

Для простоты ограничимся анализом процесса наращивания без натяга, когда минимально возможная скорость притока вещества равна нулю. Повторяя рассуждения пп. 2 и 3, получим, что оптимальная скорость наращивания определяется из теоремы, причем неравенство, характеризующее число точек переключения, имеет вид, аналогичный (3.8):

$$m_0 u_1^{-1} \geq \lambda v_2^{-1} (m_0 = 2M_0 (\pi G a_0^4)^{-1}).$$

Автор выражает глубокую благодарность Н. Х. Арутюняну за внимание к работе и ценные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел.— М.: Наука, 1983.
2. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач.— М.: Наука, 1981.

Поступила 25/IX 1987 г.

УДК 539.3

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, НАГРУЖЕННОЙ ПО КРУГОВОЙ ПЛОЩАДКЕ

Б. В. Нерубайло, И. Ф. Образцов, В. П. Ольшанский

(Москва, Харьков)

Цилиндрическая оболочка относится к распространенным элементам конструкций. Поэтому расчету ее локальной прочности уделялось значительное внимание. Наиболее изучено напряженное состояние при нагружении оболочки по прямоугольной площадке и отрезку координатной линии [1—3]. Гораздо беднее информация по расчету прочности оболочки в зоне круговой площадки нагружения. Первые замкнутые формулы для вычисления изгибающих моментов под нормальной силой в центре круга получены в [4]. Позже эти величины представлялись рядами по функциям Макдональда комплексного аргумента [5—7], что позволило расширить область их применимости на оболочки других форм. В [8] для вычисления усилий и моментов в панелях нулевой и положительной кривизны предложены степенные ряды с логарифмом. Путем обрывания разложений даны простые асимптотические формулы, в которых учитываются размеры оболочки и площадки нагружения, а также закон распределения внешней нагрузки. Плотность распределения задается степенной зависимостью с произвольным показателем. Меняя его, можно получать как регулярные, так и сингулярные распределения. Однако остались неизвестными границы применимости полученных асимптотических выражений.

В данной работе предложены замкнутые формулы для вычисления изгибающих моментов и тангенциальных усилий, что важно при полном определении нормальных напряжений на внешней и внутренней поверхностях оболочки. Их вычисление сведено к табулированным функциям Томсона. Кроме равномерного рассмотрено параболическое распределение нагрузки с нулевым значением давления на контуре площадки. Даны простые асимптотические формулы для вычисления усилий и моментов, а также установлены границы их применимости. Проведено сравнение с численными результатами других авторов. Показано, что локальное напряженное состояние бесконечно длинных оболочек определяется одним безразмерным параметром подобия. Это позволяет построить универсальные графики для расчета оболочек различных толщин и диаметров, нагруженных по круговым площадкам различных радиусов. Определение напряжений в наиболее опасной точке (центре площадки) при заданной плотности распределения нагрузки сводится к использованию четырех таких графиков.

При анализе локального напряженного состояния исходим из уравнений тонких упругих изотропных оболочек с большим показателем изменчивости [9]. Площадку нагружения считаем достаточно удаленной от торцов тонкостенного тела, когда можно пренебречь их влиянием на значения местных напряжений. В этих условиях исследование удобно провести методом двумерных интегральных преобразований Фурье. Полученные решения не будут периодическими по окружной координате. Однако это не вносит больших погрешностей ввиду быстрого убывания решений по этой переменной [10]. В пользу таких приближенных решений сделан вывод при сравнении их с точными [11].

