

УДК 536.24

## ГАРМОНИЧЕСКИЙ ЗАКОН ПУЛЬСАЦИЙ ИСТИННОГО КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООТДАЧИ

Ю.Б. ЗУДИН

*Московский энергетический институт (Технический университет)*

Проводится анализ гармонического закона изменения истинного коэффициента теплоотдачи на теплообменной поверхности стенки со стационарным граничным условием третьего рода на внешней поверхности. Процедура решения включает применение метода типа Галеркина, а также разложение граничного условия третьего рода на внутренней поверхности в степенной ряд по амплитуде пульсаций истинного коэффициента теплоотдачи. Получено приближенное аналитическое решение для функции теплового влияния стенки — поправочного множителя к коэффициенту теплоотдачи, определяемому в теории конвективного теплообмена без учета теплового сопряжения со стенкой. Решение для пульсаций температуры на теплообменной поверхности записано в виде гармоники с фазовым сдвигом относительно пульсационной составляющей истинного коэффициента теплоотдачи.

### 1. ВВЕДЕНИЕ. ПРОЦЕССЫ ТЕПЛООБМЕНА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ

Задачи моделирования теплообмена с периодической интенсивностью особенно актуальны при исследовании развития неустойчивости и перехода к автоколебательному режиму в двухфазных потоках, в частности, в процессах внутритрубной конденсации. В работе [1] была впервые в общем виде поставлена проблема учета теплового влияния стенки на осредненный коэффициент теплоотдачи в процессах теплообмена с периодической интенсивностью. Метод [1] заключается в замене сопряженной кондуктивно-конвективной задачи теплоноситель — стенка на краевую задачу для уравнения теплопроводности в стенке. Воздействие потока теплоносителя на стенку считается эквивалентным заданию на поверхности теплообмена истинного коэффициента теплоотдачи, определяемого как отношение плотности теплового потока  $q_\delta$  к перепаду температур  $\vartheta_\delta$  взятых на поверхности теплообмена

$$\alpha = \frac{q_\delta}{\vartheta_\delta}.$$

Из решения уравнения теплопроводности с периодическим граничным условием третьего рода на внутренней поверхности стенки (при  $x = \delta$ ) и подходящим стационарным граничным условием на внешней поверхности стенки (при  $x = 0$ ) определяется поле температур в стенке  $\mathcal{A}(x, z, \tau)$ . Зная его, можно найти осредненный коэффициент теплоотдачи, определяемый как частное от деления осредненной плотности теплового потока, проходящего через теплообменную поверхность  $\langle q_\delta \rangle$ , на осредненный перепад температур стенка — жидкость  $\langle \vartheta_\delta \rangle$ :

$$\alpha_m = \frac{\langle q_\delta \rangle}{\langle g_\delta \rangle}. \quad (1)$$

Величина  $\alpha_m$ , определяемая в традиционном теплообменном эксперименте и используемая в прикладных расчетах, названа в [1] экспериментальным коэффициентом теплоотдачи. Вследствие исходной периодичности процесса конвективного теплообмена истинный коэффициент теплоотдачи может быть представлен в виде суперпозиции осредненной и пульсационной составляющих:

$$\alpha(z, \tau) = \langle \alpha \rangle (1 + \psi(z, \tau)). \quad (2)$$

Истинный осредненный коэффициент теплоотдачи, по определению, равен

$$\langle \alpha \rangle = \left\langle \frac{q_\delta}{g_\delta} \right\rangle. \quad (3)$$

Ясно, что два осредненных по различным процедурам значения коэффициента теплоотдачи —  $\alpha_m$  и  $\langle \alpha \rangle$  — в общем случае не будут равны друг другу. Их различие определяется функцией теплового влияния стенки

$$\varepsilon = \frac{\alpha_m}{\langle \alpha \rangle}, \quad (4)$$

которая изменяется в пределах

$$\left\langle \frac{1}{1 + \psi} \right\rangle^{-1} \leq \varepsilon \leq 1. \quad (5)$$

Величина  $\varepsilon$  может быть использована в качестве поправочного множителя к коэффициенту теплоотдачи, определяемому в теории конвективного теплообмена без учета теплового сопряжения со стенкой.

