

УДК: 532.5.013.4

Структуры, масштабы и корреляционные характеристики течения термовязкой жидкости в неизотермическом слое*

Ю.М. Куликов, Э.Е. Сон

Объединенный институт высоких температур РАН, Москва

E-mail: kulikov-yurii@yandex.ru; son.eduard@gmail.com

Исследуются процессы турбулентного перемешивания в течении термовязкой жидкости в трехмерной кубической области, периодически продолженной в двух направлениях (X и Y). Турбулизация течения возникает под воздействием двумерных хаотических возмущений при среднемассовом числе Рейнольдса $Re_1 = 4704$. Структура вихревого поля обсуждается в терминах поверхностей Q -критерия и локальной энтрофии ζ_f . На дальних стадиях эволюции течения рассматриваются эйлеровы коэффициенты корреляции для пульсаций скорости (автокорреляционные функции), а также взаимные корреляции пульсаций давления и температуры. Проведено расщепление эйлерова коэффициента корреляции для анализа корреляционных характеристик в направлении периодичности, а также между плоскостями, параллельными стенкам, ограничивающим область в направлении Z . Приведены оценки интегрального масштаба в зависимости от расстояния до стенки. Проведено рассмотрение течения в терминах вязких масштабов, выполнена оценка сеточного разрешения участков течения, соответствующих логарифмическому пограничному слою и пристеночным тепловым слоям.

Ключевые слова: термовязкая жидкость, Q -критерий, энтрофия, автокорреляционные функции скорости, взаимные корреляционные функции, шпильковидный вихрь, эйлеров коэффициент корреляции, длина корреляции, интегральный масштаб, скорость трения, единицы стенки.

Введение

За время развития теории турбулентности в XX веке сформировалось несколько подходов [1] к изучению таких течений. Одним из наиболее ранних является статистический, основывающийся на представлении о том, что турбулентность есть случайное явление. Таким образом, делается попытка связать статистические и физические свойства потока (гипотеза Буссинеска, модели турбулентности с вихревой вязкостью). Связь между физическими и статистическими свойствами потока устанавливалась на основе аналогии между процессами переноса в газе, находящемся в состоянии локально-термодинамического равновесия, и хаотическим движением жидких частиц [2]. По мере развития экспериментальных методов появилось направление, основанное на исследованиях различных структур в жидкости, что привело к установлению большого числа коллективных движений, открытию разнообразных типов вихрей и иных когерентных структур. Последним из появившихся и наиболее современным является направление, рассматривающее турбулентность с позиции динамических систем.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-708-00484) госзадания ОИВТ РАН.

Постановка задачи, рассматриваемой в настоящей работе, подробно описывалась в [3]. Результаты, обсуждаемые далее, получены на основе моделирования развития неустойчивости в течении термовязкой жидкости в трехмерной расчетной области, периодически продолженной в двух направлениях. В качестве характеристики основного течения задается профиль скорости, обладающий точкой перегиба. Начальное распределение скорости является согласованным с температурным полем и перепадом давления, поддерживаемым постоянным в одном из направлений периодичности. На стенках ставятся условия постоянной температуры и прилипания жидкости. Возмущение профиля скорости основного течения вызывается двумерными хаотическими пульсациями в плоскости, параллельной стенкам. Такая постановка позволяет проследить процесс разрушения основного течения и исключить блокирующий эффект стенки.

Расчет течения проводился на последовательности сеток с равномерным числом ячеек по трем направлениям, количество которых составляло 64^3 , 128^3 и 256^3 штук в диапазоне среднemasсовых чисел Рейнольдса $Re_1 = 18-4704$ при малых начальных интенсивностях пульсаций ($I \approx 2,5-5\%$). Моделирование показало, что в зависимости от среднemasсового числа Рейнольдса Re_1 наблюдаются два сценария эволюции течения. При $Re_1 \lesssim 1600$ неустойчивый профиль скорости разрушается под воздействием возмущений малой амплитуды, а в дальнейшем происходит реламинаризация течения с возникновением устойчивого профиля без точки перегиба. Таким образом, течение термовязкой жидкости с точкой перегиба оказывается неустойчивым и не наблюдаемым. В случае турбулентного режима эволюции происходит резкое падение кинетической энергии в течении, что связано с крупномасштабным смещением. Этот процесс приводит к постепенному выравниванию температуры и появлению двух пристеночных слоев.

В настоящей работе турбулизация в термовязкой жидкости рассматривается с точки зрения структур, возникающих в течении и определяемых с помощью Q -критерия, и уровней локальной энтропии. Во второй части работы особенности течения обсуждаются на основе автокорреляционных функций скорости, а также взаимных корреляций скорости и температуры. В заключительном разделе течение при длительных временах эволюции рассматривается в терминах вязких масштабов.

1. Структура вихревого поля

Непосредственный анализ структуры вихревого поля представляет собой инструмент для понимания сложных вихревых течений. Его успех напрямую связан, во-первых, с правильной идентификацией формы и положения вихрей, и, во-вторых, с визуализацией результатов [4].

В сложных течениях имеется большое количество взаимодействующих вихрей, которые деформируются при вращении и трудно воспринимаются при графическом отображении. Как когерентные структуры, так и вихри не имеют четкого физического определения и в общем случае представляют собой некоторые образования, возникающие в потоке и оказывающие влияние на процесс переноса пассивного скаляра. Вихрями часто называются области сильной завихренности, однако не существует универсального порога завихренности, выше которого ее можно считать большой. Как результат, различные пороги визуализации модуля завихренности $|\omega|$ (или локальной энтропии ζ_l в некоторой точке) приводят к отображению вихревых структур совершенно различной формы. Кроме того, завихренность может иметь большие значения в плоскопараллельных сдвиговых течениях, где вихри отсутствуют вообще. Таким образом, недостаток этого подхода связан с тем, что завихренность «не различает» между собой завихренные и сдвиговые движения.

В работе [4] был предложен метод определения вихрей непосредственно по полю скорости. Он позволяет найти точку внутри вихря, вокруг которой происходит вращение. С учетом направления скоростей в окрестности этой точки определяется размер области, совершающей коллективное вихревое движение. Вместе с тем, такое определение нельзя считать строго обоснованным, так как оно не является инвариантным относительно преобразований вращения и в различных системах отсчета дает разные результаты. В нем также требуется задавать произвольным образом пороги для отображения структур, число итераций «роста» вихревой структуры относительно центра вращения, скорость убывания силы вихря по мере удаления от центра. Сама сила вихря выбирается достаточно произвольно, исходя из величины компонент скорости в окружающих точках.

В механике сплошных сред величина или принцип (утверждение) являются объективными, если они остаются инвариантными при следующих преобразованиях старой системы координат x в новую \hat{x} [5]:

$$\hat{x} = \mathbf{Q}(t)x + \mathbf{b}(t),$$

где $\mathbf{Q}(t)$ — собственный ортогональный тензор, $\mathbf{b}(t)$ — трансляционный вектор, зависящий от времени.

В настоящее время существует устойчивая тенденция ассоциировать распределение завихренности в течении с вихрями, действительно существующими в нем. Таким образом, общий процесс диссипации сводится к двум идеям: растяжению вихря и его последующему распаду на более мелкие вихри, что является скорее математической, а не физической картиной. Некоторые специалисты [1] указывают на то, что завихренность есть исключительно математическое понятие, которое «конструируется» из градиентов скорости потока (физические величины). То же самое касается и тензора скоростей деформации — обе эти величины возникают из прямого разложения тензора градиентов скоростей.

Опираясь на свойство объективности, в работе [5] было дано определение вихря как набора траекторий жидких частиц, вдоль которых тензор ускорений деформации является неопределенным по направлениям нулевой деформации. Физически этот объективный критерий определяет вихри как материальные трубки, в которых элементы оказываются сонаправлены (коллинеарны) с направлениями собственных векторов тензора деформации в данной точке.

Q -критерий хронологически является самым ранним, он определяет вихрь как связанную область в течении, имеющую положительный второй инвариант тензора градиента скоростей $Q > 0$, и рассчитывается как

$$Q = \frac{1}{2}(|\mathbf{\Omega}|^2 - |\mathbf{S}|^2), \quad (1)$$

где $\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{v} - (\nabla\mathbf{v})^T]$ — тензор завихренности, $\mathbf{S} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T]$ — тензор скоростей деформации, а операция $|\dots|$ обозначает евклидову норму матрицы. В дальнейшем для определения положения вихрей будет использоваться именно соотношение (1).

