

СТАЦИОНАРНОЕ ОБТЕКАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА С ТОКОМ НЕСЖИМАЕМОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

В. И. Токачлы (Москва)

§ 1. Постановка задачи. В общем случае рассматриваемую задачу можно сформулировать так. Однородный поток проводящей жидкости натекает на цилиндрическое тело из диэлектрика, внутри которого параллельно образующей расположены прямолинейные проводники с током, создающие магнитное поле. Вектор скорости потока лежит в плоскости, перпендикулярной образующей цилиндра (фиг. 1). Нужно найти поле скоростей и распределение магнитного поля в потоке и цилиндре.

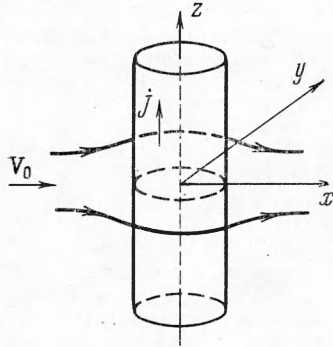
В дальнейшем предполагается, что можно пренебречь эффектом Холла и эффектами, связанными с вязкостью и теплопроводностью, проводимость жидкости $\sigma = \text{const}$, плотность $\rho = \text{const}$. Кроме того, будем считать, что все величины зависят только от x и y (выбор системы координат показан на фиг. 1), т. е. задача является плоской, внешних источников электрического поля нет, и, следовательно, электрическое поле $\mathbf{E} = 0$. При сделанных предположениях система уравнений магнитной гидродинамики [1] может быть приведена к виду

$$(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{M^2}\nabla p_1 + \beta(\mathbf{u} \times \mathbf{h}) \times \mathbf{h}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \Delta a = R_m \mathbf{u} \nabla a, \quad (1.1)$$

$$h_x = \frac{\partial a}{\partial y}, \quad h_y = -\frac{\partial a}{\partial x}$$

$$\left(\beta = R_m N^2, \quad N^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho V_0^2}, \quad M^2 = \frac{\rho V_0^2}{P_0}, \quad R_m = \frac{V_0 r_0}{\nu_m}, \quad \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \right)$$

Здесь \mathbf{h} — напряженность магнитного поля, нормированная на характерную величину магнитного поля в цилиндре H_0 , \mathbf{u} — скорость жидкости, нормированная на V_0 — скорость жидкости при $x \rightarrow -\infty$; p_1 — давление жидкости, нормированное на P_0 — давление жидкости при $x \rightarrow -\infty$; c — скорость света; x, y — нормированы на характерный размер цилиндра r_0 (в случае круглого цилиндра r_0 — радиус цилиндра).



Фиг. 1. Общая схема течения

Далее будем считать, что магнитное число Рейнольдса $R_m \gg 1$ и ограничимся рассмотрением такого режима течения, при котором возмущение гидродинамических параметров, связанное с взаимодействием с магнитным полем, мало. При этом систему (1.1) можно линеаризовать, положив $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}$, $p_1 = p_{10} + p$, где p и \mathbf{v} — малые добавки к безразмерному давлению и скорости невозмущенного потока, т. е. потока, обтекающего цилиндр при выключенном токе. Из дальнейшего будет видно (см. формулы (3.3)), что линейное приближение справедливо при $N^2 \ll 1$. После линеаризации из (1.1) получаем

$$-\mathbf{u}_0 \times \text{rot } \mathbf{v} = -\nabla \Phi_0 + \beta(\mathbf{u}_0 \times \mathbf{h}) \times \mathbf{h} \\ \Phi_0 = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} + p / M^2, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \Delta a = R_m \mathbf{u}_0 \cdot \nabla a \quad (1.2)$$

Заметим, что аналогичная задача уже рассматривалась в работе [2]. Полученное в этой работе выражение для векторного потенциала магнитного поля a , оказывается неприменимым около задней критической точки, кроме того, поле скоростей и распределение давления в потоке найдены неверно.