В работе [1] получены точные аналитические решения задачи для трех типов пульсаций истинного коэффициента теплоотдачи — гармонического, обращенного гармонического и симметричного ступенчатого. Выражения для функции теплового влияния стенки записывались в виде бесконечных цепных дробей с комплексными членами и сумм бесконечных рядов. В [2, 3] предложен простой приближенный метод расчета, основанный на асимптотических разложениях граничного условия третьего рода в степенные ряды по малым параметрам и “сшивании” решения для промежуточной области параметров. С помощью метода [2, 3] был рассмотрен ряд задач: “ячеистая” периодичность теплообмена [4]; различная геометрия нагревателя [5]; усложненное условие теплоподвода [6]; различные типы пространственно-временных пульсаций интенсивности теплообмена [7]; определение осредненного коэффициента теплопередачи [8]; дельтообразные пульсации интенсивности теплообмена [9]; периодические колебания на поверхности теплообмена термического сопряжения [10].

В работах [4 – 8] использовался ступенчатый закон изменения истинного коэффициента теплоотдачи, характеризующийся двумя параметрами — амплитудой и асимметрией. Для этого случая метод [2, 3] позволял получать простые аналитические выражения для интегральной характеристики процесса — функции теплового влияния стенки, но оказался слишком грубым для расчета локального поля температур в стенке.

Переход от двухпараметрического закона пульсаций интенсивности теплообмена к однопараметрическому позволил определять поля температурных пульсаций в стенке в задачах о пространственно-временных колебаниях термического сопротивления [9] и периодического во времени испарения жидкой пленки [10].

Целью настоящей работы является определение функции теплового влияния стенки и температурных пульсаций на поверхности теплообмена для случая гармонических колебаний истинного коэффициента теплоотдачи по пространственно-временному закону прогрессивной волны.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается уравнение теплопроводности в пластине, на обеих поверхностях которой заданы граничные условия третьего рода. На внешней поверхности  $x = 0$  коэффициент теплоотдачи постоянен, на внутренней поверхности  $x = \delta$  интенсивность теплообмена пульсирует в соответствии с (2). Решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial z^2} \right) \quad (6)$$

в силу его линейности может быть представлено в виде суперпозиции стационарной части  $\langle \mathcal{G} \rangle(x)$ , удовлетворяющей уравнению

$$\lambda \frac{d^2 \langle \mathcal{G} \rangle}{dx^2} = 0$$

и стационарному граничному условию третьего рода при  $x = 0$ , и пульсационной составляющей  $\mathcal{G}'$ , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{G}'}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 \mathcal{G}'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}'}{\partial z^2} \right).$$

Для рассматриваемой периодичности типа прогрессивная волна уравнение для пульсаций температур можно преобразовать к виду

$$m \frac{\partial \hat{\mathcal{G}}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \hat{\mathcal{G}}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \hat{\mathcal{G}}}{\partial \hat{x}^2}. \quad (7)$$

Зададим пульсационную составляющую истинного коэффициента теплоотдачи в (2) в виде гармонической функции

$$\psi(\xi) = b \cos \xi. \quad (8)$$

Будем искать решение уравнения (7) в виде

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}} = & \left( A_1 \frac{\text{sh}(r+is)\hat{x}}{\text{sh}(r+is)\hat{\delta}} + A_2 \frac{\text{ch}(r+is)\hat{x}}{\text{ch}(r+is)\hat{\delta}} \right) \exp(i\xi) + \\ & + \left( A_1^* \frac{\text{sh}(r-is)\hat{x}}{\text{sh}(r-is)\hat{\delta}} + A_2^* \frac{\text{ch}(r-is)\hat{x}}{\text{ch}(r-is)\hat{\delta}} \right) \exp(-i\xi). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь величины  $r, s$  — функции обратного числа Фурье  $m = z_0^2 / a\tau_0$ :

$$2r^2 = \sqrt{1+m^2} + 1, \quad 2s^2 = \sqrt{1+m^2} - 1.$$

Граничное условие при  $x = \delta$

$$\alpha \vartheta_\delta = -\lambda \left( \partial \vartheta / \partial x \right) \Big|_{x=\delta}$$

может быть представлено в виде

$$\langle \alpha \rangle (1 + \psi) (\langle \vartheta_\delta \rangle + \vartheta'_\delta) = -\lambda \left( \partial \langle \vartheta \rangle / \partial x \right) \Big|_{x=\delta} - \lambda \left( \partial \vartheta' / \partial x \right) \Big|_{x=\delta}.$$

Перепишем выражение (1) для экспериментального коэффициента теплотдачи в виде

$$\alpha_m = -(\lambda / \langle \vartheta_\delta \rangle) \left( \partial \langle \vartheta \rangle / \partial x \right) \Big|_{x=\delta}.$$

