — линейная жесткость контакта; c_n — демпфирующий коэффициент; $\dot{\delta_n}$ — относительная нормальная скорость взаимодействующих частиц. Жесткость контакта и демпфирующий коэффициент рассчитываются путем комбинации свойств материала и кинематических ограничений:

$$k_{n} = \frac{16}{15} \sqrt{R^{*}} E^{*} \left(\frac{15m^{*}V_{c}^{2}}{16\sqrt{R^{*}}E^{*}} \right)^{\frac{1}{5}},$$

$$c_{n} = \sqrt{\frac{4m^{*}k_{n}}{1 + \left(\frac{\pi}{\ln c_{r}}\right)^{2}}}.$$

Здесь m^* , R^* , E^* — соответственно обобщенные масса, радиус и модуль упругости взаимодействующих частиц; V_c — характерная скорость соударения в системе [22]. Безразмерный параметр $0 \le c_r \le 1$ — коэффициент восстановления скорости. Он определяется как отношение относительной скорости разлета частиц после их соударения к относительной скорости их подлета до соударения, взятые в проекции на ось, соединяющую центры частиц. Этот параметр характеризует вязкость взаимодействия частиц и вводится в качестве искусственного механизма диссипации энергии в алгоритмах МДЭ.

Расчет касательной составляющей силы на контакте между частицами осуществляется с учетом стадии развивающегося и стадии развитого трения:

$$F_{t} = \pm \begin{cases} |k_{n}\delta_{t} - c_{n}\dot{\delta}_{t}|, & \text{если } |k_{n}\delta_{t} - c_{n}\dot{\delta}_{t}| < \mu_{s} |F_{n}|, \\ \mu_{s} |F_{n}|, & \text{если } |k_{n}\delta_{t} - c_{n}\dot{\delta}_{t}| \ge \mu_{s} |F_{n}|, \end{cases}$$

$$(2)$$

где δ_t — касательное проскальзывание между взаимодействующими частицами; $\dot{\delta}_t$ — относительная касательная скорость частиц; μ_s — коэффициент трения скольжения; знак " \pm " выбирается в зависимости от направления взаимного проскальзывания между частицами.

ГЕНЕРАЦИЯ НАЧАЛЬНЫХ УПАКОВОК ЧАСТИЦ

Одна из проблем при решении задач в рамках метода дискретных элементов заключается в генерации начальных упаковок частиц, помещенных в заданную емкость. Если при генерации используется датчик случайных чисел, то всегда существует вероятность, что следующая размещаемая частица будет иметь область несовместности (перекрытие) с ранее размещенными частицами. Обычно в таких алгоритмах используется параметр M— число попыток размещения очередной частицы. Если в процессе реализации заданного числа попыток не удается разместить частицу в емкости без перекрытия с ранее размещенными частицами, то процесс формирования упаковки останавливается. При таком подходе удается сформировать только очень рыхлые упаковки. Так, при числе попыток M = 20 удается сгенерировать упаковку сферических частиц одинакового радиуса с относительной плотностью (отношение объема, занимаемого частицами, к объему емкости), не выше, чем $\eta \le 0.4$.

Известно, что теоретически максимальная относительная плотность упаковки равновеликих шаров по Гауссу равна $\eta=\pi/(3\sqrt{2})\approx 0.7405$. Насыпная плотность сухого кварцевого песка, достигаемая при гравитационной засыпке песка в емкость, составляет около $\eta\approx 0.6$, относительная плотность уплотненного кварцевого песка может достигать $\eta\approx 0.65$. Исходя из этого, будем рассматривать задачу формирования начального образца сферических частиц одинакового радиуса с наперед заданной относительной плотностью в диапазоне $0.6 \le \eta < 0.7405$.

Рассмотрим следующий алгоритм генерации упаковок частиц. В заданную емкость случайным образом помещаются частицы заведомо меньшего радиуса, чем требуемый. Малое значение радиуса обеспечивает случайное размещение необходимого числа частиц без взаимных перекрытий. Далее радиусы частиц равномерно увеличиваются и одновременно включается алгоритм метода дискретных элементов. При этом и частицы, и стенки емкости предполагаются абсолютно гладкими. В процессе увеличения радиусов частицы вступают во взаимодействие и переупаковываются. Рост размеров частиц останавливается после достижения радиусами фиксированного значения, которое однозначно определяется требуемым значением относительной плотности упаковки. На последнем этапе между частицами, а также между частицами и стенками емкости задаются необходимые параметры трения, и сформированная упаковка выстаивается в течение определенного времени, достаточного для затухания колебаний частиц достижения, т. е. до стационарного равновесного состояния.