§ 2. Распределение магнитного поля. В потоке магнитное поле определяется из последнего уравнения (1.2), а в цилиндре — из уравнения

$$\Delta a = -i^0 \quad (2.1)$$

Здесь i^0 — заданное распределение плотности тока в цилиндре, нормированное на величину $j_0 = cH_0/2\pi r_0$. Так как на поверхности цилиндра магнитное поле непрерывно, то должны выполняться следующие условия

$$a_1 = a_2, \quad \partial a_1 / \partial n = \partial a_2 / \partial n \quad (2.2)$$

где n — единичный вектор внешней нормали к поверхности цилиндра; a_1, a_2 — соответственно векторные потенциалы внутри цилиндра и в потоке. Будем искать a_1 и a_2 в виде ряда по степеням $1/\sqrt{R_m}$

$$a_1 = a_{10} + \frac{1}{\sqrt{R_m}} a_{11} + \frac{1}{R_m} a_{12} + \dots, \quad a_2 = a_{20} + \frac{1}{\sqrt{R_m}} a_{21} + \frac{1}{R_m} a_{22} + \dots \quad (2.3)$$

Функции a_{2i} и a_{2i} ($i = 0, 1, \dots$) удовлетворяют уравнениям

$$\Delta a_{2i} = R_m u_0 \cdot \nabla a_{2i}, \quad \Delta a_{1i} = -\delta_{i0} i^0 \quad (2.4)$$

Здесь δ_{i0} — символ Кронекера.

Подставим выражения (2.3) в условия (2.2) и приравняем члены одного порядка относительно $1/\sqrt{R_m}$, учитывая то, что при $R_m \gg 1$ в потоке около цилиндра образуется магнитный пограничный слой [3], в котором $a_2 \sim 1/\sqrt{R_m}$, $\partial/\partial n \sim \sqrt{R_m}$, а в цилиндре $a_1 \sim 1$, $\partial/\partial n \sim 1$. В результате получим граничные условия, которым должны удовлетворять функции a_{1i} и a_{2i} ($i = 0, 1, 2, \dots$) на поверхности цилиндра

$$a_{10} = 0, \quad a_{11} = a_{20}, \quad a_{12} = a_{21}, \dots, \quad \partial a_{20}/\partial n = \partial a_{10}/\partial n, \quad \partial a_{21}/\partial n = \partial a_{11}/\partial n, \dots \quad (2.5)$$

Если ограничиться первыми членами в разложениях a_1 и a_2 , то задача о нахождении магнитного поля в потоке и цилиндре разбивается на две части. Сначала решается внутренняя задача для магнитного поля, т. е. находится решение уравнения (2.1) при граничном условии на поверхности цилиндра $a_1 = 0$. Затем решается внешняя задача, т. е. ищется решение уравнения (1.2.4) при граничном условии на поверхности цилиндра

$$\partial a_2/\partial n = \partial a_1/\partial n \quad (2.6)$$

Допустим, что внутренняя задача для магнитного поля решена и перейдем к решению внешней задачи. Будем считать, что известны потенциальная функция ξ и функция тока η невозмущенного течения жидкости, т. е. имеем

$$u_{0x} = \partial \xi/\partial x = \partial \eta/\partial y, \quad u_{0y} = \partial \xi/\partial y = -\partial \eta/\partial x$$

Произвольная постоянная в ξ выбрана так, что расстояние между критическими точками равно 1. Перейдя в последнем уравнении (1.2) к новым переменным ξ и η , получим для a уравнение с постоянными коэффициентами

$$\partial^2 a/\partial \xi^2 + \partial^2 a/\partial \eta^2 = R_m \partial a/\partial \xi \quad (2.7)$$