Тогда используя равенство (4) для функции теплового влияния стенки и безразмерные обозначения для пульсаций температуры и плотности теплового потока на теплообменной поверхности, перепишем граничное условие при  $x = \delta$  в следующем виде:

$$(1 + \psi) (1 + \hat{\vartheta}_\delta) = \varepsilon + \hat{q}_\delta / \langle \hat{\alpha} \rangle. \quad (10)$$

Подставляя в (10) выражения (8), (9) для пульсационных составляющих истинного коэффициента теплотдачи и температуры поверхности теплообмена, получаем:

$$\begin{aligned} & \left\{ (1 + B \cos \xi) \left[ 1 + (A_1 + A_2) \exp(i\xi) + (A_1^* + A_2^*) \exp(-i\xi) \right] - \varepsilon \right\} \langle \hat{\alpha} \rangle = \\ & = (A_1 B_1 + A_2 B_2) \exp(i\xi) + (A_1^* B_1^* + A_2^* B_2^*) \exp(-i\xi), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\langle \hat{\alpha} \rangle = \langle \alpha \rangle z_0 / \lambda$  — число Био, построенное по истинному осредненному коэффициенту теплотдачи и пространственному периоду пульсаций.

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} B_1 &= F_1 + i\Phi_1, \quad B_1^* = F_1 - i\Phi_1, \\ B_2 &= F_2 + i\Phi_2, \quad B_2^* = F_2 - i\Phi_2, \\ F_1 &= \frac{r \operatorname{sh} 2r \hat{\delta} + s \sin 2s \hat{\delta}}{\operatorname{ch} 2r \hat{\delta} - \cos 2s \hat{\delta}}, \quad \Phi_1 = \frac{s \operatorname{sh} 2r \hat{\delta} - r \sin 2s \hat{\delta}}{\operatorname{ch} 2r \hat{\delta} - \cos 2s \hat{\delta}}, \\ F_2 &= \frac{r \operatorname{sh} 2r \hat{\delta} - s \sin 2s \hat{\delta}}{\operatorname{ch} 2r \hat{\delta} + \cos 2s \hat{\delta}}, \quad \Phi_2 = \frac{s \operatorname{sh} 2r \hat{\delta} + r \sin 2s \hat{\delta}}{\operatorname{ch} 2r \hat{\delta} + \cos 2s \hat{\delta}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Итак,  $B_1, B_1^*, B_2, B_2^*$  — известные функции безразмерной толщины стенки  $\hat{\delta} = \delta / z_0$  и обратного числа Фурье  $m = z_0^2 / a \tau_0$ . Граничное условие (11) формально содержит пять неизвестных: функцию теплового влияния стенки  $\varepsilon$  и две пары комплексно-сопряженных собственных чисел  $A_1, A_1^*, A_2, A_2^*$ . Однако в нашем распоряжении имеется еще неиспользованное стационарное граничное условие при  $x = 0$ :

$$\alpha_0 \vartheta_0 = -\lambda \left( \partial \vartheta / \partial x \right) \Big|_{x=0},$$

которое позволяет исключить  $A_2, A_2^*$ . Тогда в (11) будем иметь три неизвестных:  $\varepsilon, A_1, A_1^*$ . Таким образом, граничное условие при  $x = \delta$  должно определять как основной интегральный параметр задачи  $\varepsilon = \alpha_m \langle \alpha \rangle$ , так и поле температур в стенке. При этом пульсационная температура поверхности теплообмена  $\hat{\vartheta}_\delta$  будет иметь вид простой гармоники со сдвигом по фазе относительно первичной гармоники  $\cos \xi$ :

$$\hat{\vartheta}_\delta = R \cos \xi - I \sin \xi. \quad (13)$$

Здесь  $R, I$  — действительная и мнимая части собственных чисел:

$$A_1 = R + iI, \quad A_1^* = R - iI.$$

### 3. ПРОЦЕДУРА И РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ

При строгом рассмотрении граничного условия третьего рода необходимо задавать поле температурных пульсаций в виде бесконечного ряда Фурье [1]. Тогда известная процедура ортогонализации [11] позволяет определить как все собственные числа (формально-бесконечное количество), так и функцию теплового влияния стенки (в виде бесконечной цепной дроби с комплексными членами [1]).

Задание поля температурных пульсаций в виде единственной гармоники, как это следует из (13), представляется на первый взгляд слишком грубым упрощением. Однако более внимательный анализ показывает, что это не так. Процедуру решения проведем в два этапа.