Для вычисления тангенциальных усилий  $t_1, t_2$  и изгибающих моментов  $m_1, m_2$  в центре окружности с равномерно распределенной силой  $P$  методом интегральных преобразований Фурье получены квадратуры [8]

$$(1) \quad m_1 = A_1 + \nu A_2, \quad m_2 = A_2 + \nu A_1;$$

$$(2) \quad t_1 \delta_{1j} + t_2 \delta_{2j} + A_1 \delta_{1k} + A_2 \delta_{2k} = - \frac{qr}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int [b^4 R_2 \xi^2 (\eta^2 \delta_{1j} + \xi^2 \delta_{2j}) - (\xi^2 + \eta^2)^2 (\xi^2 \delta_{1k} + \eta^2 \delta_{2k}) J_0(r \sqrt{\xi^2 + \eta^2})] [(\xi^2 + \eta^2)^4 + b^4 \xi^4]^{-1} d\xi d\eta, \\ b^4 = 12(1 - \nu^2) h^{-2} R_2^{-2}.$$

Здесь  $R_2, h$  — радиус и толщина оболочки;  $\nu$  — коэффициент Пуассона ее материала;  $q = P(2\pi r)^{-1}$  — плотность распределения внешней силы  $P$  по окружности радиуса  $r$ ;  $J_0(z)$  — функция Бесселя первого рода нулевого порядка;  $\delta_{mj}, \delta_{nk}$  — символы Кронекера;  $m = \overline{1, 2}$ ;  $n = \overline{1, 2}$ .

Заменим в (2) переменные  $\xi, \eta$  на  $\gamma, \varphi$ , положив  $\xi = \gamma \cos \varphi, \eta = \gamma \sin \varphi$ . В новых переменных несобственный интеграл по  $\gamma$  выражается через функцию Макдональда  $K_0(z)$  [12]:

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0(\gamma r) \gamma}{\gamma^2 + ib^2 \cos^2 \varphi} d\gamma = K_0(\sqrt{i} br \cos \varphi), \quad i = \sqrt{-1}.$$

Интегрирование по  $\varphi$  сводится также к табличным интегралам [12]

$$\int_0^{\pi/2} K_0(z \cos \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2} I_0(z) K_0(z), \quad \int_0^{\pi/2} K_0(z \cos \varphi) \cos 2\varphi d\varphi = - \frac{\pi}{2} I_1(z) K_1(z),$$

в которых  $I_n, K_n$  — модифицированные функции Бесселя порядка  $n$ .

В результате усилия и моменты в центре окружности представляются выражениями

$$(3) \quad t_{1,2} = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{h} qr \operatorname{Im} [I_0(ar) K_0(ar) \pm I_1(ar) K_1(ar)], \\ A_{1,2} = \frac{qr}{2} \operatorname{Re} [I_0(ar) K_0(ar) \mp I_1(ar) K_1(ar)], \quad a = \frac{1}{2} b \sqrt{i}.$$

Это функции влияния для определения  $t_i, m_j$  в наиболее опасной точке — центре круговой площадки нагружения, распределенной нормальной силой. Так, при равномерном распределении силы по кругу радиуса  $R$  их приходится интегрировать от нуля до  $R$ , что несложно выполнить с помощью выражений

$$\int_0^R r I_0(ar) K_0(ar) dr = \frac{R^2}{2} [I_0(aR) K_0(aR) + I_1(aR) K_1(aR)], \\ \int_0^R r I_1(ar) K_1(ar) dr = \frac{R^2}{2} \left[ I_1(aR) K_1(aR) + I_0(aR) K_2(aR) - \frac{2}{a^2 R^2} \right].$$

Далее следует выделить вещественную и мнимую части, используя соотношения [12]  $I_n(x\sqrt{i}) = e^{-n\pi i/2} [\operatorname{ber}_n(x) + i \operatorname{bei}_n(x)]$ ,  $K_n(x\sqrt{i}) = e^{n\pi i/2} [\operatorname{ker}_n(x) + i \operatorname{kei}_n(x)]$  между модифицированными функциями Бесселя комплексного аргумента и функциями Томсона. В результате усилия и моменты в центре круга с равномерным давлением  $q = P(\pi R^2)^{-1}$  представляются в замкнутом виде

$$(4) \quad t_{1,2} = \frac{P \sqrt{3(1-\nu^2)}}{2\pi h} [B_0 T_0 + C_0 K_0 + B_1 T_1 + \\ + C_1 K_1 \pm (B_1 T_1 + C_1 K_1 - B_0 T_2 - C_0 K_2 + 8b^{-2} R^{-2})], \\ A_{1,2} = \frac{P}{4\pi} [B_0 K_0 - C_0 T_0 + B_1 K_1 - C_1 T_1 + (B_1 K_1 - C_1 T_1 + C_0 T_2 - B_0 K_2)].$$

Здесь и ниже использованы сокращенные обозначения функций Томсона  $B_m = \text{ber}_m(\rho)$ ,  $C_m = \text{bei}_m(\rho)$ ,  $K_m = \text{ker}_m(\rho)$ ,  $T_m = \text{kei}_m(\rho)$ ,  $\rho = bR/2$ .