Появившийся позже Δ -критерий также является инвариантным относительно преобразований Галилея и имеет вид

$$\Delta = \left(\frac{Q}{3}\right)^3 + \left(\frac{\det \nabla\mathbf{v}}{2}\right)^2 > 0. \quad (2)$$

Кроме того, существует еще λ_2 -критерий, где вихри рассматриваются как области, в которых

$$\lambda_2(\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2) < 0, \quad (3)$$

где $\lambda_2(\dots)$ определяет промежуточное (среднее) значение симметричного тензора $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$.

Попробуем выделить наиболее интересные структуры в жидкости в зависимости от величины уровня локальной энтропии ζ_l в различные моменты смещения, представляя рассматриваемую величину в безразмерной форме. Безразмерное время t представляет собой отношение физического времени к среднему пролетному t_0 определяемому по размеру расчетной области и среднemasсовой скорости основного течения. Локальная энтропия ζ_l также обезразмеривается на коэффициент t_0^2 . Асимметрия среднего течения приводит к тому, что наибольшие значения энтропии наблюдаются у верхней стенки, таким образом, на рис. 1 ось Z является инвертированной.

В самом начале процесса ($t \approx 0,59$) под воздействием возмущений скорости происходит смещение и деформация пристеночного слоя с сильной завихренностью (рис. 1a), а также начало его свертывания в «клубы». При развитии смещения ($t \approx 2,97$) в большом количестве наблюдаются мелкие образования неправильной, а также шпилькообразной (hairpin) формы (рис. 1b). Затем при $t \approx 8,9$ ($\zeta_l \approx 220$) наблюдаются разнообразные вихри в объеме, имеющие форму «червяков» (рис. 1c). В области горячего пристенка они оказываются прикрепленными к поверхности. В дальнейшем при некотором повышении уровня происходит «отделение» крупных, очень длинных вихрей в основном течении и пристеночных слоев ($\zeta_l \approx 224$). Вихри в основном течении оказываются более интенсивными, а их длина может превышать характерный размер расчетной области. При дальнейшей эволюции течения ($t \approx 14,8$) и сохранении того же уровня визуализации ζ_l их размер и число существенно возрастают (рис. 1d); также заполненной завихренными образованиями оказывается область у холодной стенки. При $t \approx 17,8$ картина сохраняется. При $t \approx 20,8$ вследствие диффузии завихренности размер вихревых образований уменьшается (рис. 1e), что сопровождается ростом завихренности у нижней стенки. В дальнейшем ($t \approx 26,7$) происходит сильная диффузия завихренности с образованием крупных вихревых зон (рис. 1f) и быстрым ростом фактически сплошного сдвигового слоя. Данная картина наглядно демонстрирует, что, пользуясь лишь значением уровня энтропии, невозможно отличить сдвиговые движения от вихревых. Указанный процесс, связанный с диффузией завихренности, продолжается и в последующие моменты времени.

В отличие от непосредственного анализа завихренности (энтропии), Q -критерий является объективным средством определения положения вихрей. Однако и в этом случае получившаяся картина зависит от значения уровня Q . В частности, в начальный момент времени $t \approx 0,59$ (рис. 2a) Q -критерий показывает формирование пилообразной структуры, напоминающей Λ -вихри [6], которые в дальнейшем превращаются в «лес» шпильковидных вихрей (или вихрей, прикрепленных к стенке), «произрастающих» на поверхности, и высокоскоростного ядра потока. И пристеночные вихри, и вихри в центральной области оказываются наклоненными к наиболее скоростной части течения (рис. 2b). При повышении линий уровня ($Q > 25,62$) наблюдается картина очень длинных вихрей в основном течении без какого-либо заполнения пристеночных областей, которая усиливается при $t \approx 15-18$ ($Q > 46,02$) (рис. 2c), а затем резко падает при $t \approx 20,8$ ($Q > 24,12$). Падение продолжается на интервале $t \approx 26,7-35,7$, причем интенсивность в центре течения ($Q > 8$) резко падает до уровня горячего пристенка. В дальнейшем в центральной области происходит вымирание вихрей, а у горячей стенки сохраняются образования, вытянутые вдоль по потоку, которые наблюдаются до $t \approx 47,4$ (рис. 2f).

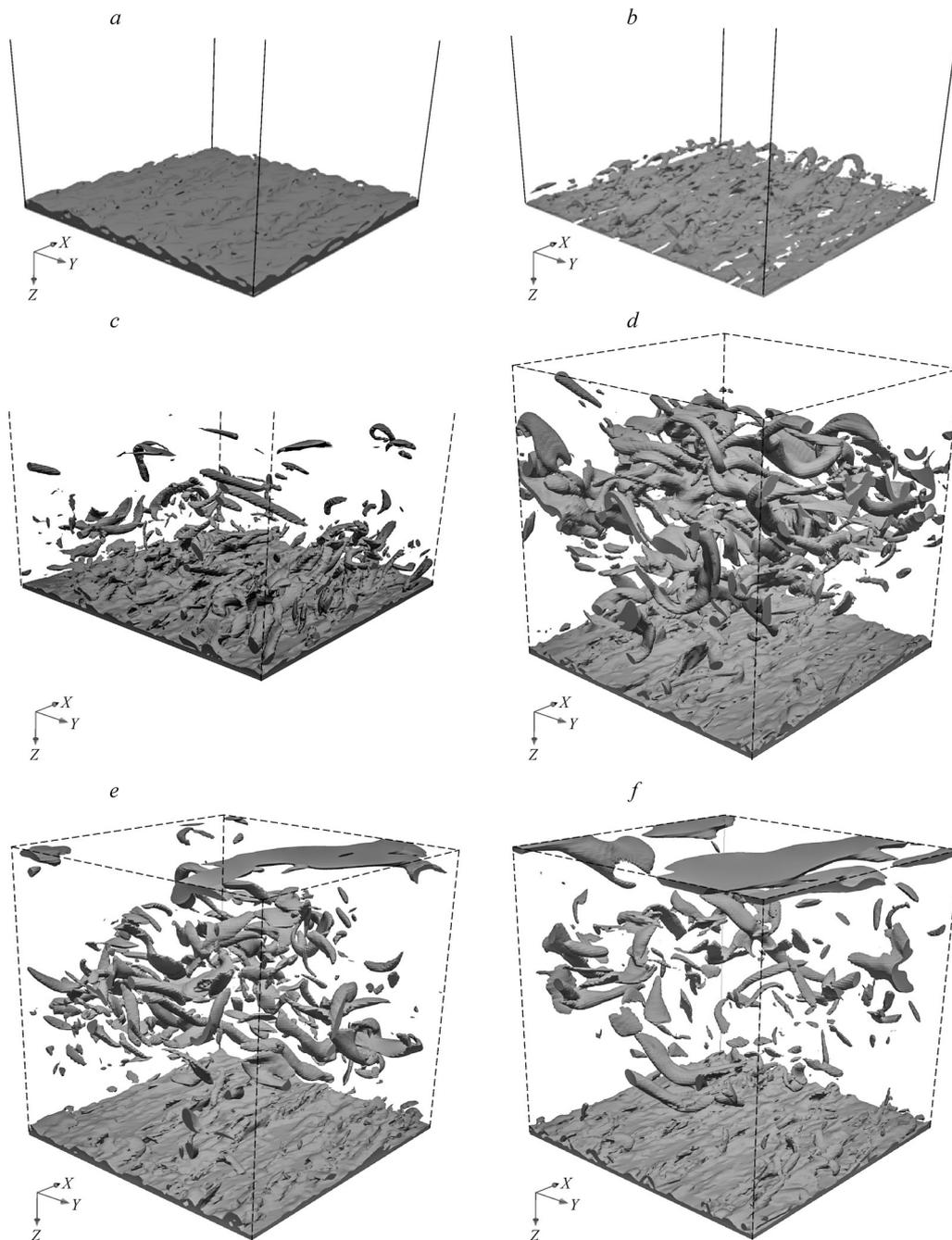


Рис. 1. Распределение локальной энтропии ζ_1 в объеме жидкости на временном интервале от начала до завершения крупномасштабного смешения, представленное в виде поверхностей уровня, в различные моменты времени t . $Re_1 = 4704$, количество ячеек расчетной сетки — 128^3 ; $t = 0,59$ (346,47) (a), 2,97 (908,58) (b), 8,9 (220,77) (c), 14,8 (224,12) (d), 20,8 (224,12) (e), 23,7 (224,12) (f) (в скобках указано значение поверхности уровня).