#### 3.1. Приближенное решение методом типа Галеркина [12]

Для нахождения из (11) трех неизвестных —  $\varepsilon, A_1, A_1^*$  (или, что то же,  $\varepsilon, R, I$ ) используются следующие соотношения: 1) собственно равенство (11), 2) равенство, получающееся из (11) после деления обеих частей выражения на величину  $(1 + b \cos \xi)$ , 3) равенство, следующее из (11) после умножения его обеих частей на величину  $\sin \xi$ .

После осреднения трех указанных равенств по периоду изменения прогрессивной волны  $\xi$  приходим к трем алгебраическим уравнениям относительно неизвестных величин  $\varepsilon, R, I$ . В результате получаем следующее выражение для функции теплового влияния стенки:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_* (1 + \varepsilon_*) M + N}{(1 + \varepsilon_*) M + N}. \quad (14)$$

Здесь  $\varepsilon_*$  — минимально возможное значение, которое может принимать величина  $\varepsilon$ , рассчитываемое из (5), (8):

$$\varepsilon_* = \left\langle \frac{1}{1 + b \cos \xi} \right\rangle^{-1} = \sqrt{1 - b^2},$$

величины  $M, N$  зависят от функций  $F_1, \Phi_1, F_2, \Phi_2$ , определяемых из (12), и двух чисел Био (для каждого из граничных условий):

$$M = \left[ F_2 (F_1^2 + \Phi_1^2) + (F_1 F_2 - \Phi_1 \Phi_2 + F_1^2 + \Phi_1^2) \hat{\alpha}_0 + F_1 \hat{\alpha}_0^2 \right] \langle \hat{\alpha} \rangle +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ (F_1^2 + \Phi_1^2) + 2F_1\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_0^2 \right] \langle \hat{\alpha} \rangle^2, \\
N = & 2 \left[ (F_1^2 + \Phi_1^2) + (F_2^2 - \Phi_2^2) + 2(F_1^2 F_2 + F_2 \Phi_1^2) \hat{\alpha}_0 + (F_1^2 + \Phi_1^2) \hat{\alpha}_0^2 \right] + \\
& + 2 \left[ F_2 (F_1^2 + \Phi_1^2) + (F_1^2 + \Phi_1^2 + F_1 F_2 - \Phi_1 \Phi_2) \hat{\alpha}_0 + F_1 \hat{\alpha}_0^2 \right] \langle \hat{\alpha} \rangle.
\end{aligned}$$

### 3.2. Разложение в ряд по малому параметру [2]

Проводя в граничном условии (11) разложение всех входящих туда величин в степенной ряд по амплитуде  $b \ll 1$  [2], получаем:

$$\varepsilon \approx 1 - Cb^2, \quad (15)$$

где  $C$  — функция типа  $M, N$ , которая здесь не приводится в силу громоздкости.

Проводя теперь такое же разложение в приближенном решении (14), получаем, что последнее с точностью до квадратичного члена совпадает с (15). Указанное сопоставление двух решений можно, в принципе, продолжить по методу [11], увеличивая число базисных функций в методе Галеркина (т. е. последовательно включая в поле температурных пульсаций (9) все более старшие гармоники). Однако при этом процедура решения становится настолько громоздкой, что аналитическое решение утрачивает свои преимущества и предпочтительным является прямой численный анализ.

### 3.3. Асимптотики решения (14)

3.3.1. При  $\hat{\delta} \rightarrow \infty$  влияние стационарного граничного условия при  $x = 0$  на теплообмен при  $x = \delta$  вырождается:  $F_1 = F_2 = r$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = s$ . Выражение (14) принимает вид

$$\varepsilon_\infty = \frac{\varepsilon_*(1 + \varepsilon_*) \langle \hat{\alpha} \rangle^2 + (2 + \varepsilon_* + \varepsilon_*^2) \langle \hat{\alpha} \rangle r + 2(r^2 + s^2)}{(1 + \varepsilon_*) \langle \hat{\alpha} \rangle^2 + (3 + \varepsilon_*) \langle \hat{\alpha} \rangle r + 2(r^2 + s^2)}. \quad (16)$$

3.3.2. При  $\hat{\alpha}_0 \rightarrow \infty$  приходим к предельному стационарному граничному условию  $\mathcal{G}_0 = \text{const}$ . При  $\hat{\alpha}_0 \rightarrow 0$  имеем альтернативное стационарное граничное условие  $q_0 = \text{const}$ . Обе эти асимптотики записываются одинаковым образом:

