

УДК 551.251:519.771.3

## ФОРМИРОВАНИЕ РЕЛЬЕФА ДНЕВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В РАЙОНЕ КОЛЛИЗИИ ПЛИТ: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

С. Н. Коробейников<sup>\*,\*\*</sup>, В. В. Ревердатто<sup>\*\*\*</sup>,  
О. П. Полянский<sup>\*\*\*</sup>, В. Г. Свердлова<sup>\*\*\*</sup>, А. В. Бабичев<sup>\*\*\*</sup>

\* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

\*\* Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

\*\*\* Институт геологии и минералогии им. В. С. Соболева СО РАН, 630090 Новосибирск  
E-mails: s.n.korobeynikov@mail.ru, rever@iggm.nsc.ru

Проводится математическое моделирование процесса коллизии плит земной коры, основанное на численном решении уравнений механики деформируемого твердого тела методом конечных элементов с использованием пакета MSC.Marc. Взаимодействие плит между собой и с мантией описывается решением контактной задачи с неизвестной заранее границей контакта рассматриваемых тел. Материал мантии предполагается идеальным упругопластическим с поверхностью текучести Хубера — Мизеса, а для описания свойств материала плит используется модель упругопластичности с параболической функцией текучести Друкера — Прагера, учитывающей разрушение в области растягивающих напряжений. В результате математического моделирования установлено, что профили дневной поверхности плит в области их коллизии качественно и количественно соответствуют рельефам, наблюдаемым в природе в аналогичных условиях.

**Ключевые слова:** геодинамические процессы, надвиг, субдукция, компьютерное моделирование.

**Введение.** Изучение процессов коллизии плит при их тектонических движениях (см., например, [1–7]) позволяет не только описать историю развития процессов, происходящих в земной коре, но и предсказать сценарии дрейфа материков в будущем. Невозможность проведения натуральных экспериментов для исследования этих процессов обуславливает проведение их физического (см., например, [8, 9]) и математического (см., например, [10–20]) моделирования. В настоящей работе выполнено математическое моделирование процессов тектоники плит, основанное на численном решении методом конечных элементов уравнений механики деформируемого твердого тела (МДТТ) [21] с использованием пакета MSC.Marc 2005 [22]. В этом пакете реализованы все типы нелинейности (геометрическая, физическая и контактная) [23–25], используемые в формулировках уравнений, необходимых для математического моделирования процессов тектоники плит (основы применения метода конечных элементов к решению линейных и нелинейных задач МДТТ приведены, например, в [22–31]).

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-08-00707) и в рамках Программы фундаментальных исследований Отделения наук о Земле РАН на 2012 г. (проект № ОНЗ-8).

© Коробейников С. Н., Ревердатто В. В., Полянский О. П., Свердлова В. Г., Бабичев А. В., 2012

При коллизии плит различаются явления надвига и поддвига или субдукции. В реальности эти процессы происходят одновременно, но ранее авторы данной работы разделяли их во избежание больших математических и вычислительных трудностей (см. [10–15]). В настоящей работе процессы надвига и субдукции учитываются одновременно. При этом обе плиты моделируются деформируемыми телами, что позволяет определять форму дневной поверхности плит в области их коллизии.

Большое влияние на результаты математического моделирования коллизии плит оказывает выбор моделей и физических свойств материалов. Оценка используемых моделей и значений констант материалов, позволяющих получить правдоподобную картину субдукции, проведена в работах [14, 15]. В соответствии с [14, 15] в настоящей работе материал мантии предполагается идеальным упругопластическим с поверхностью текучести Хубера — Мизеса и с небольшим значением предела текучести, а для материала плит используется модель упругопластичности с параболической функцией текучести Друкера — Прагера. В этой модели упругопластичности учитывается разрушение материала при действии растягивающих напряжений. По-видимому, такая модель пластичности более точно описывает явление надвига, чем модель упругого материала с хрупким разрушением, использованная в работах [10, 11].

В [11] показано, что при моделировании процессов коллизии плит в уравнениях МДТТ необходимо учитывать геометрическую нелинейность. Поэтому в настоящей работе моделирование процесса коллизии проводится в рамках уравнений МДТТ, справедливых при больших деформациях твердых тел.