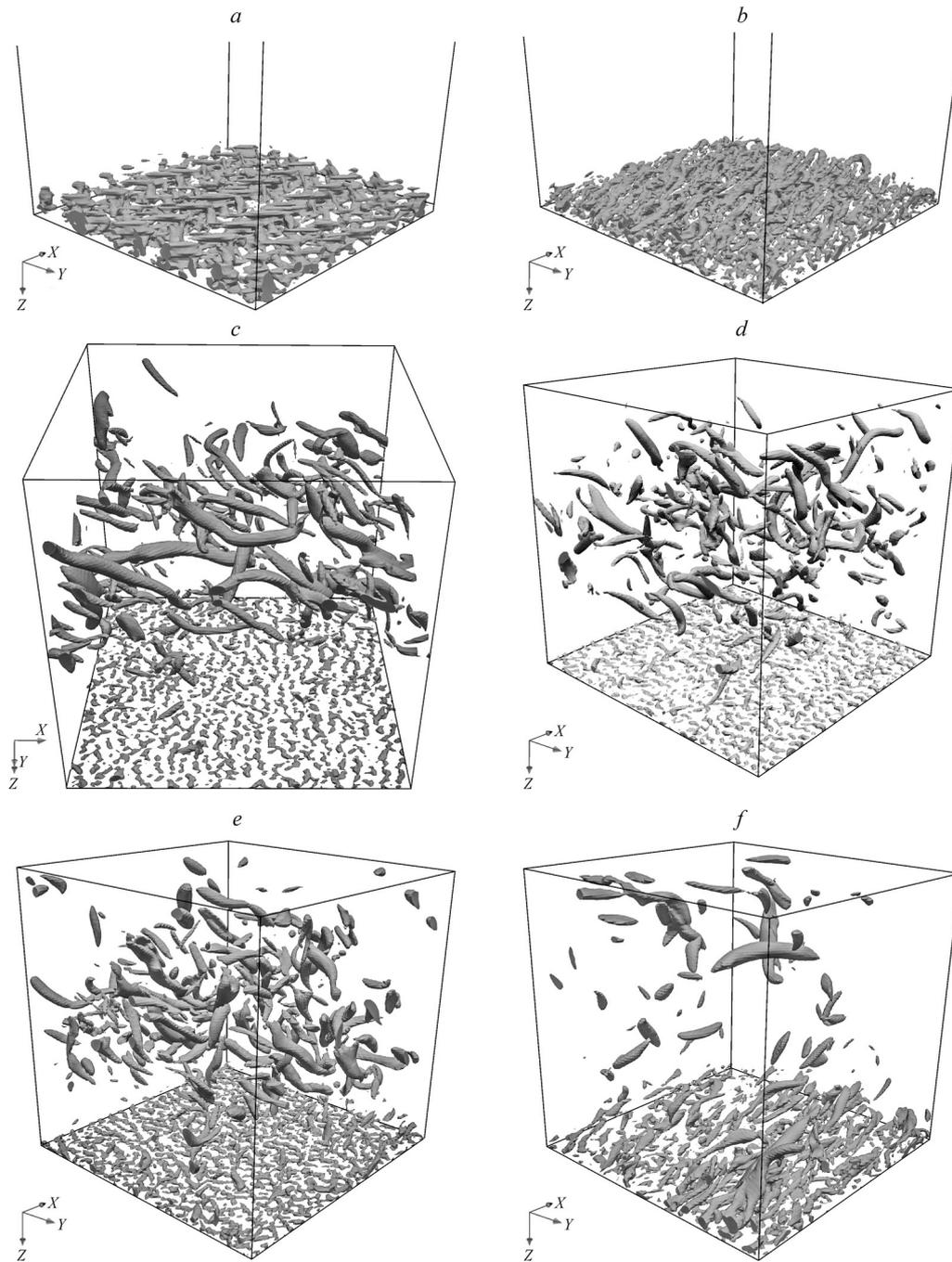


Рис. 2. Поверхности Q -критерия в объеме расчетной области на временном интервале от начала до завершения крупномасштабного смешения в различные моменты времени t . $Re_\tau = 4704$, количество ячеек расчетной сетки — 128^3 ; $t = 0,59$ (2,57) (a), 2,97 (2,57) (b), 14,8 (20,15) (c), 17,8 (46,02) (d), 20,7 (24,12) (e), 47,5 (8) (f) (в скобках указано значения поверхностей уровня Q).

2. Корреляционные зависимости в турбулентном течении ТВЖ на поздних стадиях эволюции

Пространственно-временные корреляции всегда играли большую роль в статистических теориях турбулентности. Важность этого подхода находит отражение и в том, что многие современные исследования проводятся только в аппарате корреляционных функций [7], в результате чего формируются еще более абстрактные модели по сравнению с теми, которые основаны на прямом анализе полей скорости или завихренности. Таким образом, осуществляется попытка отождествить поля корреляционных функций с реальными структурами, существующими в жидкости. Функции взаимных корреляций используются для проверки гипотез о существовании когерентных и других организованных структур в турбулентных течениях со стенками [8]. Двойственность описания движения сплошной среды, связанная с использованием эйлерова или лагранжева подходов, нашла свое отражение во введении соответствующих корреляционных коэффициентов.

Далее корреляционные характеристики течения термовязкой жидкости в расчетной области будут рассматриваться в соответствии с обозначениями и терминологией обзора [9], где в исторической ретроспективе анализируется разработка различных коэффициентов корреляции, а также их связь с масштабами турбулентного течения. Эйлеров коэффициент корреляции для величин ϕ_i и ϕ_j в статистически стационарных турбулентных течениях, флуктуирующих в окрестности средних значений, в наиболее общем случае для двух положений и двух моментов времени определяется как

$$R_{\phi_i \phi_j E}(x, r, t) = \frac{\langle \phi_i(\bar{x}, t_0) \phi_j(\bar{x} + \bar{r}, t_0 + \tau) \rangle_A}{\sqrt{\langle \phi_i(\bar{x}, t_0)^2 \rangle_A} \sqrt{\langle \phi_j(\bar{x} + \bar{r}, t_0 + \tau)^2 \rangle_A}}, \quad (4)$$

в частном случае ϕ_i и ϕ_j являются флуктуациями скорости u_i и u_j ($i, j = 1, 2, 3$), $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — выделенная точка измерения (относительно которой все рассматривается), $\bar{x} + \bar{r} = (x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$ — положения точек относительно \bar{x} , которые могут систематически меняться, τ — величина временного интервала между моментами t_0 и $t_0 + \tau$. Нижние индексы принимают значения от 1 до 3, где 1 указывает на пульсации вдоль (streamwise) основного направления потока (u'), 2 — поперек (spanwise) потока (v'), 3 — нормальные пульсации (wall-normal) к стенке (w'). Знак $\langle \cdot \rangle_A$ обозначает усреднение по ансамблю (assembly) течений.

Лагранжевы коэффициенты корреляции также могут определяться для жидких частиц, которые имеют положение \bar{x} (в эйлеровой системе координат) при t_0 , двигаются вдоль траекторий и достигают положения $\bar{x} + \bar{r}(t + \tau)$ в момент времени $t + \tau$. В данном случае вектор перемещения $\bar{r}(t_0 + \tau)$ является случайной величиной, описывающей положение частиц из ансамбля, по нему проводится усреднение относительно начального положения $\bar{x} = \bar{x}(t_0)$, различного для каждой частицы. Таким образом, для лагранжевых корреляционных коэффициентов \bar{r} и τ являются взаимозависимыми, здесь \bar{r} — функция от τ . Такие лагранжевы коэффициенты задаются формулой

$$R_{ijL}(\bar{x}, \tau) = \frac{\langle u_i(\bar{x}, t_0) u_j(\bar{x} + \bar{r}(t_0 + \tau)) \rangle_A}{\sqrt{\langle u_i(\bar{x}, t_0)^2 \rangle_A} \sqrt{\langle u_j(\bar{x} + \bar{r}(t_0 + \tau))^2 \rangle_A}}. \quad (5)$$

Можно также рассмотреть лагранжеву корреляцию для двух частиц на некотором расстоянии и корреляцию приращений скорости для двух частиц, каждая из которых движется по своей траектории, тогда сам коэффициент корреляции задается как

$$R_{ijL_2}(\bar{x}, r(t_0), \tau) = \frac{\langle \Delta_i(\bar{x}, r(t_0)) \Delta_j(\bar{x}, r(t_0 + \tau)) \rangle_A}{\sqrt{\langle \Delta_i(\bar{x}, r(t_0))^2 \rangle_A} \sqrt{\langle \Delta_j(\bar{x}, r(t_0 + \tau))^2 \rangle_A}}, \quad (6)$$

где $\bar{r}(t_0 + \tau)$ — радиус-вектор между положениями двух частиц при t_0 и $t_0 + \tau$.

