РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРАБОТКИ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

2021 № 1

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ НА КОНТУРЕ ВЫРАБОТКИ ВЕКТОРА НАПРЯЖЕНИЙ КОШИ И ВЕКТОРА СМЕЩЕНИЙ

А. И. Чанышев[1,2], И. М. Абдулин[1]

[1]*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,*
E-mail: a.i.chanyshev@gmail.com, *Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*
[2]*Новосибирский государственный университет экономики и управления,*
ул. Каменская, 56, 630099, г. Новосибирск, Россия

Построено точное решение задачи об определении напряженно-деформированного состояния границ выработок произвольной геометрии, если на границе заданы одновременно вектор напряжений Коши и вектор смещений. Определены в явном виде все компоненты тензоров напряжений и деформаций, компоненты вектора поворота в зависимости от упругих характеристик среды, от значений заданных функций и от дифференциальных свойств границы.

Переопределенная задача, напряжения, деформации, компоненты вектора поворота

DOI: 10.15372/FTPRPI20210102

Для обеспечения безопасного ведения горных работ необходим контроль напряженно-деформированного состояния как самого массива пород, так и элементов, поддерживающих выработанное пространство, в том числе крепей горных выработок [1 – 3]. Одним из доступных способов контроля является измерение смещений с помощью оптических систем наблюдения [4]. Современные средства позволяют контролировать смещения не только в двух, но и в трех направлениях измерений (3*D*-смещения). Пример измерений 3*D*-смещений — спутниковые наблюдения за поверхностью Земли (системы GPS, ГЛОНАСС). Если есть возможность измерить смещения в ряде точек, то решается вопрос о построении трех функций смещений как функций координат на границе тела. Однако из-за проявлений различного рода неоднородностей и ошибок измерений требуется проводить осреднения, т. е. строить корреляционные зависимости [5]. При этом за счет осреднений исчезает роль флуктуаций, т. е. малые изменения во входных данных на границе приводят к неоправданно большим изменениям функции внутри области деформирования или нагружения (корректно поставленные задачи [6]).

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № АААА-А17-117121140065-7) и при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-05-00757).

Проблема применения экспериментальных данных, полученных при измерении смещений на границе контура выработки, свободного от напряжений, разрабатывалась еще в 70-е гг. XX в. в ИГД СО РАН [7, 8]. В [9 – 11] по измеренным смещениям восстанавливалось напряженно-деформированное состояние массива пород на основе решения 2-й или 3-й краевой задачи механики деформируемого твердого тела. Эти разработки получили дальнейшее развитие в [12, 13], в которых представлены методы решения задач с переопределенными условиями на границе. К этим публикациям примыкает [14].

В настоящей работе метод, получивший название экспериментально-аналитический, применяется для оценки напряженно-деформированного состояния контура выработки произвольной геометрии, если на нем кроме нулевого вектора Коши (контур, свободный от напряжений) заданы одновременно три компоненты вектора смещений. Это может быть заглубленная выработка или выработка в условиях открытых горных работ. Постановка задачи дополнена условием присутствия на контуре выработки вектора напряжений Коши, не равного нулю (контур выработки может быть нагружен какими-то усилиями). Полученное точное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии границы массива пород с одновременно заданными на нем вектором напряжений Коши и вектором смещений может быть использовано для оценки состояния обделок тоннелей любого сечения (круглого, эллиптического и др.), различного рода крепей. Для этого требуется знать механические характеристики материалов конструкций, вид уравнения исследуемого контура, три функции смещений как функции координат границы.

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Пусть на поверхности какого-либо тела заданы как функции координат поверхности три компоненты вектора напряжений Коши:

$$\begin{cases} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = p_x^n, \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z = p_y^n, \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z = p_z^n. \end{cases} \tag{1}$$

Предположим, что поверхность, на которой выполняются (1), задана уравнением

$$y = f(x, z) \tag{2}$$

или

$$\Phi(x, y, z) = y - f(x, z) = 0\,. \tag{3}$$

Пусть на поверхности (2) заданы еще компоненты вектора смещений:

$$\begin{cases} u_x = \varphi(x, y, z)\big|_\Gamma = \varphi(x, f(x, z), z) = \varphi_1(x, z), \\ u_y = \psi(x, y, z)\big|_\Gamma = \psi(x, f(x, z), z) = \psi_1(x, z), \\ u_z = \chi(x, y, z)\big|_\Gamma = \chi(x, f(x, z), z) = \chi_1(x, z), \end{cases} \tag{4}$$

где $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$ — известные функции координат x, z, принадлежащих поверхности (2).