Пусть само тело и распределение тока в нем симметричны относительно оси x . Тогда вне тела при $y = 0$ ($\eta = 0$) имеем $u_0 \cdot h = 0$. Так как внутренняя задача для магнитного поля решена, то величина $u_0 \cdot h = u_0^2 \partial a/\partial \eta$ задана на поверхности цилиндра, и для a в потоке имеем следующие граничные условия: $\partial a/\partial \eta|_{\eta=0} = f(\xi)$, $\nabla a \rightarrow 0$ при $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \rightarrow \infty$, $f(\xi) = u_0 \cdot h/u_0^2|_{\eta=0}$ при ($0 < \xi < 1$), $f(\xi) = 0$ при ($\xi < 0$; $\xi > 1$)

Используя эти граничные условия, получим решение (2.7) в виде

$$a = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp\left(\frac{R_m(\xi - \xi')}{2}\right) K_0\left(\frac{R_m}{2} \sqrt{\eta^2 + (\xi - \xi')^2}\right) f(\xi') d\xi' \quad (2.8)$$

Здесь K_0 — функция Макдональда.

Воспользовавшись тем, что $R_m \gg 1$, найдем асимптотическое выражение для a из (2.8). Для этого потребуем выполнения следующих условий: (2.9)

$$R_m |\eta| \gg 1 \quad (0 < \xi < 1), \quad R_m \sqrt{\eta^2 + \xi^2} \gg 1 \quad (\xi < 0), \quad R_m \sqrt{\eta^2 + (1 - \xi)^2} \gg 1 \quad (\xi > 1)$$

Эти условия означают, что из рассмотрения исключается достаточно узкая область, прилегающая к границе цилиндра ($\sim 1/\sqrt{R_m}$). При выполнении условий (2.9) при любом ξ' $R_m \sqrt{\eta^2 + (\xi - \xi')^2} \gg 1$ и K_0 можно заменить асимптотикой. Далее, обратим внимание на следующее обстоятельство. При обтекании цилиндра на его границе существуют передняя и задняя критические точки, в которых $u = 0$. Около передней критической точки $u_{0y} \sim \sqrt{\xi}$, и, следовательно, $f(\xi) \sim 1/\sqrt{\xi}$, а около задней критической точки $f(\xi) \sim 1/\sqrt{1 - \xi}$. Поэтому можно положить $f(\xi) = g(\xi)/\sqrt{\xi(1 - \xi)}$, где функция $g(\xi)$ регулярна на отрезке $[0, 1]$. Учитывая все это, из (2.8) получим

$$a = -\frac{2}{\sqrt{\pi R_m}} \exp\left(\frac{R_m \xi}{2}\right) \int_0^{\pi/2} \frac{\exp\{-1/2 R_m [\sin^2 u + \sqrt{\eta^2 + (\xi - \sin^2 u)^2}]\}}{[\eta^2 + (\xi - \sin^2 u)^2]^{1/4}} g(\sin^2 u) du \quad (2.10)$$

Из (2.10), с точностью до членов $\sim 1/\sqrt{R_m}$, находим

$$a \approx \frac{2}{R_m} g(0) \frac{\exp[-R_m r_1 (\sin^2 \theta_1)^2]}{\sqrt{r_1} \sin^2 \theta_1} \quad \text{при } \sqrt{R_m} r_1 \sin^2 \theta_1 \gg 1 \quad (2.11)$$

$$\xi = r_1 \cos \theta_1, \quad \eta = r_1 \sin \theta_1 \quad (2.12)$$

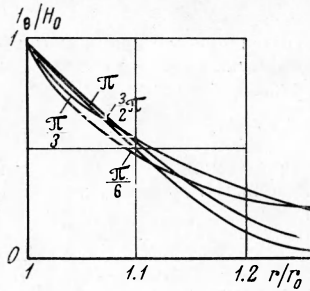
В качестве примера рассмотрим обтекание круглого цилиндра радиуса r_0 , на оси которого расположен проводник с током. В этом случае

$$\xi = 1/2 + 1/4(r + r^{-1}) \cos \theta, \quad \eta = 1/4(r - r^{-1}) \sin \theta, \quad g = -1$$