В случае стационарной турбулентности ни лагранжевы, ни эйлеровы коэффициенты корреляции не зависят от начального момента времени. К самым ранним применениям данного подхода относится работа [10] о турбулентной диффузии жидких частиц, где было установлено, что для изотропной турбулентности одночастичный Лагранжев коэффициент корреляции связан со среднеквадратичным пройденным расстоянием для ансамбля жидких частиц для некоторого положения в пространстве и определенного направления распространения.

В силу существования пространственной периодичности и для ускорения вычислений пространственный эйлеров коэффициент корреляции (4) здесь не рассматривается, вместо этого предлагается «расщепить» его на две величины: коэффициент корреляции между точками в одной плоскости («простые» двухточечные корреляции) и коэффициент взаимной корреляции между точками двух параллельных плоскостей, две другие координаты которых совпадают. Первый коэффициент рассчитывается по всему сечению, располагающемуся в плоскости, параллельной стенкам канала, а его нормировка осуществляется по среднеквадратичным значениям на этой плоскости (в силу существования пространственной периодичности). Таким образом, имеет смысл рассматривать поверхность (поле) коэффициентов корреляции

$$R_{\phi_i \phi_j}(z, r, t) = \frac{\sqrt{\langle \phi_i(z, \bar{x}_{2D}, t) \phi_j(z, \bar{x}_{2D} + \bar{r}_{2D}, t) \rangle_S}}{\sqrt{\langle \phi_i(z, \bar{x}_{2D}, t)^2 \rangle_S} \sqrt{\langle \phi_j(z, \bar{x}_{2D}, t)^2 \rangle_S}}, \quad (7)$$

где \bar{r}_{2D} — расстояние между точками в одной плоскости с ординатой z . Второй эйлеров коэффициент корреляции преобразуется к виду

$$R_{\phi_i \phi_j}^Z(z, r, t) = \frac{\sqrt{\langle \phi_i(z, t) \phi_j(z + r, t) \rangle_S}}{\sqrt{\langle \phi_i(z, t)^2 \rangle_S} \sqrt{\langle \phi_j(z + r, t)^2 \rangle_S}}, \quad (8)$$

где r — расстояние между плоскостями по направлению Z , а индекс S обозначает усреднение по пространству. В результате можно будет найти расстояние, на котором теряется корреляция между двумя величинами. При этом значения будут всегда браться из различных плоскостей, исключая дублирование при переборе. Значения $R_{\phi_i \phi_j}$ и $R_{\phi_i \phi_j}^Z$ следует рассматривать при достаточно больших временах эволюции, после завершения основного выравнивания температуры.

В случае изотропных течений $R_{\phi_i \phi_j}^Z$ должен иметь симметричную форму, его диаграмма строится в безразмерных координатах (z, r) , где z — положение плоскости для первой величины относительно нижней стенки, а $r = z_1 - z_2$ — расстояние до плоскости, на которой находятся значения второй величины. Таким образом, если рассчитывается корреляция $\phi_i \phi_j$ у нижней стенки с ϕ_j , располагающейся у верхней стенки, то $r < 0$, в противном случае $r > 0$. Следует обратить внимание, что при расчете коэффициента корреляции поперек потока по формуле (8) число точек в выборке никак не зависит от расстояния между плоскостями r . В качестве дополнения можно привлечь понятие длины корреляции [11], записанной в форме

$$\Lambda_{uu}''(z) = \frac{\int_0^{\infty} R_{uu}''(z, r) dr}{R_{uu}''(z, 0)}, \quad \Lambda_{vv}''(z) = \frac{\int_0^{\infty} R_{vv}''(z, r) dr}{R_{vv}''(z, 0)}, \quad \Lambda_{ww}''(z) = \frac{\int_0^{\infty} R_{ww}''(z, r) dr}{R_{ww}''(z, 0)}. \quad (9)$$

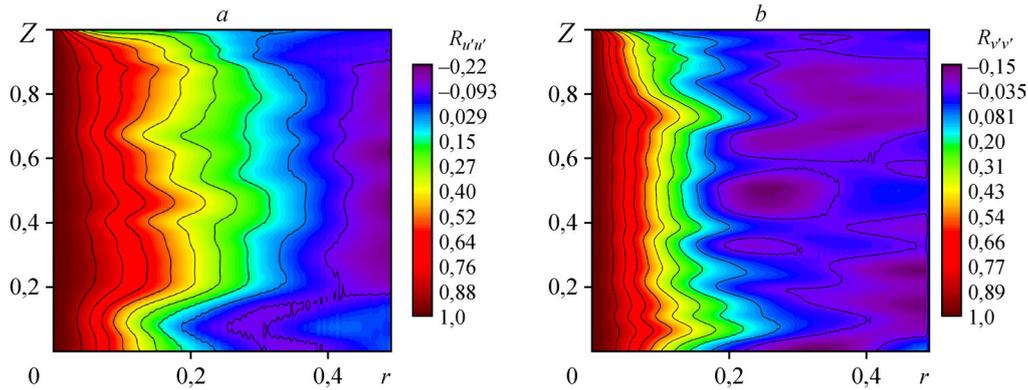


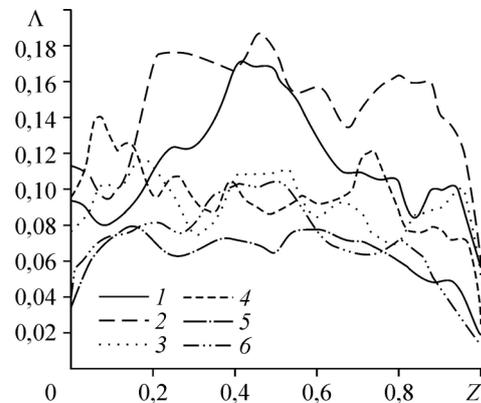
Рис. 3. Коэффициенты корреляции $R_{u'u'}$ (a) и $R_{v'v'}$ (b), полученные по результатам расчета на сетке с 256^3 ячейками.

Коэффициент корреляции $R_{u'u'}$ в направлении основного течения (рис. 3a) должен характеризоваться наиболее широким участком корреляционной зависимости, имеющей существенное значение $R_{u'u'} \sim 0,3$ при $r \approx 0,2-0,3$ (для момента времени $t = 108$). Соответствующие длины корреляции $\Lambda_{u'u'}(Z)$ (рис. 4) имеют максимальное значение в центре течения, постепенно спадая к пристеночным областям. Обращает на себя внимание, что слою с максимальной корреляционной длиной соответствует область с отрицательной корреляцией, что может свидетельствовать о влиянии периодичности на $R_{u'u'}$. Поведение простой корреляции $R_{v'v'}$ носит осциллирующий характер (рис. 3b) независимо от положения слоя, что подтверждается характерной длиной корреляции $\Lambda_{v'v'}$.

Зависимость коэффициента автокорреляции пульсаций скорости $R_{w'w'} = R_{w'w'}(z, r)$ отличается следующими свойствами. В целом, рассматривая совокупность кривых (рис. 5a), рассчитанных в различные моменты времени, можно выделить участок практически постоянной формы, имеющий форму дуги, в котором $R_{w'w'}$ имеет положительные значения ($R_{w'w'} > 0,2$), далее при больших r для любого z наблюдаются участки практически нулевой корреляции, сменяемые участками с отрицательным $R_{w'w'}$. Существование отрицательной корреляции при больших r ($R_{w'w'} \sim -0,1 \div -0,15$) может свидетельствовать о двух вещах: о недостаточном количестве точек усреднения на больших расстояниях (так как рассматриваемые флуктуации не параллельны основному течению) и о влиянии периодичности. На близких расстояниях наличие $R_{w'w'} < 0$ может быть объяснено существованием вихревых пар. Очевидно, что в пристеночной области корреляции должны теряться гораздо быстрее, чем в средней зоне. Также для этого коэффициента характерны отрицательные корреляции в обеих пристенках. Анализ длины корреляции $\Lambda_{w'w'}$ показывает (рис. 4), что она принимает самые

Рис. 4. Длина корреляции (интегральный масштаб), полученная на основе коэффициента корреляции, рассчитанного в одной плоскости по формуле (7).