В [24] предложена оригинальная модификация описанного алгоритма генерации начальных упаковок, основанная на использовании механики Аристотеля. По Аристотелю сила, действующая на тело, пропорциональна скорости его движения, а не ускорению, как это описано в механике Ньютона. Главное же обстоятельство заключается в том, что при достижении упаковкой стационарного равновесного состояния как в рамках механики Аристотеля, так и в рамках механики Ньютона результат будет одинаковым — сумма всех сил и моментов сил, действующих на каждую частицу, будут равны нулю. В [24] показано, что алгоритмы генерации упаковок частиц в рамках механики Аристотеля являются достаточно эффективными.

На основе описанных алгоритмов сформировано "цифровое кернохранилище", содержащее 26 образцов кубической формы, обладающих различными наборами значений параметров. Образцы варьировались по числу частиц, относительной плотности, параметрам трения и вязкости. На рис. 1a показан типичный образец, состоящий из 100 тысяч дискретных частиц, его начальные свойства следующие:

- относительная плотность $\eta = 0.69$;
- количество частиц N = 100000;
- радиус частиц R = 11.8 мм;
- длина ребра кубической емкости $L_0 = 1.0$ м;
- всестороннее поджатие образца $\sigma_0 = 8.093 \, \text{М}\Pi a;$
- коэффициент трения между частицами $\mu_s = 0.4$;
- коэффициент трения между частицами и стенками $\mu_p = 0$.

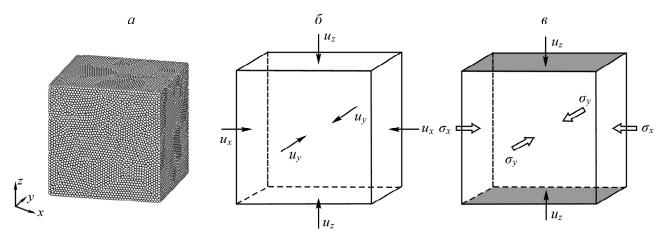


Рис. 1. Внешний вид образца, состоящего из 100 000 частиц (a); схема деформирования в условиях подавления дилатансии (δ); схема деформирования в условиях постоянного бокового поджатия (s)

РАСЧЕТ СДВИГА В УСЛОВИЯХ ПОДАВЛЕНИЯ ДИЛАТАНСИИ

Рассмотрим кубический образец сыпучей среды, обладающий приведенными выше свойствами частиц. Оси декартовой системы координат Oxyz ориентированы вдоль нормалей к ограждающим стенкам емкости. Проведем расчеты по неравнокомпонентному сжатию / растяжению образца в осях Oxyz при условии сохранения объема образца, т. е. подавления дилатансии. Под растяжением здесь понимается уменьшение заданного начального поджатия σ_0 .

Деформирование будем осуществлять за счет движения стенок емкости (каждая вдоль своей нормали) по направлению к центру емкости. Обозначим скорость пары стенок, имеющих нормаль Ox, через v_x , скорость пары стенок с нормалью Oy — через v_y и скорость пары стенок с нормалью Oz — через v_z . Тогда условия деформирования емкости (рис. 16) можно записать в виде

$$v_x = v_0 = \text{const}, \ v_y = \lambda v_0 = \text{const}, \ v_z(t) = \frac{L_0}{2t} \left(1 - \frac{L_0^2}{(L_0 - 2v_0 t)(L_0 - 2\lambda v_0 t)} \right),$$
 (3)

где $\lambda \in [-1, 1]$ — заданный параметр; t — время.

Условие (3) обеспечивает постоянную скорость сжатия образца вдоль оси Ox, пропорциональную скорость сжатия (либо растяжения) вдоль оси Oy и зависящую от времени скорость сжатия (либо растяжения) вдоль оси Oz. Последняя рассчитывается из условия постоянства объема образца в процессе нагружения. Характерная скорость $v_0 > 0$ выбирается таким образом, чтобы обеспечить условия медленного нагружения, когда скорость нагружения сравнима со скоростью релаксационных процессов в среде.

Очевидно, что описанный способ нагружения образца в осях, повернутых к исходным под углами $\pm \pi/4$, обеспечивает деформацию сдвига. В качестве примера рассмотрим расчет при $\lambda=0$. В этом случае главные значения деформаций будут $\varepsilon_1=\varepsilon_z>0,\ \varepsilon_2=0,\ \varepsilon_3=\varepsilon_x<0$, следовательно, максимальное касательное напряжение и максимальный сдвиг примут вид $\tau_{\max}=(\sigma_z-\sigma_x)/2$, $\gamma_{\max}=\varepsilon_z-\varepsilon_x$.