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_*(1 + \varepsilon_*) \langle \hat{\alpha} \rangle^2 + (2 + \varepsilon_* + \varepsilon_*^2) \langle \hat{\alpha} \rangle F + 2(F^2 + \Phi^2)}{(1 + \varepsilon_*) \langle \hat{\alpha} \rangle^2 + (3 + \varepsilon_*) \langle \hat{\alpha} \rangle F + 2(F^2 + \Phi^2)}. \quad (17)$$

Здесь  $F = F_1$ ,  $\Phi = \Phi_1$  (при  $\mathcal{G}_0 = \text{const}$ ),  $F = F_2$ ,  $\Phi = \Phi_2$  (при  $q_0 = \text{const}$ ).

3.3.3. В пределе при  $\hat{\delta}_0 \rightarrow 0$  влияние внешнего граничного условия достигает своего максимума. Выражение (14) определяется только параметром  $\beta = \langle \alpha \rangle / \alpha_0$  — отношением истинного осредненного коэффициента теплоотдачи к стационарному:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_*(1 + \varepsilon_*)\beta^2 + (2 + \varepsilon_* + \varepsilon_*^2)\beta + 2}{(1 + \varepsilon_*)\beta^2 + (3 + \varepsilon_*)\beta + 2}. \quad (18)$$

3.3.4. При  $\varepsilon_\infty = \varepsilon_0$  получаем случай независимости функции теплового влияния стенки от безразмерной толщины, “разграничивающий” области преобладающего влияния двух предельных типов внешнего граничного условия ( $\vartheta_0 = \text{const}$ ,  $q_0 = \text{const}$ ).

#### 4. СОПОСТАВЛЕНИЕ С ТОЧНЫМ РЕШЕНИЕМ

Для подтверждения корректности общего приближенного решения (14) проведем его сопоставление с отдельными точными решениями, полученными для частных задач в определенных диапазонах изменения определяющих параметров. Вместо соотношения (9) будем искать поле температурных пульсаций в виде бесконечных рядов:

а) при  $\vartheta_0 = \text{const}$

$$\hat{\vartheta} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\text{sh}(r_n + is_n)\hat{x}}{\text{sh}(r_n + is_n)\hat{\delta}} \exp(in\xi) + A_n^* \frac{\text{sh}(r_n - is_n)\hat{x}}{\text{sh}(r_n - is_n)\hat{\delta}} \exp(-in\xi), \quad (19)$$

б) при  $q_0 = \text{const}$

$$\hat{\vartheta} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\text{ch}(r_n + is_n)\hat{x}}{\text{ch}(r_n + is_n)\hat{\delta}} \exp(in\xi) + A_n^* \frac{\text{ch}(r_n - is_n)\hat{x}}{\text{ch}(r_n - is_n)\hat{\delta}} \exp(-in\xi). \quad (20)$$

Пульсации температуры и плотности теплового потока при  $x = \delta$  (на поверхности теплообмена) запишутся в виде

$$\hat{\vartheta}_\delta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(in\xi) + A_n^* \exp(-in\xi), \quad (21)$$

$$\hat{q}_\delta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n B_n \exp(in\xi) + A_n^* B_n^* \exp(-in\xi). \quad (22)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $A_n = R_n + iI_n$ ,  $A_n^* = R_n - iI_n$  — комплексно-сопряженные собственные числа;  $r_n = \left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right) \left[ \left(1 + (m/n)^2\right)^{1/2} + 1 \right]^{1/2}$ ;  $s_n = \left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right) \left[ \left(1 + (m/n)^2\right)^{1/2} - 1 \right]^{1/2}$  — функции обратного числа Фурье  $m = z_0^2 / a\tau_0$ ;  $B_n = F_n + i\Phi_n$ ,  $B_n^* = F_n - i\Phi_n$  — комплексно-сопряженные величины, действительная  $F_n$  и мнимая  $\Phi_n$  части которых зависят от типа граничного условия при  $x = 0$ :

а) при  $\vartheta_0 = \text{const}$

$$F_n = \frac{r_n \text{sh}2r_n\hat{\delta} + s_n \sin 2s_n\hat{\delta}}{\text{ch}2r_n\hat{\delta} - \cos 2s_n\hat{\delta}}, \quad \Phi_n = \frac{s_n \text{sh}2r_n\hat{\delta} - r_n \sin 2s_n\hat{\delta}}{\text{ch}2r_n\hat{\delta} - \cos 2s_n\hat{\delta}}, \quad (23)$$