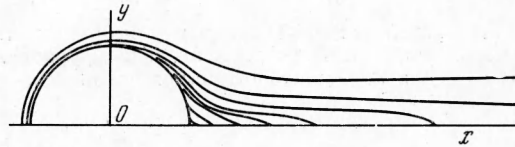
Около поверхности цилиндра можно положить $r = 1 + t$ ($t \ll 1$). Из (2.11) получаем асимптотическое выражение для a в виде

$$a = \frac{1}{R_m} \frac{\exp[-R_m t^2 (\sin 1/2 \theta)^2]}{t \sin 1/2 \theta} \quad (\sqrt{R_m} t \sin 1/2 \theta \gg 1) \quad (2.13)$$

Для этого же случая были проведены вычисления a на ЭЦВМ по формуле (2.8). Результаты вычислений приведены на фиг. 2—4. На фиг. 2 показано изменение h_0 при удалении от поверхности цилиндра по радиусу при различных θ для $R_m = 2 \cdot 10^2$. На фиг. 3 и 4 показано распределение силовых линий магнитного поля. Видно, что с ростом R_m силовые линии сильнее вытягиваются за цилиндром, образуя магнитный след, однако величина магнитного поля в этой области мала: $h \sim 1/\sqrt{R_m}$. В этом легко убедиться, положив в формуле (2.10) $\eta = 0$. Кроме того, вычисления a при $r = 1$ показали, что всюду $a(1, \theta) \sim 1/\sqrt{R_m}$, включая и заднюю критическую точку, и, следовательно, разложения (2.3) справедливы при любых r и θ .



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Изменение магнитного поля вдоль радиуса при обтекании круглого цилиндра при различных θ ; $R_m = 2 \cdot 10^2$

Фиг. 3. Силовые линии магнитного поля при обтекании круглого цилиндра с током; $R_m = 2 \cdot 10^2$

§ 3. Возмущение поля скоростей. Перейдем к исследованию поля скоростей. Введем функцию тока ψ . Тогда

$$v_x = \partial\psi/\partial y, \quad v_y = -\partial\psi/\partial x$$

а для ψ из (1.2.1) получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \frac{1}{u_0^2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial a}{\partial \xi} \frac{\partial a}{\partial \eta} \quad \left(\Phi_0 = -\beta \int_{-\infty}^{\xi} u_0^2 \left(\frac{\partial a}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right) \quad (3.1)$$

Начнем с исследования течения в пограничном слое около цилиндра.

а) Течение в пограничном слое. При $R_m \gg 1$ в пределах магнитного пограничного слоя $(\Delta\eta/\Delta\xi)^2 \sim 1/R_m \ll 1$, и первым членом в левой части (3.1) можно пренебречь

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \frac{1}{u_0^2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial a}{\partial \xi} \frac{\partial a}{\partial \eta} \quad (3.2)$$

Пренебрегая членами $\sim 1/R_m$, можно внести $1/u_0^2$ под $\partial/\partial\eta$ в (3.2) и, используя (1.2.4), проинтегрировать (3.2). Окончательно получаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{\Phi_0}{u_0^2} + \frac{N^2}{2} \left(\frac{\partial a}{\partial \eta} \right)^2, \quad \psi = \int_0^{\eta} \left[\frac{\Phi_0}{u_0^2} + \frac{N^2}{2} \left(\frac{\partial a}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\eta, \quad p = -\frac{N^2 M^2}{2} h^2 \quad (3.3)$$

б) Течение около задней критической точки. Полученные выше формулы (3.3) не применимы в окрестности задней критической точки. Поэтому поступим следующим образом. Применим операцию rot к (1.2.1). Интегрируя полученное уравнение вдоль линии тока, найдем

$$\text{rot}_z \mathbf{v} = F \quad \left(F = \beta \int_{-\infty}^{\xi} \frac{1}{u_0} (\mathbf{h}\nabla)(\mathbf{u}_0 \times \mathbf{h})_z dl_v \right) \quad (3.4)$$

В достаточно малой окрестности задней критической точки поверхность цилиндра можно считать плоской. Введем локальную систему координат, направив ось x перпендикулярно поверхности цилиндра, а ось y — вдоль поверхности и поместив начало координат в заднюю критическую точку. В этой системе координат при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ функцию F можно представить в виде

$$F = \frac{y}{|y|} F_0 \quad (3.5)$$

где F_0 — значение F , взятое в задней критической точке.