На рис. 2 приведена расчетная диаграмма зависимости $\tau_{\text{max}} \sim \gamma_{\text{max}}$ (кривая OABCDE — стадия активного нагружения). Видно, что в процессе сдвига диаграмма проходит три стадии — стадию упрочнения, разупрочнения и стадию остаточной прочности, т. е. описывает классическую диаграмму упругопластического поведения большинства геоматериалов. Для определения предела упругости в процессе нагружения из различных достигнутых состояний проводилась разгрузка (штриховые линии AF, BG, CH, DK, EL). При разгрузке всем стенкам придавались такие же, как и при нагружении, абсолютные значения скоростей, но противоположные по знаку.

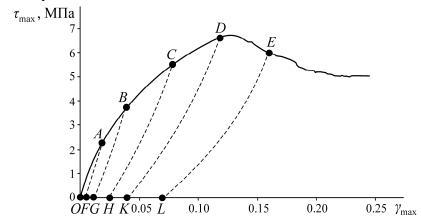


Рис. 2. Диаграмма нагружения (OABCDE) и разгрузки (AF, BG, CH, DK, EL) образца при сдвиге в стесненных условиях (подавление дилатансии)

Расчеты показали, что разгрузка из состояний, достигнутых в диапазоне O-A-B на диаграмме, приводит к остаточной деформации, которая сравнительно мала и составляет менее 1%. Это соответствует остаточному углу сдвига образца около 0.6° . При разгрузке из последующих состояний (диапазон C-D-E) остаточная деформация становится уже значительной и достигает значений $3-7^{\circ}$ %. Таким образом, для рассмотренного класса сдвигового нагружения точку B на диаграмме можно принять за предел упругости образца сыпучего материала.

Участок B-C-D на диаграмме соответствует стадии пластического деформирования с упрочнением. Очевидно, что переход диаграммы через пиковое значение (точка D) и выход на ниспадающую ветвь (участок DE) связаны с качественным изменением процесса деформирования. В реальных геоматериалах выход на ниспадающую ветвь означает локализацию деформаций. Иными словами, в образце появляются изолированные поверхности скольжения, разбивающие его на блоки.

В рассмотренном численном эксперименте кинематику процесса можно визуализировать с помощью отображения распределений смещений частиц образца u_x, u_y, u_z . Рассмотрим центральное сечение образца плоскостью $y = L_0 / 2$ и будем отображать смещения u_x, u_z для частиц, попавших в указанное сечение, в различные моменты времени. На рис. 3 показана картина распределения смещений в момент нагружения, соответствующий точкам B и D на диаграмме рис. 2. Видно, что распределение смещений для точки B (I) близко к линейному, т. е. обеспечивает близкое к однородному распределение деформаций.

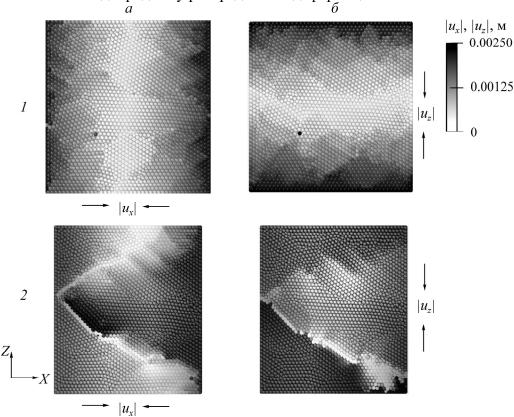


Рис. 3. Смещения в сечении плоскостью $y=L_0/2$ в момент времени, соответствующий точкам B(1) и D(2) на диаграмме рис. 2: a — смещение u_x ; δ — смещение u_z

Для точки D (2) приведены аналогичные картины распределения смещений в момент выхода диаграммы на пик нагружения. В материале отчетливо прослеживаются поверхности скольжения, разбивающие его на блоки. Характер смещений указывает на то, что деформации становятся существенно неоднородными, они локализуются вдоль границ раздела блоков и дальнейший процесс деформирования сводится к относительному сдвижению блоков как жестких целых.