Заметим, что выражения изгибающих моментов в форме (1), (4) предложены в [4] путем интегрирования фундаментальных решений для сосредоточенной силы. Нами они получены более простым способом. С физической точки зрения более реальными являются распределения с нулевым значением давления на контуре площадки. Поэтому остановимся на параболическом распределении  $f(r) = q(1 - r^2R^{-2})$ ,  $q = 2P(\pi R^2)^{-1}$ .

Для вычисления  $t_j$ ,  $m_j$  выражения (3) теперь следует интегрировать от нуля до  $R$  с весом  $f(r)$ . Это не вызывает затруднений, поскольку

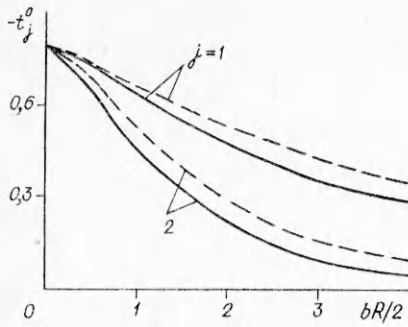
$$\int_0^R r^3 I_0(ar) K_0(ar) dr = \frac{R^4}{6} \left[ I_0(aR) K_0(aR) + \frac{1}{aR} I_1(aR) K_0(aR) + \right. \\ \left. + I_1(aR) K_1(aR) - \frac{1}{aR} I_2(aR) K_1(aR) \right], \\ \int_0^R r^3 I_1(ar) K_1(ar) dr = \frac{R^4}{6} [I_1(aR) K_1(aR) + I_2(aR) K_2(aR)].$$

После вычисления квадратур и выделения мнимой и вещественной частей находим

$$t_{1,2} = \frac{2P \sqrt{3(1-\nu^2)}}{3\pi h} \left\{ B_0 T_0 + C_0 K_0 + B_1 T_1 + C_1 K_1 + \frac{1}{\sqrt{2} bR} (B_0 T_1 + \right. \\ \left. + C_0 K_1 + B_0 K_1 - C_0 T_1) - \frac{1}{\sqrt{2} bR} (B_1 K_2 - C_1 T_2 + C_1 K_2 + B_1 T_2) \pm \right. \\ \left. \pm [B_1 T_1 + C_1 K_1 - B_0 T_2 - C_0 K_2 + \frac{\sqrt{2}}{bR} (B_1 K_2 - C_1 T_2 + \right. \\ \left. + B_1 T_2 + C_1 K_2) + 12(bR)^{-2}] \right\}, \\ A_{1,2} = \frac{P}{3\pi} \left\{ B_0 K_0 - C_0 T_0 + B_1 K_1 - C_1 T_1 + \frac{1}{\sqrt{2} bR} (B_0 K_1 - C_0 T_1 - C_0 K_1 - \right. \\ \left. - B_0 T_1) - \frac{1}{\sqrt{2} bR} (B_1 K_2 - C_1 T_2 - C_1 K_2 - B_1 T_2) + \right. \\ \left. \mp [B_1 K_1 - C_1 T_1 - B_0 K_2 + C_0 T_2 + \frac{\sqrt{2}}{bR} (B_1 K_2 - C_1 T_2 - B_1 T_2 - C_1 K_2)] \right\}.$$