Поставим следующую задачу: найти по условиям (1), (2), (4) все компоненты тензоров напряжений и деформаций, вектора поворота в точке поверхности тела. Рассмотрим градиент функции $\Phi(x, y, z)$:

$$\mathrm{grad}\Phi(x, y, z) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, 1, -\frac{\partial f}{\partial z} \right). \tag{5}$$

Вектор $\vec{N}$ из (5) направлен по нормали к (3) или (2), его длина равна

$$\left|\vec{N}\right| = \sqrt{f_x'^2 + f_z'^2 + 1}\,. \tag{6}$$

Направляющие косинусы в (1) определяются из (5), (6):

$$n_x = -\frac{f_x'}{\sqrt{f_x'^2 + f_z'^2 + 1}}, \quad n_y = \frac{1}{\sqrt{f_x'^2 + f_z'^2 + 1}}, \quad n_z = -\frac{f_z'}{\sqrt{f_x'^2 + f_z'^2 + 1}}. \tag{7}$$

От функций u_x, u_y, u_z в левой части (4) найдем дифференциалы. С одной стороны, имеем

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}dx + \frac{\partial u_x}{\partial y}dy + \frac{\partial u_x}{\partial z}dz, \quad du_y = ..., \; du_z = ... \,. \tag{8}$$

С другой стороны, рассматривая их на поверхности (2), где $dy = f_x'dx + f_z'dz$, из (8) получаем

$$\begin{cases} du_x = \dfrac{\partial u_x}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\Big[\, f_x'dx + f_z'dz \Big] + \dfrac{\partial u_x}{\partial z}dz, \\ du_y = \dfrac{\partial u_y}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u_y}{\partial y}\Big[\, f_x'dx + f_z'dz \Big] + \dfrac{\partial u_y}{\partial z}dz, \\ du_z = \dfrac{\partial u_z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\Big[\, f_x'dx + f_z'dz \Big] + \dfrac{\partial u_z}{\partial z}dz. \end{cases} \tag{9}$$

Рассмотрим правые части (4). Вычисляя дифференциалы от функций $\varphi_1, \; \psi_1, \; \chi_1,$ находим выражения

$$d\varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}dz, \quad d\psi_1 = ..., \; d\,\chi_1 = ... \tag{10}$$

Сравнивая (9), (10), имеем следующие равенства:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} f_x', \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} f_x', \quad \frac{\partial \chi_1}{\partial x} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial y} f_x', \tag{11}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial u_x}{\partial y} f_z' + \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\partial u_y}{\partial y} f_z' + \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial \chi_1}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x} f_z' + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \tag{12}$$

Если к уравнениям (1), (11), (12) добавить шесть соотношений закона Гука, то в итоге получим систему из 15 уравнений для 15 неизвестных:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}, \omega_x, \omega_y, \omega_z,$$

где $\varepsilon_x, \; \varepsilon_y, \; \varepsilon_z, \; \varepsilon_{xy}, \; \varepsilon_{xz}, \; \varepsilon_{yz}$ — компоненты тензора деформаций; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — компоненты вектора поворота:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right), \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right), \quad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right). \tag{13}$$

Понизим порядок этой системы.

С учетом (7) перепишем (1) в виде

$$\begin{cases} \sigma_x f_x' - \tau_{xy} + \tau_{xz} f_z' = \tilde{p}_x^n, \\ \tau_{xy} f_x' - \sigma_y + \tau_{yz} f_z' = \tilde{p}_y^n, \\ \tau_{xz} f_x' - \tau_{yz} + \sigma_z f_z' = \tilde{p}_z^n, \end{cases} \tag{14}$$

где $\tilde{p}_x^n = -p_x^n \sqrt{f_x'^2 + f_z'^2 + 1}$, $\tilde{p}_y^n = -p_x^n \sqrt{f_x'^2 + f_z'^2 + 1}$, $\tilde{p}_z^n = -p_z^n \sqrt{f_x'^2 + f_z'^2 + 1}$.