1, 2 — $\Lambda_{u'u'}^x$, 3, 4 — $\Lambda_{v'v'}^x$, 5, 6 — $\Lambda_{w'w'}^x$, количество ячеек в расчетной сетке: 128^3 (1, 3, 5) и 256^3 (2, 4, 6).



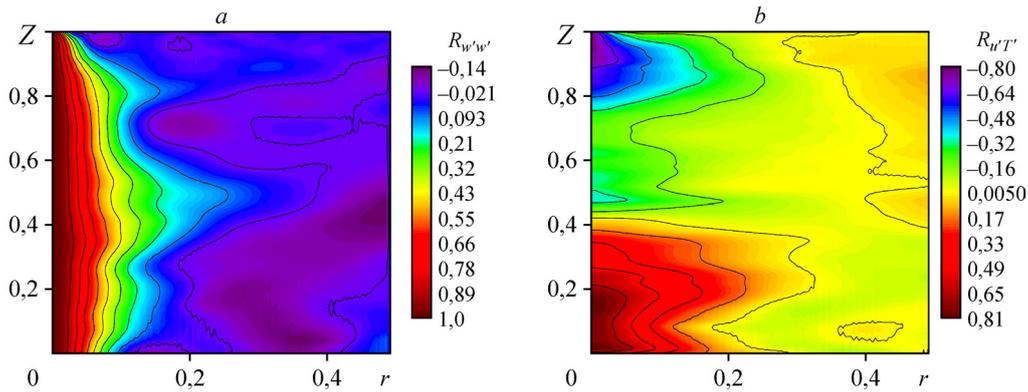


Рис. 5. Коэффициенты корреляции $R_{w'w'}$ (a) и $R_{u'T'}$ (b), полученные по результатам расчета на сетке с 256^3 ячейками.

малые значения в пристеночных областях ($z = 0,004-0,035$, $z = 0,984-0,022$), а самые большие — в центральной области ($z = 0,5-0,010$), причем, у горячей стенки длина корреляции приблизительно в 1,5 раза короче, чем у холодной.

Полученный интегральный масштаб предоставляет дополнительную возможность для обсуждения качества сеточного разрешения в рассматриваемой задаче. Зачастую предполагается, что корреляционная длина или интегральный масштаб равны или соответствуют порядку размеров расчетной области L , на основании чего после подстановки этого размера в соотношение Колмогорова для масштабов делается вывод о достаточности (или нет) пространственного шага (масштабов) для отображения всех существенных вихрей. Данная процедура представляется малообоснованной: так, например, в моделируемом течении продольный корреляционный масштаб может быть на порядок меньше L в центре потока, не говоря уже о пограничных слоях. Таким образом, с формальной точки зрения процедура подбора сеточного разрешения должна быть итерационной и последовательно включать в себя расчеты течения на грубой сетке, корреляционных функций, интегральных масштабов, на основе которых из имеющихся асимптотик будет определяться качество сеточного разрешения колмогоровского масштаба.

Корреляции пульсаций основного течения и температуры $R_{u'T'}$ (рис. 5b) демонстрируют наибольшие значения. Так, в верхней полуплоскости при $r < 0,1$ наблюдаются минимальные отрицательные корреляции $R_{u'T'} \approx -0,8 \div -0,6$, особенно сильные в верхнем пристенке. Аналогичные, только положительные значения наблюдаются у нижней стенки, особенно на коротких масштабах.

Коэффициент корреляции $R_{v'T'}$ на участке $r < 0,1$ демонстрирует без наглядной динамики в зависимости от положения слоя z или антикорреляцию, или корреляцию (рис. 6a); если $r \gtrsim 0,2$, то корреляции практически равны нулю. Коэффициент корреляции $R_{w'T'}$ показывает устойчивую антикорреляцию в области $r < 0,2$, асимптотически приближаясь к нулевым значениям и осциллируя в диапазоне $[-0,02 \div 0,08]$ (рис. 6b). Поле корреляции продольной скорости в поперечном направлении $R_{u'u'}$ (рис. 7a) демонстрирует самую развитую (сильную), но несимметричную корреляцию, с большим положительным участком при корреляции «снизу вверх». Корреляции скорости $R_{v'v'}$ (рис. 7b) в направлении периодичности без градиента давления представляются в виде узкой, резко

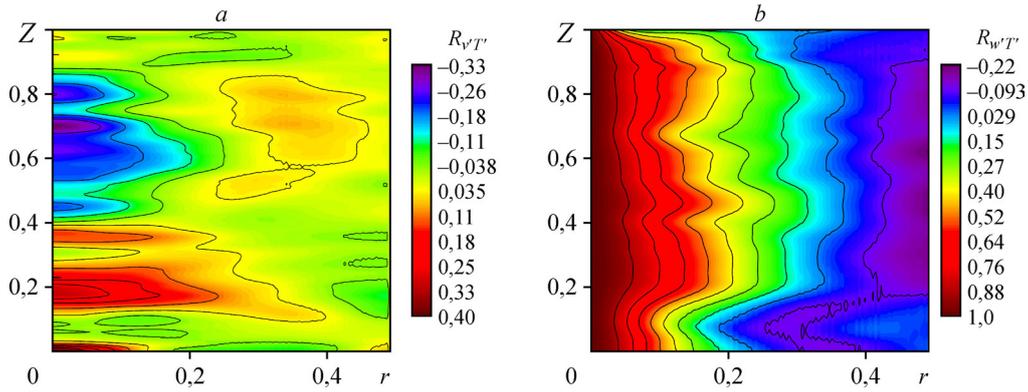


Рис. 6. Коэффициенты корреляции $R_{vT'}$ (a) и $R_{wT'}$ (b), полученные по результатам расчетов на сетке с 256^3 ячейками.

спадающей полосы положительных значений корреляции, за которой следует «пятнистая» картина положительных и отрицательных корреляций, хаотически появляющихся и исчезающих.

Как уже указывалось выше, коэффициент корреляции между стенками на текущем шаге по времени может быть несимметричным (хотя в случае изотропной турбулентности это должно быть так), и $R_{w'w'}^Z$ (рис. 8a) в нижней полуплоскости переводится в поле в верхней полуплоскости двойным отражением относительно осей $r = 0,0$ и $z = 0,5$. Быстрее всего корреляция спадает в пристеночных областях, демонстрируя схожесть между корреляциями «сверху-вниз» и «снизу-вверх». Антикорреляции на больших расстояниях в левом нижнем и правом верхнем углах диаграммы (имеющие достаточно большие значения) носят только мгновенный характер, то есть эти области хаотически смещаются и, вероятно, в среднем дают 0, так как движения в поперечном к стенке направлении не должны иметь корреляционных зависимостей.

Наибольшие корреляции и антикорреляции наблюдаются для коэффициента $R_{u'T'}^Z$ в следующих областях: в верхней полуплоскости при $|r| \lesssim 0,4$ наблюдается антикорреляция с минимальным значением $R_{u'T'}^Z \approx -0,8$, в нижней полуплоскости присутствуют положительные корреляции с максимумом $R_{u'T'}^Z \sim 0,78$ (рис. 8b). Таким образом, если

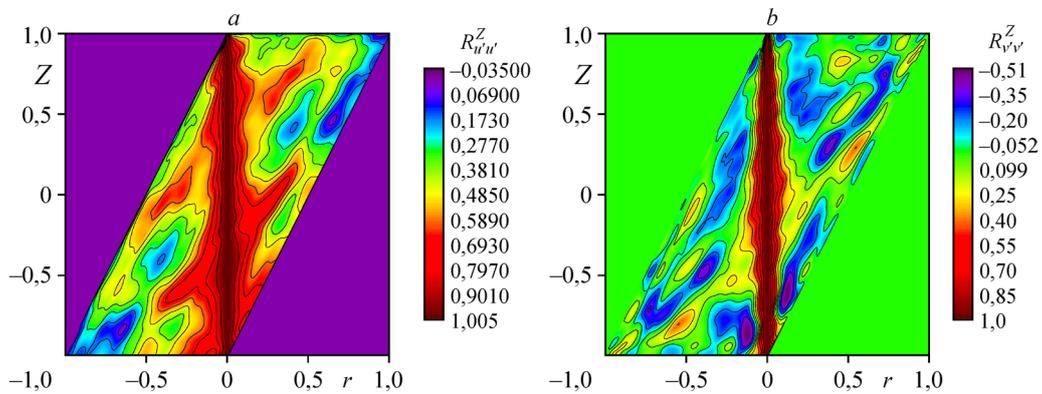


Рис. 7. Коэффициенты корреляции $R_{u'u'}^Z$ (a) и $R_{v'v'}^Z$ (b), полученные по результатам расчетов на сетке с 256^3 ячейками.