Введем безразмерные усилия  $t_j^0 = \frac{2\pi h}{P} (R \sqrt{3(1-\nu^2)})^{-1} t_j$  и моменты  $m_j^0 = P^{-1} m_j$  ( $j = 1, 2$ ). Из построенных решений следует, что при заданном  $\nu$  величины  $m_j^0$ ,  $t_j^0$  определяются только одним безразмерным параметром  $\rho = bR/2$  — параметром подобия, так как оболочки с различными  $R_2$ ,  $h$ ,  $R$  при фиксированном  $\rho$  имеют одинаковые  $t_j^0$ ,  $m_j^0$ . Поэтому в случае длинных цилиндрических оболочек, когда можно пренебречь влиянием торцов на распределение местных напряжений, графические зависимости  $t_j^0$ ,  $m_j^0$  от  $\rho$  примут универсальный характер и могут быть использованы для расчета оболочек с различными  $R_2$ ,  $h$ ,  $R$ . Эти зависимости представлены на рис. 1, 2 (сплошные линии относятся к равномерному, а штриховые — к параболическому распределению нагрузки при  $\nu = 0,3$ ).

Видно, что для фиксированных значений  $\rho$  параболическое распределение более опасно, т. е. приводит к большим напряжениям в центре круга. Тангенциальное усилие  $t_1$  оказывается большим, чем  $t_2$ , что отмечалось и при численном суммировании тригонометрических рядов для квадратной площадки нагружения [2]. С увеличением  $\rho$  отношение моментов  $m_1/m_2$  стремится к  $\nu$ . Так, при  $\rho = 4$  оно незначительно отличается



Р и с. 1

ся от 0,3. Такое отношение принимается в полубезмоментной теории оболочек [2], поэтому она используется для расчетов при  $\rho > 4$ .

При небольших значениях  $\rho$  вычисление  $t_j^0, m_j^0$  можно проводить с помощью элементарных формул, не привлекая таблиц [13] функций Томсона. Эти формулы получаются обрыванием степенных рядов в решениях [8]. При равномерном распределении внешней силы два первых члена разложения дают

$$(5) \quad t_{1,2}^0 = - \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{i}{8} \rho^2 \left[ (2 \mp 1) \ln \frac{\rho}{2} - (0,3456 \pm 0,0772) \right] \right\},$$

$$P^{-1} A_{1,2} = - \frac{1}{8\pi} \left[ 2 \ln \frac{\rho}{2} + 0,1544 \pm 1 - \frac{\pi(2 \pm 1)}{16} \rho^2 \right].$$

В случае параболического распределения в двучленном приближении находим

$$t_{1,2}^0 = - \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{12} \rho^2 \left[ (2 + 1) \ln \frac{\rho}{2} - (0,6790 \mp 0,0895) \right] \right\},$$

$$P^{-1} A_{1,2} = - \frac{1}{8\pi} \left[ 2 \ln \frac{\rho}{2} - 0,3456 \pm 1 - \frac{\pi(2 \pm 1)}{24} \rho^2 \right].$$

Сравнение результатов вычисления  $m_j^0, t_j^0$  по асимптотическим формулам показывает, что при  $bR \leq 1,8$  погрешность элементарных формул не превышает погрешности технической теории оболочек (порядка  $hR_2^{-1}$  по сравнению с единицей). Поэтому неравенство  $bR < 1,8$  следует рассматривать как область допустимого использования асимптотических формул, не забывая о том, что расчет по теории оболочек возможен в принципе только при  $R \geq 0,68h$  [5, 6].

В заключение сравним результаты расчетов по (1), (5) с вычисленными на ЭВМ [6, 7] при  $\nu = 0,3, R_2 h^{-1} = 100, R = xh$ . Во второй и третьей колонках таблицы указаны значения  $f_j = 6m_j$ , заимствованные для различных  $x$  из графиков [6, 7], в четвертой и пятой помещены  $f_j$ , вычисленные по формулам (1), (5). Отклонения чисел, полученных двумя путями, небольшие и обусловлены в определенной мере погрешностью графической информации. Следовательно, предложенные асимптотические формулы обеспечивают приемлемую точность и являются удобными