Соотношения (11), (12) представим как

$$\begin{cases} \varepsilon_x + (\varepsilon_{xy} - \omega_z) f_x' = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} + \omega_z + \varepsilon_y f_x' = \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x}, \\ \varepsilon_{xz} - \omega_y + (\varepsilon_{yz} + \omega_x) f_x' = \dfrac{\partial \chi_1}{\partial x}, \quad (\varepsilon_{xy} - \omega_z) f_z' + \varepsilon_{xz} + \omega_y = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z}, \\ \varepsilon_y f_z' + \varepsilon_{yz} - \omega_x = \dfrac{\partial \psi_1}{\partial z}, \quad (\varepsilon_{yz} + \omega_x) f_z' + \varepsilon_z = \dfrac{\partial \chi_1}{\partial z}. \end{cases} \tag{15}$$

Подставляя закон Гука в (15), находим систему уравнений в деформациях.

В системе (16) исключим компоненты вектора поворота. В результате получаем систему из шести уравнений для определения шести неизвестных $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$:

$$\begin{cases} [\varepsilon_x(1-\nu) + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)] f_x' - \varepsilon_{xy}(1-2\nu) + (1-2\nu)\varepsilon_{xz} f_z' = \dfrac{\tilde{p}_x^n (1-2\nu)(1+\nu)}{E}, \\ \varepsilon_{xy}(1-2\nu) f_x' - [\varepsilon_y(1-\nu) + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)] + (1-2\nu)\varepsilon_{yz} f_z' = \dfrac{\tilde{p}_y^n (1-2\nu)(1+\nu)}{E}, \\ \varepsilon_{xz}(1-2\nu) f_x' - (1-2\nu)\varepsilon_{yz} + [\varepsilon_z(1-\nu) + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)] f_z' = \dfrac{\tilde{p}_z^n (1-2\nu)(1+\nu)}{E}, \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x + 2\varepsilon_{xy} f_x' + \varepsilon_y f_x'^2 = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} + f_x' \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x}, \\ \varepsilon_z + 2\varepsilon_{yz} f_z' + \varepsilon_y f_z'^2 = \dfrac{\partial \chi_1}{\partial z} + f_z' \dfrac{\partial \psi_1}{\partial z}, \\ \varepsilon_{xz} + \varepsilon_{xy} f_z' + \varepsilon_{yz} f_x' + \varepsilon_y f_x' f_z' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \chi_1}{\partial x} + f_x' \dfrac{\partial \psi_1}{\partial z} + f_z' \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right). \end{cases} \tag{17}$$

Система (16), (17) — система линейных алгебраических уравнений для шести неизвестных. Чтобы ее решение существовало и было единственным, необходимо, чтобы ее определитель был ненулевой. Введем вспомогательные обозначения:

$$f_x' = \alpha, \quad f_z' = \beta. \tag{18}$$

Тогда определитель Δ получает вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (1-\nu)\alpha & \nu\alpha & \nu\alpha & -(1-2\nu) & (1-2\nu)\beta & 0 \\ -\nu & -(1-\nu) & -\nu & (1-2\nu)\alpha & 0 & (1-2\nu)\beta \\ \nu\beta & \nu\beta & (1-\nu)\beta & 0 & (1-2\nu)\alpha & -(1-2\nu) \\ 1 & \alpha^2 & 0 & 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 1 & 0 & 0 & 2\beta \\ 0 & \alpha\beta & 0 & \beta & 1 & \alpha \end{vmatrix}.$$

Раскрывая Δ стандартным образом, находим

$$\frac{\Delta}{(1-2\nu)^2(1-\nu)} = (\alpha^2 + \beta^2 + 1)^3. \tag{19}$$

Из (19) следует, что определитель Δ в случае $\nu \neq 1/2$, $\nu \neq 1$, не ноль, т. е. (16), (17) имеют единственное решение. Таким образом однозначно определяются все деформации, напряжения, компоненты вектора поворота.