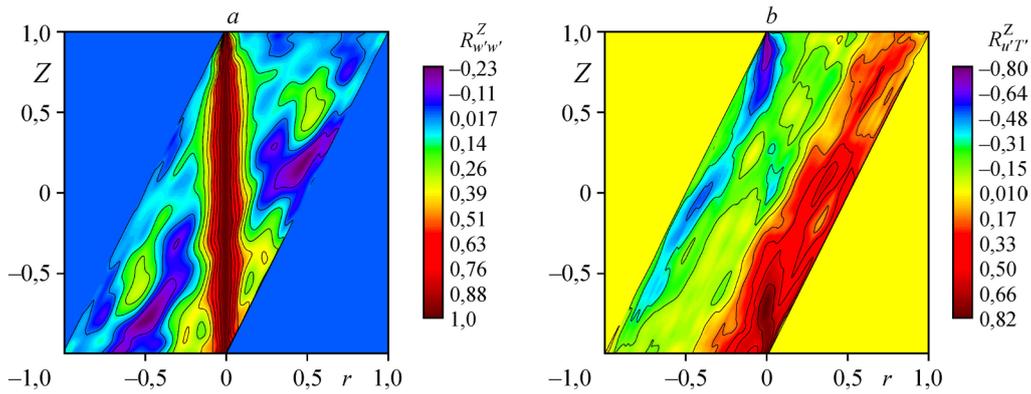


Рис. 8. Коэффициенты корреляции $R_{w'w'}^Z$ (a) и $R_{u'T'}^Z$ (b), полученные по результатам расчетов на сетке с 256^3 ячейками.

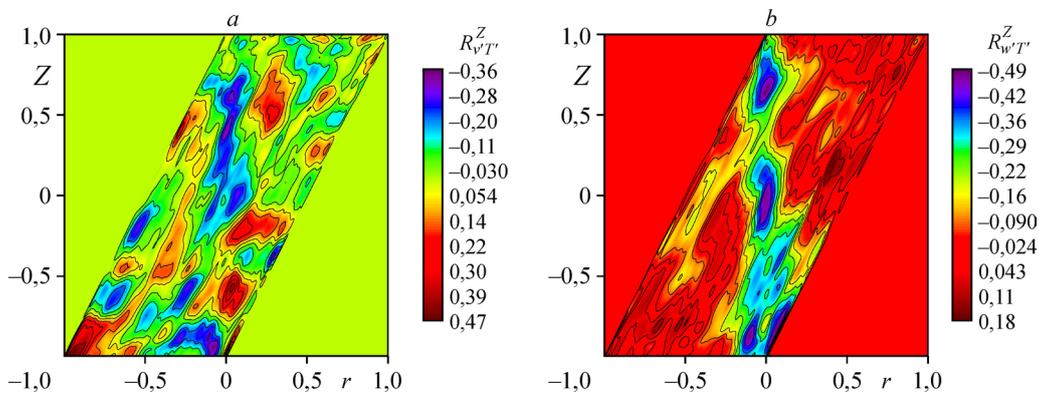


Рис. 9. Коэффициенты корреляции $R_{v'T'}^Z$ (a) и $R_{w'T'}^Z$ (b), полученные по результатам расчетов на сетке с 256^3 ячейками.

предположить, что преобладающими значениями являются $u' > 0$, то в верхней полуплоскости они приводят к отрицательным пульсациям T' , то есть к понижению температуры, а в нижней полуплоскости к ее повышению.

Поле корреляций $R_{v'T'}^Z$ совсем не имеет выраженных участков знакопостоянного коэффициента корреляции (рис. 9a) — повсюду в диапазоне $-0,4 \div 0,2$ наблюдаются хаотические образования. Поле пульсаций $R_{w'T'}^Z$ демонстрирует (рис. 9b) сильные отрицательные корреляции для всех z при $|r| \leq 0,1$ ($R_{w'T'}^Z \sim -0,5 \div 0,4$), которые затем сменяются хаотическим полем околонулевых или положительных корреляций.

3. Турбулентность в течениях с термовязкой жидкостью с точки зрения вязких масштабов

В гидромеханике существует не так много потоков, в которых турбулентность имеет один масштаб. Течение в канале лежит вне этой группы: в нем, помимо корреляционной длины Λ и характерного времени t_0 (определяемого по начальной среднemasсовой скорости U_0), уже обсуждавшихся выше, наблюдается более сложная иерархия, приводимая ниже.

1. Основной масштаб, основанный на геометрии расчетной области L , среднемаховой скорости t_0 и среднего пролетного времени $t_0 = L/U_0$.

2. Интегральный масштаб (или длина корреляции) Λ , $0(1)$, зачастую принимаемый равным $0,2(0,2L)$. В зависимости от представления, Λ можно рассчитать или по формуле (9) или, например, таким образом:

$$\Lambda = \int_{-\infty}^{\infty} u'(x,t)u'(x+r,t)dr / \langle u'^2 \rangle.$$

В случае спектрального подхода интегральный масштаб определяется по формуле [12]

$$\Lambda = \frac{\pi}{2} \cdot E(0) / \int_0^{\infty} E(k)dk.$$

3. Тейлоровский микромасштаб λ_τ определяет характерный размер вихрей инерционного интервала как $\lambda_\tau^2 = \langle |u'|^2 \rangle / \langle |S|^2 \rangle$, где S — тензор скоростей деформации.

4. Колмогоровский микромасштаб η находится из соотношения

$$\text{Re}_\eta = \frac{|u'| \eta}{\nu} \sim 1.$$

Течению в канале присуще также несколько временных масштабов [13]: характерное время оборота вихрей, характерный вязкий масштаб турбулентного пограничного слоя, измеряемый в единицах стенки, который гораздо меньше масштаба основного течения t_0 , проявляющегося в качестве медленных «релаксационных» процессов в набираемой статистике. В некоторых исследованиях наблюдается промежуточный масштаб, связанный с осцилляцией статистики.

Представление различных величин на основе вязких масштабов для координаты y^+ , волнового числа k^+ и частоты ω^+ играет ключевую роль в теории турбулентного пограничного слоя и иногда называется масштабированием Рейнольдса (Reynolds scaling):

$$\delta^+ = \frac{\nu}{\hat{U}_{\tau^*}}, \quad U^+ = \frac{U}{\hat{U}_{\tau^*}}, \quad y^+ = \frac{y}{\delta^+}, \quad k^+ = \frac{2\pi}{\lambda_X^+} = k\delta^+, \quad \omega^+ = \frac{1}{t^+} = \frac{\omega\delta^+}{\hat{U}_{\tau^*}},$$

где U_{τ^*} — скорость трения (динамическая скорость). Скорость трения определяется по значению касательного напряжения на стенке τ^* :

$$\hat{U}_{\tau^*} = \tau^* / \rho.$$

Здесь и далее все величины, отмеченные знаком «+», являются обезразмеренными на соответствующие вязкие масштабы течения или их комбинацию. Стационарное состояние определяется по достижению линейного профиля среднего сдвигового напряжения $\tau = -\rho \langle u'v' \rangle_s + \mu \partial \langle U \rangle_s / \partial y$ [14] или по квазипериодическому поведению кривой энергии. В полностью равновесном течении профиль полного напряжения напоминает прямую линию. Значения производной $\partial U / \partial z$ рассчитывались по следующему шаблону:

— правая производная (третий порядок точности) для нижней (холодной) стенки ($z = 0$):

$$\left[\frac{\partial U}{\partial z} \right]_0 = \left(-\frac{11}{6}[U]_0 + 3[U]_1 - \frac{3}{2}[U]_2 - \frac{1}{3}[U]_3 \right) / \Delta z + O(\Delta z^3);$$

— левая производная (третий порядок точности) для (верхней) горячей стенки ($z = 1$):

$$\left[\frac{\partial U}{\partial z} \right]_{n_z} = \left(-\frac{1}{3}[U]_{n_z-3} + \frac{3}{2}[U]_{n_z-2} - 3[U]_{n_z-1} + \frac{11}{6}[U]_{n_z} \right) / \Delta z + O(\Delta z^3);$$