Таким образом, около задней критической точки функция ψ должна удовлетворять уравнению

$$\Delta\psi = \frac{y}{|y|} F_0 \quad (3.6)$$

и граничным условиям

$$\psi|_{\theta=1/2\pi} = \psi|_{\theta=-1/2\pi} = 0 \quad (3.7)$$

Разлагая правую часть (3.6) и ψ в ряд Фурье и подставляя в (3.6), найдем

$$\psi = \frac{F_0}{\pi} r^2 \ln r \sin 2\theta - \frac{F_0}{\pi} r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2(2k+1)\theta}{(2k+1)[(k+1)^2-1]} + a_0 r^2 \sin 2\theta \quad (3.8)$$

Последний член в (3.8) относится к невозмущенному течению, и $a_0 \sim 1$. Оценим теперь F_0 . Для этого выпишем явное выражение для F_0 в случае обтекания круглого цилиндра, на оси которого расположен проводник с током

$$F_0 = 2\beta \int_0^{\pi} [h_{0r}(\theta) \operatorname{ctg} \theta - h_{0r}^2(\theta)] d\theta \sim \sqrt{R_m} N^2 \quad (h_{0r} = h_r|_{r=1}) \quad (3.9)$$

Из (3.8) следует, что при любом F_0 существует окрестность задней критической точки, в которой неприменимо линейное приближение (добавка к невозмущенной функции тока $\psi_0 = a_0 r^2 \sin 2\theta$ становится $\gg \psi_0$), причем при $\sqrt{R_m} N^2 \gg 1$ размер этой окрестности не меньше $r_* \sim 1/\sqrt{R_m}$ (выражение (3.6) строго применимо при $r \ll r_*$).

в) *Распределение поля скоростей за пределами пограничного слоя.* Решение уравнения (3.1) можно представить в виде

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \int \ln [(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2] \omega(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \quad \left(\omega = \frac{1}{u_0^2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial a}{\partial \xi} \frac{\partial a}{\partial \eta} \right)$$

Воспользуемся тем, что функция ω практически отлична от нуля в пограничном слое около цилиндра и в узком магнитном следе за цилиндром, т. е. при $\eta \leq \eta_0 \sim 1/\sqrt{R_m}$. Учитывая это и то, что $\omega(\xi', -\eta) = -\omega(\xi', \eta)$, для ψ при $\eta \gg \eta_0$ получим выражение

$$\psi = -\frac{\eta}{2\pi} \int \frac{g(\xi') d\xi'}{(\xi - \xi')^2 + \eta^2},$$

$$g(\xi') = I_1 + I_2, \quad I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta'}{u_0^2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta'} d\eta', \quad I_2 = \beta \int_{-\infty}^{\infty} \eta' \frac{\partial a}{\partial \xi'} \frac{\partial a}{\partial \eta'} d\eta'$$

Оценим интегралы I_1 и I_2 . Так как u_0 практически не меняется поперек пограничного слоя, то

$$I_1 \approx u_0^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta' \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta'} d\eta' = -\frac{1}{u_0^2(\xi', 0)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0 d\eta' \sim -\frac{\Phi_0(\xi', 0)}{u_0^2(\xi', 0)} \eta_0 \sim \frac{N^2}{\sqrt{R_m}} g_1(\xi')$$