РАСЧЕТ СДВИГА В УСЛОВИЯХ ДИЛАТАНСИОННОГО ИЗМЕНЕНИЯ ОБЪЕМА

Выберем пять различных образцов из сформированного цифрового кернохранилища, в которых заданы различные параметры трения между частицами. Рассмотрим образцы, в которых коэффициент трения скольжения соответствует углу сухого трения 0, 15, 30, 45 и 60°, при этом всестороннее поджатие равно $\sigma_0 = 2$ МПа.

Схема нагружения образца показана на рис. 1e. Пусть верхняя и нижняя грани сдвигаются по направлению друг к другу с постоянной малой скоростью u_z = const. Скорость сближения выбирается с тем, чтобы обеспечить условия, когда скорость нагружения сравнима со скоростью релаксационных процессов в материале. На боковых стенках поддерживается постоянное поджатие $\sigma_x = \sigma_y = 2.0$ МПа. Нагружение происходит до достижения значения деформации образца вдоль оси сжатия 10%, т. е. $\varepsilon_z = 0.1$.

На рис. 4a представлены результирующие диаграммы деформирования образца сыпучего материала $\sigma_z \sim \mathcal{E}_z$. Цифрами 0-4 обозначены кривые, полученные для различных значений угла сухого трения между частицами $0,\,15,\,30,\,45$ и 60° соответственно.

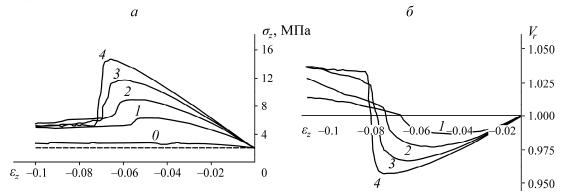


Рис. 4. Диаграммы нагружения образца (a) и относительное изменение его объема (δ) в процессе деформирования для значений угла внешнего сухого трения между частицами 0° (кривая с номером (θ), 15° (θ), 1

В результате такого нагружения диаграммы деформирования состоят из участков прямой пропорциональной зависимости между напряжениями и деформациями, где указанная зависимость становится нелинейной, а также содержат ярко выраженный предел прочности, участок разупрочнения и участок остаточной прочности. С ростом угла трения между частицами наблюдается рост секущего модуля деформации и предела прочности материала.

Диаграммы относительного изменения объема образцов V_r при нагружении для соответствующих значений угла внешнего сухого трения между частицами приведены на рис. 4 δ . Из анализа этих диаграмм можно сделать вывод о том, что сыпучий материал при нагружении до достижения предела прочности уплотняется (объем уменьшается), а затем на стадии неустойчивого поведения резко разрыхляется (объем образца увеличивается).

На рис. 5 показаны картины распределения горизонтальных смещений u_x (совпадает с u_y) в частицах на различных стадиях нагружения образца.

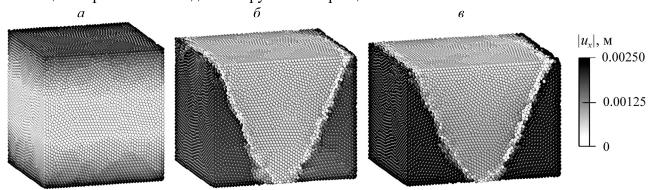


Рис. 5. Горизонтальные смещения в частицах на начальной стадии деформирования (a); в момент потери устойчивости (δ) ; в конечный момент нагружения (s)

Здесь процесс деформирования после потери устойчивости сводится к относительному сдвижению блоков как жестких целых (рис. 56, ϵ). В материале отчетливо видны сформированные изолированные поверхности локализации деформаций, вдоль которых происходит интенсивное проскальзывание.

выводы

На основе метода дискретных элементов разработан способ проведения численных испытаний на неравнокомпонентное сжатие образцов сыпучих материалов по различным программам нагружения. Определены макропараметры образцов сыпучего материала в зависимости от заданных микросвойств дискретных частиц. Показано, что превышение критического сдвига приводит к потере устойчивости образца, деформация локализуется вдоль изолированных поверхностей скольжения, что сопровождается падением напряжений (ниспадающая ветвы на диаграмме деформирования).

Разработанная методика может быть использована для моделирования локализации деформаций в крупных геологических объектах, гранулированных и сыпучих средах, а также для решения прикладных задач с учетом локализованных режимов деформирования.