Приведем решение системы (16), (17):

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x = K(\alpha m_1[2(1-\nu)(\alpha^2+\beta^2+1)-\alpha^2]+\alpha^2[m_2-\beta m_3]+\\
&\quad +(1-2\nu)\{[(1-\nu)(\alpha^2+\beta^2+1)-\alpha^2][(\beta^2+1)l_1-2\alpha\beta l_3]+[\beta^2-\nu(\alpha^2+\beta^2+1)]\alpha^2 l_2\}),\\
&\varepsilon_y = -K(\alpha m_1+\beta m_3+[2(1-\nu)(\alpha^2+\beta^2+1)-1]m_2+\\
&\quad +(1-2\nu)\{[\nu(\alpha^2+\beta^2+1)-\alpha^2]l_1+[\nu(\alpha^2+\beta^2+1)-\beta^2]l_2-2\alpha\beta l_3\}),\\
&\varepsilon_z = K(\beta m_3[2(1-\nu)(\alpha^2+\beta^2+1)-\beta^2]+\beta^2[m_2-\alpha m_1]+\\
&\quad +(1-2\nu)\{[(1-\nu)(\alpha^2+\beta^2+1)-\beta^2][(\alpha^2+1)l_2-2\alpha\beta l_3]+[\alpha^2-\nu(\alpha^2+\beta^2+1)]\beta^2 l_1\}),\\
&\varepsilon_{xy} = K(-m_1[(1-\nu)(\alpha^2+\beta^2+1)-\alpha^2]+\alpha m_2[(1-\nu)(\alpha^2+\beta^2+1)-1]+\alpha\beta m_3+\\
&\quad +(1-2\nu)\{\alpha(\beta^2+1)l_1+[\nu(\alpha^2+\beta^2+1)-\beta^2]l_2\}+\beta[(1-\nu)(\alpha^2+\beta^2+1)-2\alpha^2]l_3),\\
&\varepsilon_{xz} = K(\beta m_1[(1-\nu)(\alpha^2+\beta^2+1)-\alpha^2]+\alpha\beta m_2+\alpha m_3[(1-\nu)(\alpha^2+\beta^2+1)-\beta^2]+\\
&\quad +(1-2\nu)\{-\alpha\beta[(\beta^2+1)l_1+(\alpha^2+1)l_2]+[2\alpha^2\beta^2+(1-\nu)(\alpha^2+\beta^2+1)]l_3\}),\\
&\varepsilon_{yz} = K(\alpha\beta m_1+\beta m_2[(1-\nu)(\alpha^2+\beta^2+1)-1]-m_3[(1-\nu)(\alpha^2+\beta^2+1)-\beta^2]+\\
&\quad +(1-2\nu)\{\beta[\nu(\alpha^2+\beta^2+1)-\alpha^2]l_1+\beta(\alpha^2+1)l_2+\alpha[(1-\nu)(\alpha^2+\beta^2+1)-2\beta^2]l_3\}).
\end{aligned} \tag{20}$$

Здесь $K=((1-\nu)(1-2\nu)(\alpha^2+\beta^2+1)^2)^{-1}$; символами m_1, m_2, m_3 обозначены правые части (17); l_1, l_2, l_3 — правые части (18).

З а м е ч а н и е. Заметим, что уравнения (16) — это аналог уравнений равновесия, а уравнения (17) — условия совместности деформаций для случая, когда на поверхности заданы три смещения как функции координат поверхности. По смещениям однозначно с помощью формул Коши определяются только три деформации на поверхности, а для нахождения трех других деформаций получаются условия совместности деформаций в виде (17).

То, что (20) является решением системы, проверяется непосредственной подстановкой (20) в (16), (17).

АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

В формулах (20) наблюдается определенная симметрия (ср. выражения для ε_{xy} и ε_{yz}, для ε_x и ε_z). Из (20) вытекает следующая формула для изменения объема в точке тела на его поверхности в случае $p_x^n = p_y^n = p_z^n = 0$:

$$\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z = \frac{(1-2\nu)[(1+\beta^2)l_1+(1+\alpha^2)l_2-2\alpha\beta l_3]}{(1-\nu)(\alpha^2+\beta^2+1)}.$$

С учетом l_1, l_2, l_3 получаем, что

$$\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z = \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)(\alpha^2+\beta^2+1)}\left[(\beta^2+1)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\alpha\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\beta\frac{\partial\psi_1}{\partial z}+(\alpha^2+1)\frac{\partial\chi_1}{\partial z}-\alpha\beta\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)\right].$$

Как частный случай при $\alpha=\beta=0$ находим

$$\varepsilon_x = l_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu}{1-\nu}(l_1 + l_2) = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\chi_1}{\partial z}\right),$$

$$\varepsilon_z = l_2 = \frac{\partial\chi_1}{\partial z}, \ \varepsilon_{xy} = 0, \ \varepsilon_{xz} = l_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right), \varepsilon_{yz} = 0.$$

Говоря о решении (20), следует заметить, что оно относится к случаю, когда одна из координат поверхности может быть выражена через две другие. К такому классу поверхностей относятся выемки в виде эллипсоидов в случае подземных работ, конусообразных поверхностей при открытым способе добычи полезных ископаемых. Вместе с тем в горном деле существует другой класс поверхностей, который не описывается уравнением (2). К ним относятся цилиндрические поверхности, встречающиеся в шахтном производстве (стволы, штреки). Покажем, как и в этом случае могут быть найдены все перечисленные выше величины.

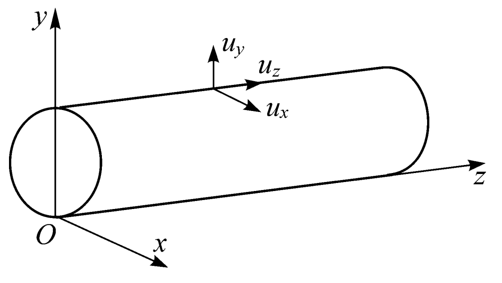
Пусть имеется горная выработка с поперечным сечением, описываемым уравнением

$$\Phi(x, y) = 0. \tag{21}$$

Считается, что ось z прямоугольной декартовой системы координат направлена вдоль образующей цилиндрической поверхности (рисунок). Сечением здесь может служить любая кривая, в том числе эллипс, трапеция, прямоугольник и т.д. В виде, разрешенном относительно координаты y, (21) запишется как

$$y = f(x). \tag{22}$$

Найдем градиент функции $y - f(x) = 0$. Координаты этого вектора равны $(-\partial f/\partial x, 1, 0)$. Пусть на поверхности цилиндрической выработки известны из экспериментов смещения u_x, u_y, u_z как функции координат x, y, z. Для простоты рассмотрения будем считать, что контур выработки свободен от напряжений. Однако, не ограничивая общности, примем, что вектор Коши $\vec{p}_n$ на поверхности цилиндра не ноль ($\vec{p}_n \neq \vec{0}$), т. е. имеем подкрепленную выработку.



Выработка цилиндрической формы с заданными на ней смещениями u_x, u_y, u_z как функциями координат поверхности

Запишем условия равновесия на поверхности выработки. Имеем

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2}}(-f_x', 1, 0), \tag{23}$$

$$\begin{cases} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = p_x^n, \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = p_y^n, \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = p_z^n. \end{cases} \tag{24}$$

Считаем далее, что на контуре заданы условия (4), которые в нашем случае означают, что

$$\begin{cases} u_x = \varphi(x,y,z)\big|_{\Gamma} = \varphi(x, f(x), z) = \varphi_1(x,z), \\ u_y = \psi_1(x,z), \\ u_z = \chi_1(x,z). \end{cases} \qquad (25)$$

Отсюда следует, что существуют соотношения (11), (12), в которых частная производная $f_z' = 0$. При этом остается прежней задача: по условиям (24), (25) восстановить в точке поверхности тела все компоненты тензоров напряжений, деформаций, вектора поворота.

В итоге имеем систему уравнений (16), (17) с условием $f_z' = 0$ $(\beta = 0)$. На этой основе находятся все деформации согласно (20), где $\alpha = f_x'$, $\beta = 0$. По деформациям находим напряжения и компоненты вектора поворота.