б) при  $q_0 = \text{const}$

$$F_n = \frac{r_n \text{sh}2r_n\hat{\delta} - s_n \sin 2s_n\hat{\delta}}{\text{ch}2r_n\hat{\delta} + \cos 2s_n\hat{\delta}}, \quad \Phi_n = \frac{s_n \text{sh}2r_n\hat{\delta} + r_n \sin 2s_n\hat{\delta}}{\text{ch}2r_n\hat{\delta} + \cos 2s_n\hat{\delta}}. \quad (24)$$

Процедура точного решения включает следующие этапы:

1. подстановка в граничное условие (10) истинного коэффициента теплоотдачи из (2), (8), пульсаций температур (21), пульсаций плотности теплового потока (22) с учетом (23), (24);
2. почленное умножение бесконечного ряда на гармоническую функцию (8) в левой части (10) с последующим осреднением по периоду;
3. построение рекуррентных соотношений для неизвестных величин — собственных чисел  $A_n, A_n^*$ ;
4. построение итогового соотношения для функции теплового влияния стенки  $\varepsilon$ ;
5. проведение расчетов сумм бесконечных рядов; оценка погрешности отбрасывания ряда.

Применение указанной процедуры дает:

$$\varepsilon = 1 + \frac{b}{2}(A_1 + A_1^*), \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{B_1}{\langle \hat{\alpha} \rangle}\right) A_1 + \frac{b}{2}(1 + A_2) &= 0, \\ \left(1 + \frac{B_1^*}{\langle \hat{\alpha} \rangle}\right) A_1^* + \frac{b}{2}(1 + A_2^*) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

.....

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{B_n}{\langle \hat{\alpha} \rangle}\right) A_n + \frac{b}{2}(1 + A_{n+1}) &= 0, \\ \left(1 + \frac{B_n^*}{\langle \hat{\alpha} \rangle}\right) A_n^* + \frac{b}{2}(1 + A_{n+1}^*) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где  $n = 2, 3, 4, \dots$

Точное решение бесконечной системы уравнений (25) – (27) записывается в виде сумм двух комплексно-сопряженных цепных дробей:

$$\varepsilon = 1 + \frac{b}{2}(S + S^*), \quad (28)$$

$$S = C_0 - \frac{1}{C_1 - \frac{1}{C_2 - \dots}}, S^* = C_0^* - \frac{1}{C_1^* - \frac{1}{C_2^* - \dots}}. \quad (29)$$

Здесь  $C_0 = C_0^* = 0$ ,  $C_n = \frac{2}{b} \left(1 + \frac{B_n}{\langle \hat{\alpha} \rangle}\right)$ ,  $C_n^* = \frac{2}{b} \left(1 + \frac{B_n^*}{\langle \hat{\alpha} \rangle}\right)$ ,  $n = 1, 2, 3 \dots$

Расчеты по решению (28), (29) были проведены для следующих вариантов:

- 1) из общей задачи выделяются два предельных по обратному числу Фурье случая: а)  $m = 0$ , б)  $m \rightarrow \infty$ ;
- 2) в каждом из этих случаев отдельно рассматриваются два предельных граничных условия: а)  $\mathcal{A}_0 = \text{const}$ , б)  $q_0 = \text{const}$ ;
- 3) наконец, для каждого из случаев рассматриваются варианты: а)  $\delta \rightarrow \infty$ , б)  $b = 1$ , в)  $b = \text{var}$ , г)  $\delta = \text{var}$ .



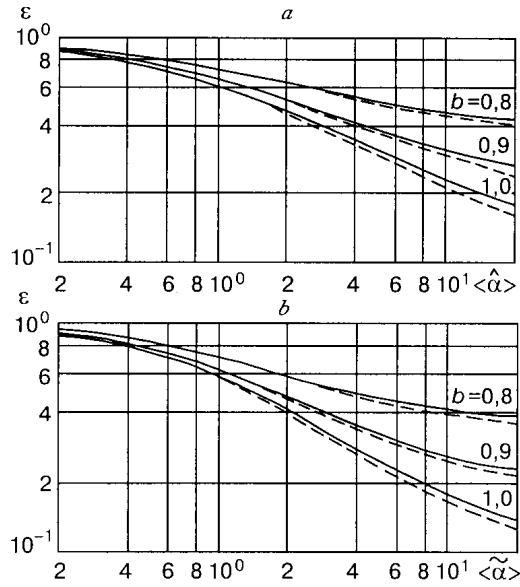


Рис. 1. Зависимость величины  $\varepsilon$  от числа Био при  $\delta \rightarrow \infty$ ,  $m = 0$  (a),  $m \rightarrow \infty$  (b).