— градиент средней скорости в других ячейках расчетной области определяется со вторым порядком точности:

$$\left[\frac{\partial U}{\partial z} \right]_{n_i} = \left([U]_{n_{i+1}} - [U]_{n_i} \right) / (2\Delta z) + O(\Delta z^2).$$

Профиль полного сдвигового напряжения τ при $t \approx 120$ (рис. 10а), обезразмеренный на свое значение на нижней стенке, в центре течения оказывается близок к линейному, хотя на него накладываются некоторые неоднородности. Несмотря на вычисление производной у стенок с повышенной точностью, наблюдается недостаточность сеточного разрешения в непосредственной близости от горячей стенки. Потеря симметричности профиля относительно центра канала может быть вызвана существованием теплового слоя, что отличает рассматриваемый профиль от обычного распределения напряжения в установившемся турбулентном течении в канале [8]. Обращает на себя внимание и то, что форма среднего профиля полного напряжения τ существенно не меняется при измельчении сетки. На рис. 10б представлены зависимости от времени безразмерной скорости трения $U_{\tau^*} = \hat{U}_{\tau^*} / U_0$, определяющей вместе с кинематической вязкостью ν масштабы в турбулентном пограничном слое. Видно существенное различие между параметрами на верхней и нижней стенках даже на очень больших временах эволюции, которое, вероятно, связано с образованием пристеночных тепловых слоев. В пристеночных тепловых слоях температура и вязкость отличаются от своих аналогов на внешней границе, следовательно, там должен наблюдаться разрыв производных профиля скорости.

Зависимость вязких масштабов от времени определяется по значениям полного напряжения на стенке. Поведение безразмерной сдвиговой скорости представлено на рис. 10б для $Re_1 = 4200$. Кривые U_{τ^*} для нижней стенки (сплошные линии на рис. 10б) растут ступенчатым образом на участке крупномасштабного смешения, а в окрестности $t \approx 50$ имеют форму, близкую к плато, затем при выравнивании температуры происходит мед-

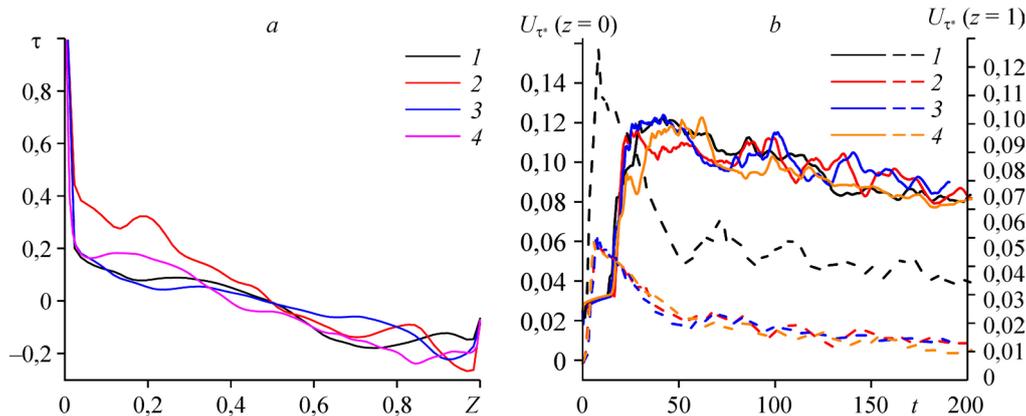


Рис. 10. Средний профиль полного напряжения τ в момент времени $t \approx 120$, нормированный на значение τ^* у нижней стенки (а), и зависимость безразмерной сдвиговой скорости от времени τ^* (б).

Характерное число Рейнольдса $Re_1 = 4704$ (а, б), число ячеек в расчетной области: а, б, — 64^3 (1–3), 128^3 (4), скорость распространения возмущений: а, б — $c = 10$ (1, 4), 20 (2), 40 (3);

б: нижняя стенка — сплошные кривые (левая шкала), верхняя стенка — штрихованные кривые (правая шкала).

ленное уменьшение до значений $U_{\tau^*} \approx 0,1$ (левая шкала на указанном рисунке). У верхней стенки безразмерная скорость трения испытывает единственный максимум в начале смешения, а потом при $t > 50$ наблюдается медленный спад до $U_{\tau^*} \approx 0,2$ (правая шкала на рис. 10b), на который накладываются осцилляции. Таким образом, оказывается, что значения U_{τ^*} на границах отличаются в несколько раз.

Известно [8], что наибольшая доля энергии турбулентности мелкомасштабных структур соответствует длинам волн $\lambda_X^+ \approx 1000$. Если вычислительная область меньше, чем $\lambda_X^+ \approx 1000$, влияние периодичности вдоль основного течения оказывается достаточно существенным. Авторы [13] показали, что турбулентность не может поддерживаться в расчетных областях с протяженностью в продольном направлении меньшей, чем $\lambda_X^+ \approx 360$, тогда как результаты [15] свидетельствуют о том, что имеет место распад турбулентности, если продольная когерентность (streamwise coherence) «прожилков» скорости (velocity streaks) в пристеночной области подвергается возмущениям в диапазоне волн ниже $\lambda_X^+ \approx 400$. Легко видеть, что вязкий масштаб δ^+ вместе с продольным размером расчетной области $L_X = L$ в качестве отношения δ^+/L или $L^+ = L/\delta^+$ определяют эволюцию турбулентного течения при численном моделировании. Так как размеры расчетной области во всех направлениях одинаковы, то по графикам рис. 11a можно судить о качестве сеточного разрешения пограничных слоев, а также о количестве длин волн, которое укладывается на линейном размере расчетной области. Здесь наблюдается два семейства кривых: для горячей и холодной стенок. Для холодной стенки вязкий масштаб оказывается достаточно большим и, как правило, на размере расчетной области характерных длин укладывается $L^+ \sim 100-150$. Совершенно другая ситуация складывается у горячей стенки, где очень малая вязкость приводит к очень малому вязкому масштабу. Здесь на размере расчетной области может укладываться около 1000–1200 характерных

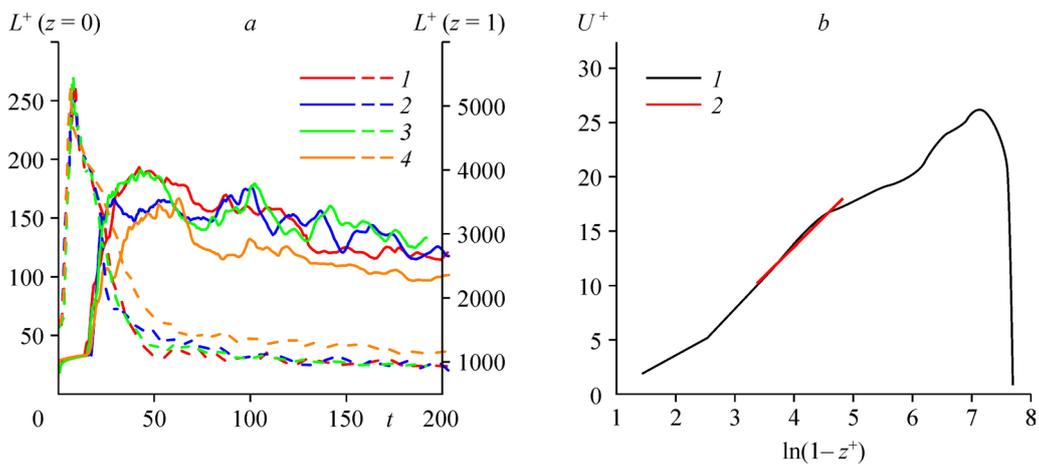


Рис. 11. Размер расчетной области (a) и средний профиль скорости U^+ при $t \approx 120$ (b), нормированные на вязкий масштаб.

a: сплошные кривые в диапазоне левой шкалы — данные, нормированные на единицы холодной стенки, пунктирные кривые в диапазоне правой шкалы — данные, нормированные на единицы горячей стенки;

b: начало системы координат соответствует горячей стенке,

красная линия соответствует участку логарифмического пограничного слоя;

a — характерное число Рейнольдса $Re_1 = 4704$, число ячеек в расчетной области 64^3 (1–3) и 128^3 (4), скорость распространения возмущений $c = 10$ (1, 4), 20 (2), 40 (3).

длин. Очевидно, что при таких условиях любая из использовавшихся сеток не может дать достаточного сеточного разрешения пограничного слоя. Вместе с тем, малый вязкий масштаб у горячей стенки позволяет выполнить (соблюсти) условие поддержания турбулентности для максимально возможных длин волн в расчетной области $\lambda_x^+ \gtrsim 400$, которое не выполняется для холодной стенки. Как результат, поддержание течения с большой интенсивностью турбулентности в верхней полуплоскости может быть следствием именно малого δ^+ , а не малой вязкости потока.