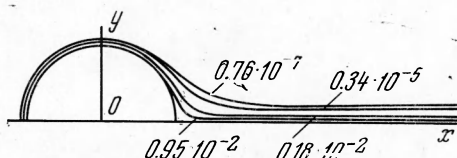
Далее, из (2.7) в погранслоном приближении имеем $\partial^2 a / \partial \eta^2 = R_m \partial a / \partial \xi$

и, следовательно,

$$I_2 = \frac{N^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta' \frac{\partial}{\partial \eta'} \left(\frac{\partial a}{\partial \eta'} \right)^2 d\eta' = -N^2 \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial a}{\partial \eta'} \right)^2 d\eta' \sim -\frac{N^2}{\sqrt{R_m}} g_2(\xi')$$

Таким образом, окончательно получаем

$$g(\xi') = N^2 g_0(\xi') / \sqrt{R_m}$$



Фиг. 4. Силовые линии магнитного поля при обтекании круглого цилиндра с током; $R_m = 2 \cdot 10^4$

где $g_0(\xi)$ — некоторая функция, которая не зависит от N и R_m . Следовательно, за пределами пограничного слоя возмущения поля скоростей и давления имеют порядок $N^2/\sqrt{R_m}$, а не N^2 , как это получилось в работе [2].

Несколько слов о вычислении поля скоростей в работе [2]. Уравнение (3.1) можно записать так

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega_1(x, y) \quad \left(\omega_1 = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} - \beta u_0^2 \frac{\partial a}{\partial \xi} \frac{\partial a}{\partial \eta} \right)$$

Представим теперь ψ в виде

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \ln \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')} \omega_1(r', \theta') r' dr' d\theta'$$

Приняв

$$\omega_1 = \omega_0(\theta) \delta(r - 1) \quad \left(\omega_0 = \int_1^\infty \omega_1(r, \theta) dr \right)$$

(это сделать можно, так как функция ω_1 отлична от нуля в тонком пограничном слое около цилиндра), получим для ψ выражение

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \ln \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \theta')} \omega_0(\theta') d\theta'$$

из которого можно найти

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{r - \cos(\theta - \theta')}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \theta')} \omega_0(\theta') d\theta'$$

Если положим формально в последнем выражении $r = 1$, то получим, что $v_\theta|_{r=1} = 0$, т. е. придем к результату, на основании которого построены все выкладки в § 4 работы [2]. Но именно так делать нельзя, так как ψ представляет собой потенциал простого слоя, $\partial\psi/\partial r$ разрывна при $r = 1$ и

$$\lim_{r \rightarrow 1+0} \partial\psi/\partial r = \frac{1}{2} \omega_0(\theta), \quad \text{т. е. } v_\theta|_{r=1} \neq 0$$

Автор благодарен А. И. Морозову за постоянный интерес к работе.

Поступила 14 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, 1957.
2. H o s k i n g L. M. The flow of a conducting fluid past a magnetized cylinder at high magnetic Reynolds number, Appl. Sci. Res., 1961, vol. B 9, № 3.
3. Жигулев В. Н. Теория магнитного пограничного слоя. Докл. АН СССР, 1959, т. 124, № 5.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Г. В. Филиппов, В. Г. Шахов

(Куйбышев)

Уравнения нестационарного плоского ламинарного магнитогидродинамического пограничного слоя решались рядом авторов (например, [1-4]). Ниже предлагаются решения некоторых задач для следующих случаев пространственных течений.

1. Пограничный слой на бесконечно длинном цилиндре, которому мгновенно сообщаются поступательная скорость и вращение.

2. Пограничный слой на скользящем крыле, начавшем двигаться с постоянной скоростью.

1. Пограничный слой на цилиндре, вращающемся в осевом потоке. 1°. Уравнение движения вязкой жидкости в присутствии магнитного поля, нормального к поверхности тела, приближенно можно записать в виде [1]

$$\frac{dV}{dt} = -\rho^{-1} \nabla p + \nu \nabla^2 V - \sigma \rho^{-1} B_0^2 V \quad (1.1)$$