Авторы выражают благодарность д.ф.-м.н., проф. А. Ф. Ревуженко за ценные обсуждения постановок задач и результатов расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- **1.** Садовский М. А., Кочарян Г. Г., Родионов В. В. О механике блочного горного массива // ДАН СССР. 1988. Т. 302. № 2. С. 306 307.
- **2. Кочарян Г. Г.** Геомеханика разломов. М.: Геос, 2016. 424 с.
- **3.** Гольдин С. В. Дилатансия, переупаковка и землетрясения // Физика Земли. 2004. № 10. С. 37 54.
- **4. Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф.** Математическое моделирование неустойчивого режима деформирования породного массива с учетом внутренних самоуравновешенных напряжений // ФТПРПИ. 2020. № 6. С. 12 29.
- **5. Leonov M. G., Kocharyan G. G., Revuzhenko A. F., and Lavrikov S. V.** Tectonics of rock loosening: geological data and physics of the process, Geodynamics and Tectonophysics, 2020, Vol. 11, Issue. 3. P. 491–521.
- **6.** Стефанов Ю. П. Локализация деформаций и разрушение в геоматериалах. Численное моделирование // Физ. мезомеханика. 2002. Т. 5. № 5. С. 107-118.
- **7. Кукуджанов В. Н., Левитин А. Л.** Реологическая неустойчивость и локализация деформаций в плоских упругопластических образцах при растяжении // Механика твердого тела. 2005. № 6. С. 97 110.
- 8. Соковиков М. А., Чудинов В. В., Уваров С. В., Плехов О. А., Ляпунова Е. А., Петрова А. Н., Баяндин Ю. В., Наймарк О. Б., Бродова И. Г. Неустойчивость пластического сдвига и локализация пластической деформации при динамическом нагружении как результат структурно-кинетических переходов в системе мезодефектов // Вестн. ПНИПУ. Механика. 2013. № 2. С. 154–175.
- **9. Райс Дж. Р.** Локализация пластической деформации // Теорет. и прикл. механика. М.: Мир, 1979. С. 439–471.
- **10. Rudnicki J. W. and Rice J. R.** Condition for localization of plastic deformation in pressure sensitive dilatant materials, J. Mech. and Phys. Solids, 1975, Vol. 23, No. 6. P. 371 390.

- **11. Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф.** О деформировании блочной среды вокруг выработки // ФТПРПИ. 1990. № 6. С. 7-15.
- **12. Клишин С. В.** Дискретно-элементное моделирование локализации деформаций в сыпучей среде при пассивном давлении на подпорную стенку // ФТПРПИ. 2021. № 5. С. 35 45.
- **13. Бушманова О. П., Бушманов С. Б.** Численное моделирование процесса деформирования материала в сходящемся канале в условиях возникновения линий локализации // ФТПРПИ. 2009. № 4. С. 33 38.
- **14. Николис Г., Пригожин И. Р.** Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 512 с.
- **15. Ревуженко А. Ф.** Механика сыпучей среды. Новосибирск: Офсет, 2003. 373 с.
- **16.** Cundall P. A. and Strack O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies, Geotechnique, 1979, Vol. 29, No. 6. P. 47–65.
- 17. Psakhie S. G., Shilko E. V., Grigoriev A. S., Astafurov S. V., Dimaki A. V., and Smolin A. Yu. A mathematical model of particle-particle interaction for discrete element based modeling of deformation and fracture of heterogeneous elastic-plastic materials, Eng. Fracture Mech., 2014, Vol. 130. P. 96–115.
- **18.** Klishin S. V., Lavrikov S. V., Mikenina O. A., and Revuzhenko A. F. Discrete element method modification for the transition to a linearly elastic body model, IOP Conf. Series, J. Phys., 2018, Vol. 973, 12008.
- **19.** Langroudi M. K., Turek S., Ouazzi A., and Tardos G. I. Cohesive powder flow: Trends and challenges in characterization and analysis, Powder Technol., 2010, Vol. 197. P. 91–101.
- **20.** Andrade J. E., Avila C.F., Hall S. A., Lenoir N., and Viggiani G. Advances in multiscale modeling and characterization of granular matter, J. Mech. Phys. Solids, 2011, Vol. 59. P. 237–250.
- **21. Zhao J. D. and Guo N.** Bridging the micro and macro for granular media: A computational multi-scale paradigm, Geomechanics from Micro to Macro, 2015, London: Taylor & Francis Group. P. 747–752.
- **22.** Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
- **23. Mindlin R. D. and Deresiewicz H.** Elastic spheres in contact under varying oblique forces, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 1953, Vol. 20. P. 327–344.
- **24.** Klishin S. V. and Mikenina O. A. DEM generation of particle packs in the Aristotelian mechanics, AIP Conf. Proc., 2021, Vol. 2448. P. 020011.

Поступила в редакцию 14/IV 2022 После доработки 22/IV 2022 Принята к публикации 06/V 2022