Таким образом, для того, чтобы в канале поддерживалась турбулентность вдоль направления основного течения, по его длине должно укладываться достаточное количество вязких масштабов. Целесообразно использовать итерационную процедуру для определения минимального размера расчетной области, связанную с расчетом на грубой сетке, определением вязкого масштаба δ^+ и разрешаемого диапазона продольных длин волн λ_x^+ .

В заключение обсудим разрешение вязких масштабов течения ($Re = 4704$, количество ячеек расчетной области 256^3) на длительных временах эволюции жидкости ($t \approx 120$), рассматривая профили скорости U^+ , усредненные в направлениях периодичности. Нетрудно подобрать логарифмическую аппроксимацию для некоторого участка этого профиля у горячей или холодной стенки. Однако стоит обратить внимание, что логарифмический закон в основном выполняется на расстояниях $30 \lesssim z^+ \lesssim 130$ [16], следовательно можно оценить качество его разрешения на 256 ячейках поперек канала. В этом случае при значении вязкого масштаба у горячей стенки $\delta^+/L = 7,69 \cdot 10^{-4}$ и пространственного шага $\Delta z = L/nZ$ оказывается, что на величине пограничного слоя $\Delta y^+ \approx 100$ укладывается 20 ячеек. Для нижней стенки вязкий масштаб составляет $z^+/L = 0,013$, число ячеек $100z^+/\Delta z$, приходящихся на пограничный слой, превосходит число ячеек расчетной сетки. В этом случае оказывается, что толщина логарифмического пограничного слоя превосходит толщину канала. Объяснения этому стоит искать в существовании завихренных тепловых слоев, в которых вязкость жидкости будет существенно отличаться от значений в глубине канала, что в среднем должно создавать большие значения $\partial\mu/\partial z$ и оказывать влияние на наклон профиля скорости. Однако этого не наблюдается на ее пространственно-среднем профиле. В верхней пристеночной области толщина теплового слоя в среднем составляет около $0,03L$, таким образом, на сетке 256^3 на него приходится около 8 ячеек, в то время как логарифмический слой начинается с $30\delta^+/\Delta z \approx 6$ ячеек. Соответственно, часть логарифмического профиля должна лежать в тепловом слое. На рис. 11b представлен безразмерный профиль скорости основного течения $U^+ = f(\ln(z^+))$. Можно видеть, что на отрезке $\ln(z^+) \approx 3,4 - 4,7$ профиль может быть аппроксимирован линейной функцией $U^+ = 1/\kappa \ln(z^+) + C$. К сожалению, значения константы Кармана κ и C отличаются от своих признанных значений — $\kappa = 0,41$, $C = 5$. Результаты линейной аппроксимации дают $\kappa = 0,45 \pm 7,4 \cdot 10^{-3}$ и $C = 1,197 \pm 0,38$. Причинами этого могут быть зависимость вязкости от температуры и недостаточное сеточное разрешение.

Выводы

В настоящей работе представлены результаты исследования турбулизованного течения термовязкой жидкости в бесконечном слое. Использование Q -критерия оказывается достаточно эффективным и позволяет отслеживать процесс формирования вихрей в жидкости, который включает в себя несколько этапов: появление пилообразной структуры

в окрестности горячей стенки, а также шпильковидных вихрей; развитие крупномасштабных вихревых образований в основном объеме с характерной длиной, превышающей размер расчетной области, усиление диффузии завихренности («вымирание» больших вихрей) на поздних стадиях эволюции течения.

Анализ корреляционных зависимостей в турбулентном течении термовязкой жидкости в канале показывает, что участок существенных значений коэффициента корреляции в направлении основного течения оказывается большим, чем для других компонент скорости. Аналогичный вывод справедлив и для длины корреляции $\Lambda_{u'u'}$. Она имеет максимальные значения в центре канала, уменьшаясь в пристеночных областях.

Отметим, что слою с максимальной корреляционной длиной соответствует область с отрицательной корреляцией. Это может свидетельствовать о влиянии периодичности на коэффициент корреляции в направлении основного течения. Наиболее регулярное поведение демонстрирует поле значений коэффициента $R_{u'T'}$, показывая сильную корреляционную связь между пульсациями скорости и температуры в пристеночных областях при $r \lesssim 0,15$. Таким образом, если предположить, что превалирующими значениями являются $u' > 0$, то в верхней полуплоскости они приводят к отрицательным пульсациям T' , то есть к понижению температуры, а в нижней полуплоскости — к ее повышению.

Анализ второго коэффициента корреляции позволяет сделать некоторые выводы о характере турбулентного переноса в направлении между стенками. Действительно, значения $R_{w'T'}^Z$ при малых r оказываются отрицательными. Таким образом, пульсации вертикальной компоненты скорости и температуры имеют разный знак: если $w' > 0$, то $T' < 0$, и наоборот, что приводит к переносу тепла между стенками.

Рассмотрение течения в терминах вязких масштабов приводит к следующим результатам.

1. Профиль полного напряжения между стенками не является полностью установившимся в пристеночных областях.
2. Существование пристеночных тепловых слоев приводит к большим различиям в значениях сдвиговой скорости и, соответственно, во всех масштабах, определяемых на ее основе.
3. Размер расчетной области L в единицах горячей стенки оказывается достаточным для поддержания турбулентности, по крайней мере, на тех временных интервалах, на которых проводился расчет.
4. В окрестности верхней стенки на участке логарифмического пограничного слоя укладывается 20 ячеек, а также наблюдается частичное перекрытие с пристеночным тепловым слоем на участке 6–8 ячеек.

Список литературы

1. McDonough J.M. Introductory lectures on turbulence. CreateSpace Independent Publishing Platform. 2014. 180 p.
2. Карман Т. Турбулентность // Успехи физических наук. 1939. Т. 21, № 21. С. 21–59.
3. Куликов Ю.М., Сон. Э.Е. Режимы течения термовязкой жидкости в плоском неизотермическом слое // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25, № 6. С. 877–898.
4. Holmen V. Methods of vortex identification: Master's Theses in Math. Sciences. Lund University. 2012. 46 p.
5. Haller G. An objective definition of a vortex // J. Fluid Mechanics. 2005. Vol. 525. P. 1–26.
6. Drazin P.G., Reid W.H. Hydrodynamic stability. 2 ed. Cambridge University Press, 2004. 619 p.
7. Sillero J.A., Jimenez J., Moser R.D. Two-point statistics for turbulent boundary layers and channels at Reynolds numbers up to $\delta^+ \approx 2000$ // Physics of Fluids. 2014. Vol. 26, No. 10. P. 105–109.
8. Chin C., Ooi A.S.H., Marusic I., Blackburn H.M. The influence of pipe length on turbulence statistics computed from direct numerical simulation data // Physics of Fluids. 2010. Vol. 22, Iss. 11. P. 115107-1–115107-10.

9. **Wallace J.M.** Space-time correlations in turbulent flow: a review // Theoretical and Applied Mechanics Letters. 2014. Vol. 4, Iss. 2. P. 022003-1–022003-16.
10. **Taylor G.I.** Diffusion by continuous movements // Proceedings of the London Mathematical Soc. 1922. Vol. s2–20, Iss. 1. P. 196–212.
11. **Sonin A.** 2.27 Turbulent flow and transport // Massachusetts Institute of Technology. 2002. <https://ocw.mit.edu>.
12. **Jimenez J.** The largest scales of turbulent wall flows: annual research briefs // Center for Turbulence Research. 1998. P. 137–154.
13. **Jimenez J., Moin P.** The minimal flow unit in near-wall turbulence // J. Fluid Mechanics. 1991. Vol. 225, No. 1. P. 213–240.
14. **Kim J., Moin P., Moser R.** Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number // J. Fluid Mechanics. 1987. Vol. 177, No. 1. P. 133–166.
15. **Jimenez J., Pinelli A.** The autonomous cycle of near-wall turbulence // J. Fluid Mechanics. 1999. Vol. 389. P. 335–359.
16. **Davidson P.A.** Turbulence: an introduction for scientists and engineers. Oxford: OUP, 2004. 678 p.

*Статья поступила в редакцию 2 июля 2019 г.,
после доработки — 6 сентября 2019 г.,
принята к публикации 6 ноября 2019 г.*