Целью настоящей работы является сравнение рельефа дневной поверхности плит в области их коллизии, полученного в результате математического моделирования, с рельефом, наблюдаемым в природе. Установлено, что эти рельефы качественно и количественно согласуются, в то время как при раздельном моделировании надвига и поддвига или субдукции невозможно получить даже их качественное соответствие.

**1. Нелинейные уравнения квазистатического деформирования твердых тел.** Рассмотрим формулировку уравнений МДТТ в текущих лагранжевых координатах [23, 25], более предпочтительную при моделировании деформирования тел из упругопластического материала в случае больших деформаций.

Уравнение равновесия в слабой форме (уравнение баланса виртуальных мощностей) имеет следующий вид:

$$\int_V s : \delta d dV = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{S_T} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{v} dS \quad \forall \delta \mathbf{v} \quad (\delta \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ на } S_v). \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$  — вектор скорости;  $\mathbf{u}$  — вектор перемещения материальной точки;  $d$  — симметричный тензор скорости деформаций;  $\mathbf{f}$  — вектор массовых сил (сила, действующая на единицу массы тела);  $s$  — симметричный тензор напряжений Коши;  $\rho$  — массовая плотность материала в текущий момент времени  $t$ ;  $V$  — объем, занимаемый телом в текущей конфигурации (в момент времени  $t$ );  $S$  — замкнутая поверхность, ограничивающая объем  $V$ ;  $S_v, S_T$  — участки поверхности  $S = S_v \cup S_T$  ( $S_v \cap S_T = \emptyset$ ), на которых заданы векторы скорости  $\mathbf{v}$  и напряжений  $\mathbf{t} \equiv \bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{s} \cdot \bar{\mathbf{n}}$  соответственно:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* \text{ на } S_v, \quad \bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{t}^* \text{ на } S_T,$$

$\bar{\mathbf{n}}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S_T$ ; индекс “\*” обозначает заданную величину; точка между тензорами и (или) векторами обозначает операцию их внутреннего произведения; знак “:” между тензорами обозначает операцию их двойного внутреннего произведения (свертки по двум индексам, т. е. для произвольных тензоров второго ранга  $a$  и  $b$   $a : b = \text{tr}(a \cdot b^T)$ ); символ  $\delta$  обозначает вариацию, причем  $\delta \mathbf{v} = \mathbf{0}$

на  $S_v$  (граничные условия на  $S_v$  являются главными, на  $S_T$  — естественными); индекс  $t$  обозначает операцию транспонирования; точка над величиной обозначает материальную производную этой величины по монотонно возрастающему параметру деформирования (времени)  $t$ .

Кинематические соотношения (связь тензора скорости деформаций с тензором градиента скорости) имеют вид

$$d = (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)/2, \quad (2)$$

где  $\nabla \mathbf{v}^T$  — тензор градиента скорости;  $\nabla$  — пространственный набла-вектор [25].

Определяющие соотношения упругопластического материала записываются в виде

$$s^H = C : d, \quad (3)$$

где  $C$  — имеющий как минорные, так и главную симметрии тензор четвертого ранга, компоненты которого в общем случае зависят от компонент тензоров напряжений и деформаций и от их скоростей [25];  $s^H$  — производная Хилла тензора напряжений Коши, которая определяется через материальную производную этого тензора по формуле [25]

$$s^H \equiv \dot{s} - w \cdot s + s \cdot w + s \operatorname{tr} d,$$

$w \equiv (\nabla \mathbf{v}^T - \nabla \mathbf{v})/2$  — кососимметричный тензор вихря.