$x$	$f_1$   $f_2$		$f_1$   $f_2$		$x$	$f_1$   $f_2$		$f_1$   $f_2$	
	Из графиков [6, 7]		По формулам (1), (5)			Из графиков [6, 7]		По формулам (1), (5)	
1	1,72	2,05	1,70	2,04	6	0,63	0,93	0,64	0,95
2	1,30	1,60	1,28	1,61	8	0,50	0,78	0,49	0,79
4	0,86	1,18	0,86	1,19	10	0,38	0,67	0,40	0,68

ми для инженерных расчетов в указанном интервале изменения параметра подобия. Заметим, что приближенные замкнутые решения можно также получить методом синтеза [14] напряженного состояния оболочек.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Даревский В. М. Оболочки под действием локальных нагрузок // Прочность, устойчивость, колебания. — М.: Машиностроение, 1968.
2. Нерубайло Б. В. Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек. — М.: Машиностроение, 1983.
3. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. — М.: Мир, 1982.
4. Шевляков Ю. А., Шевченко В. П. Местные напряжения в цилиндрической оболочке в окрестности сосредоточенных воздействий // Гидроаэромеханика и теория упругости. — Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1967. — Вып. 6.
5. Величко П. М., Шевляков Ю. А., Шевченко В. П. Напряженно-деформированное состояние пластин и оболочек при сосредоточенных нагрузках // Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. — М.: Наука, 1970.
6. Величко П. М. Действие локальной нагрузки, распределенной по круговым областям, на оболочку положительной кривизны // Теоретическая и прикладная механика. — Киев; Донецк: Вища шк., 1975. — Вып. 6.
7. Величко П. М., Хижняк В. К., Шевченко В. П. Местные напряжения в оболочках положительной, нулевой и отрицательной кривизны // Тр. X Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. — Тбилиси: Мецниерба, 1975. — Т. 1.
8. Ольшанский В. П. Местные напряжения в оболочке двойкой кривизны, нагруженной по кругу // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. — 1979. — № 1.
9. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. — М.: Наука, 1976.
10. Гольденвейзер А. Л. К вопросу о расчете оболочек на сосредоточенные силы // ПММ. — 1954. — Вып. 2.
11. Чернышев Г. Н. О контактных задачах в теории оболочек // Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. — М.: Наука, 1970.
12. Градштейн И. М., Рыжик И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производных. — М.: Наука, 1971.
13. Таблицы функций Кельвина/Под ред. К. А. Карпова. — М.: ВЦ АН СССР, 1966.
14. Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В. О методах синтеза напряженного состояния в теории оболочек // ДАН СССР. — 1983. — № 1.

Поступила 26/V 1987 г.

УДК 539.3

### О СОЧЕТАНИИ МЕТОДОВ РЭЛЕЯ И ДИНАМИЧЕСКОГО КРАЕВОГО ЭФФЕКТА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

Г. А. Крижевский  
(Днепропетровск)

Метод динамического краевого эффекта (МДКЭ), предложенный В. В. Болотным, нашел широкое применение при решении задач о собственных колебаниях упругих прямоугольных пластин, а также состоящих из них конструкций [1]. Предназначенный, вообще говоря, для поиска высоких собственных частот и форм при кинематических граничных условиях метод дает хорошие результаты и для низших форм колебаний [2]. При наличии статических условий на контуре точность определения низших собственных значений уменьшается [3]. Погрешность МДКЭ связана с тем, что построенное с его помощью решение не удовлетворяет исходной задаче в окрестности границ. Один из возможных путей уточнения метода — построение угловых пограничных слоев [4], другой — сочетание асимптотического метода с вариационными. Соединению МДКЭ с методом Рэлея — Ритца посвящена работа [5], однако там рассматривался лишь случай кинематических граничных условий, поэтому проверить эффективность подхода затруднительно. Полученные в [5] формулы для собственных частот применимы только для квадратной защемленной по всем краям пластины. Особый интерес при таком сочетании представляет оценка первого приближения (формула Рэлея), поскольку в этом случае возможно получить выражение для собственной частоты в замкнутом виде.

В настоящей работе сочетанием методов Рэлея и МДКЭ получено асимптотическое выражение для частоты собственных колебаний, пригодное для произвольных неизменных вдоль прямолинейного края условий на границе, исследована эффективность подобного подхода.