По такому же сценарию можно рассматривать пластическое и запредельное состояния массива пород вблизи контура выработки. Полученное решение по построению справедливо на границе; чтобы его продолжить внутрь области деформирования, требуется привлекать дифференциальные уравнения равновесия Коши, условия совместимости Сен-Венана. Это решение в виде (20) и (25) будет служить начальными данными при интегрировании перечисленных дифференциальных уравнений.

ВЫВОДЫ

Представлено решение задачи об определении напряженно-деформированного состояния поверхности массива горных пород, если на ней заданы одновременно вектор напряжений Коши и вектор смещений. Получена система шести линейных алгебраических уравнений, состоящая из трех уравнений равновесия на поверхности тела (условий Коши) и трех уравнений совместности деформаций. Ненулевой определитель означает, что решение системы существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных. Решение получено в явном виде как аналитическая формула. Задавая различную геометрию поверхностей массива, можно с использованием полученных формул исследовать напряженно-деформированное состояние обделок тоннелей различного сечения, крепей выработок разной формы, если на них проводить измерения смещений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Козырев А. А., Панин В. И., Семенова И. Э., Журавлева О. Г.** О геодинамической безопасности горных работ в удароопасных условиях на примере Хибинских апатитовых месторождений // ФТПРПИ. — 2018. — № 5. — С. 33 – 44.
2. **Инумула С., Бади Д.** Численная и аналитическая оценка факторов, влияющих на устойчивость борта разреза Дорли (Индия) // ФТПРПИ. — 2019. — № 3. — С. 37 – 43.
3. **Верхоланцев А. В., Дягилев Р. А., Шулаков Д. Ю., Шкурко А. В.** Мониторинг сейсмического воздействия взрывов на карьере “Шахтау” // ФТПРПИ. — 2019. — № 2. — С. 59 – 69.

4. **Кирилловский В. К., Ле Зуй Туан.** Оптические измерения. Ч. 6. Инновационные направления в оптических измерениях и исследованиях оптических систем. — СПб.: НИУ ИТМО, 2008. — 131 с.
5. **Боровков А. А.** Математическая статистика. — СПб.: Лань, 2010. — 704 с.
6. **Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.** Дифференциальные уравнения. — М.: Физматлит, 2005. — 256 с.
7. **Грицко Г. И., Власенко Б. В., Мусалимов В. М.** Экспериментально-аналитический метод определения напряжений в угольном пласте // ФТПРПИ. — 1971. — № 1. — С. 3–10.
8. **Грицко Г. И., Власенко Б. В., Шемякин Е. И.** Экспериментально-аналитический метод определения напряжений в массиве горных пород. — Новосибирск: Наука, 1976. — 192 с.
9. **Грицко Г. И., Цыцаркин В. Н.** Определение напряженно-деформированного состояния массива вокруг напряженных пластовых выработок экспериментально-аналитическим методом // ФТПРПИ. — 1995. — № 3. — С. 18–21.
10. **Миренков В. Е., Шутов В. А., Полуэктов В. А.** Экспериментально-аналитическое определение контактных условий // Изв. вузов. Строительство. — 2010. — № 5 (617). — С. 10–15.
11. **Акимов В. С., Цыцаркин В. Н.** Определение границы области неупругих деформаций вокруг круговой выработки // Горное давление в капитальных и подготовительных выработках. — Новосибирск, 1979. — С. 84–87.
12. **Шваб А. А.** Некорректные статические задачи теории упругости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1989. — Т. 6. — С. 98–106.
13. **Шваб А. А.** Существенно переопределенная задача теории упругости // Сиб. журн. индустр. матем. — 2001. — Т. 4. — №. 1. — С. 204–207.
14. **Чанышев А. И., Вологин Д. А.** Определение напряженно-деформированного состояния и дефектности массива пород по данным измерений смещений на его поверхности. Ч. 1: Построение аналитических решений // ФТПРПИ. — 2011. — № 4. — С. 3–11.

Поступила в редакцию 25/XI 2020
После доработки 23/XII 2020
Принята к публикации 15/I 2021