Следует подчеркнуть, что в асимптотике  $m \rightarrow \infty$  влияние пространственного периода пульсаций  $z_0$  вырождается, а масштабом длины становится величина  $\sqrt{a\tau_0}$  — “длина тепловой волны”. При этом происходит “переопределение” безразмерных параметров, которые в этой асимптотике определяются в виде: а) число Био  $\langle \tilde{\alpha} \rangle = \alpha \langle \sqrt{a\tau_0} / \lambda \rangle$ , б) безразмерная толщина стенки

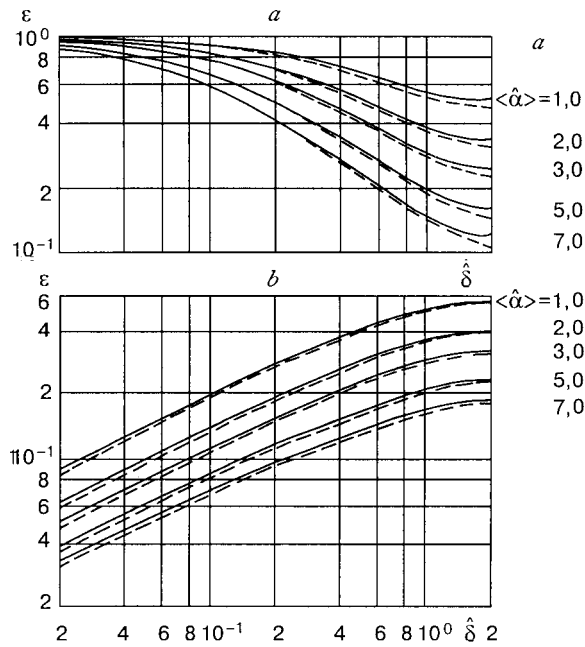


Рис. 2. Зависимость величины  $\varepsilon$  от толщины стенки при  $m = 0$ ,  $g_0 = \text{const}$  (a),  $q_0 = \text{const}$  (b).

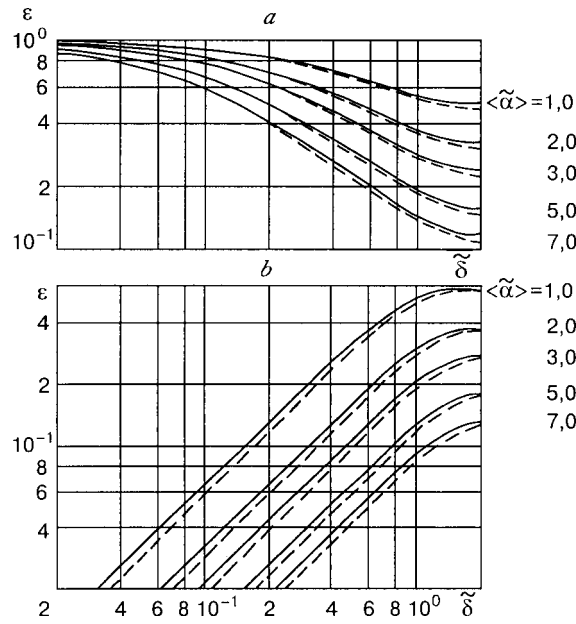


Рис. 3. Зависимость величины  $\varepsilon$  от толщины стенки при  $m \rightarrow \infty$ ,  $q_0 = \text{const}$  (a),  $q_0 = \text{const}$  (b).

$\tilde{\delta} = \delta / \sqrt{a\tau_0}$ . На рис. 1 – 3 приведено сопоставление результатов расчета итоговой величины анализа — функции теплового влияния стенки  $\varepsilon$  (28), (29) (сплошная линия) и приближенных решений (14) (пунктирная линия).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Грант № 98-02-17812).

#### ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\lambda$  — теплопроводность стенки;  
 $a$  — температуропроводность стенки;  
 $\tau$  — время;  
 $x$  — поперечная координата;  
 $z$  — продольная (вдоль поверхности теплообмена) координата;  
 $\tau_0$  — временной период пульсаций;  
 $z_0$  — пространственный период пульсаций;  
 $\tilde{\delta}$  — толщина стенки;  
 $\langle \alpha \rangle$  — истинный осредненный коэффициент теплоотдачи;  
 $\alpha_m$  — “экспериментальный” коэффициент теплоотдачи;  
 $\alpha_0$  — стационарный коэффициент теплоотдачи при  $x = 0$ ;  
 $\vartheta$  — температура;  
 $q$  — плотность теплового потока;  
 $t = d/\tau_0$  — время;  
 $\hat{x} = x/z_0$  — безразмерная поперечная координата;  
 $\hat{z} = z/z_0$  — безразмерная продольная координата;  
 $\xi = \hat{z} \pm t$  — координата прогрессивной волны;

$\hat{\vartheta}_\delta = \vartheta'_\delta / \langle \vartheta_\delta \rangle$  — пульсация температуры на теплообменной поверхности;  
 $\hat{q}_\delta = -(1/\langle \vartheta_\delta \rangle) (\partial \vartheta' / \partial \hat{x})|_{x=\delta}$  — пульсация плотности теплового потока на теплообменной поверхности;  
 $\varepsilon = \alpha_m / \langle \alpha \rangle$  — функция теплового влияния стенки;  
 $\psi$  — пульсационная составляющая истинного коэффициента теплоотдачи;  
 $b$  — амплитуда пульсаций истинного коэффициента теплоотдачи;  
 $\hat{\delta} = \delta/z_0$  — безразмерная толщина стенки;  
 $m = z_0^2/a\tau_0$  — обратное число Фурье;  
 $\langle \hat{\alpha} \rangle = \langle \alpha \rangle z_0/\lambda$ ,  $\hat{\alpha}_0 = \alpha_0 z_0/\lambda$  — числа Био, построенные по истинному осредненному (при  $x = \delta$ ) и стационарному (при  $x = 0$ ) коэффициентам теплоотдачи;  
 $\beta = \langle \alpha \rangle / \alpha_0$  — отношение истинного осредненного коэффициента теплоотдачи (при  $x = \delta$ ) к стационарному (при  $x = 0$ ).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лабунцов Д.А., Зудин Ю.Б. Процессы теплообмена с периодической интенсивностью. — М.: Энергоатомиздат, 1984.
2. Зудин Ю.Б. Метод расчета теплообмена при периодических пульсациях интенсивности // ТВТ. — 1991. — Т. 29, № 6. — С. 1134 – 1141.
3. Зудин Ю.Б. Расчет теплового влияния стенки на осредненную теплоотдачу в процессах теплообмена с периодической интенсивностью // Изв. РАН. Энергетика. — 1995. — № 2. — С. 89 – 95.
4. Зудин Ю.Б. Расчет характеристик теплообмена при периодических пульсациях интенсивности “ячейки структуры” // Там же. — 1995. — № 3. — С. 190 – 199.
5. Зудин Ю.Б. Осредненная теплоотдача при периодических пульсациях интенсивности теплообмена на поверхности пластины, цилиндра и шара // ИФЖ. — 1995. — Т. 68, № 2. — С. 225 – 228.
6. Зудин Ю.Б. Расчет осредненного коэффициента теплоотдачи при периодических пульсациях интенсивности теплообмена для сложного случая теплоподвода // Теплофизика и аэромеханика. — 1994. — Т. 1, № 2. — С. 117 – 119.
7. Зудин Ю.Б. О двух типах пульсаций истинного коэффициента теплоотдачи (прогрессивная волна и ячейка) // Там же. — 1996. — Т. 3, № 4. — С. 78 – 87.
8. Зудин Ю.Б. Осредненная теплопередача при двусторонней периодичности конвективного теплообмена // Там же. — 1995. — Т. 2, № 3. — С. 68 – 75.
9. Зудин Ю.Б. Импульсный закон пульсаций истинного коэффициента теплоотдачи // Изв. РАН. Энергетика. — 1996. — № 5. — С. 76 – 72.
10. Зудин Ю.Б. Поле температур в теплопередающей стенке при периодическом испарении с ее поверхности тонкой пленки жидкости // ИФЖ. — 1998. — Т. 71, № 3. — С. 573 – 476.
11. Цой П.В. Методы расчета задач тепломассопереноса. — М.: Энергоатомиздат, 1984.
12. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. — М.-Л.: Физматгиз, 1962.

*Статья поступила в редакцию 8 апреля 1998 г.*