Для того чтобы применить шаговую процедуру интегрирования уравнений по времени, требуется из уравнений (1)–(3) получить уравнения квазистатического деформирования твердых тел, записанные в приращениях. Шаг по времени  $\Delta t$  считаем достаточно малым. Предполагаем, что в момент времени  $t$  все искомые величины определены, т. е. уравнение (1) выполнено тождественно. Зависимость исследуемых функций от времени будем обозначать левым верхним индексом; например, величины  ${}^t s$  и  ${}^{t+\Delta t} s$  обозначают тензор напряжений Коши, определенный в моменты времени  $t$  и  $t + \Delta t$  соответственно. Знак  $\Delta$  перед величиной означает ее приращение с момента времени  $t$  до момента времени  $t + \Delta t$ , например  $\Delta s \equiv {}^{t+\Delta t} s - {}^t s$ .

Рассматриваем конфигурацию тела в момент времени  $t$  в качестве отсчетной. Записывая уравнения (1) для момента времени  $t + \Delta t$ , после ряда преобразований (подробнее об этом см. [25]) получаем скалярное линеаризованное уравнение

$$\begin{aligned} \int_V \delta e : {}^t C : e \, dV + \frac{1}{2} \int_V {}^t s : \delta(\nabla \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}^T - 2e \cdot e) \, dV = \\ = \int_V \rho {}^{t+\Delta t} \mathbf{f} \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}} \, dV + \int_{S_T} {}^{t+\Delta t} \mathbf{t}^* \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}} \, dS - \int_V {}^t s : \delta e \, dV \quad \forall \delta \tilde{\mathbf{u}} \quad (\delta \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \text{ на } S_v). \end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{\mathbf{u}} \equiv \Delta \mathbf{u}$ ;  $e \equiv (\nabla \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{\mathbf{u}}^T)/2$ .

**2. Определяющие соотношения теории больших упругопластических деформаций.** Основная гипотеза, позволяющая в определяющих соотношениях одновременно учесть упругую и пластическую составляющие деформаций, заключается в аддитивном представлении тензора скорости деформаций

$$d = d^e + d^p,$$

где  $d^e$ ,  $d^p$  — упругая и пластическая составляющие тензора скорости деформаций, которые определяются из законов упругого и пластического деформирования. Для первоначально изотропных материалов эти составляющие определяются из закона Гука (для упругой

составляющей тензора скорости деформаций) и ассоциированного закона пластического течения [25]:

$$s^H = C^E : d^e = C^E : (d - d^p), \quad d^p = \bar{c}\lambda \frac{\partial F}{\partial s}. \quad (4)$$

Здесь  $s^H$  — объективная производная Хилла тензора напряжений Коши  $s$  [32];  $C^E$  — тензор (четвертого ранга) в законе Гука для изотропной упругой среды [25], компоненты которого  $C_{ijkl}^E$  в декартовой системе координат приведены ниже. В (4) введена скалярная функция текучести  $F(s)$ , такая что уравнение  $F(s) = 0$  определяет поверхность текучести в пространстве компонент тензора напряжений Коши  $s$ . Параметр  $\bar{c}$  определяет мгновенное состояние деформирования материала (упругое или пластическое):

$$\bar{c} = \begin{cases} 0, & F < 0 \text{ или } F = 0 \text{ и } n : s^H \leq 0, \\ 1, & F = 0 \text{ и } n : s^H > 0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $n$  — тензор второго ранга, который имеет геометрический смысл вектора внешней нормали единичной длины к поверхности текучести в девятимерном пространстве компонент тензора напряжений  $s$ :

$$n \equiv \frac{1}{k} \frac{\partial F}{\partial s}, \quad k \equiv \left( \frac{\partial F}{\partial s} : \frac{\partial F}{\partial s} \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Для идеального (без упрочнения) упругопластического материала, который рассматривается в настоящей работе, скалярный параметр  $\lambda > 0$ , введенный в (4), определяется по формуле [32]

$$\lambda = \frac{1}{k} \frac{n : C^E : d}{n : C^E : n}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (4), получаем определяющие соотношения упругопластичности [25]

$$s^H = C^{EP} : d, \quad (8)$$

где  $C^{EP}$  — тензор четвертого ранга:

$$C^{EP} = C^E - \bar{c}(C^E : n) \otimes (n : C^E) \frac{1}{n : C^E : n}. \quad (9)$$

Значение скалярного параметра  $\bar{c} = 0$  определяет упругое деформирование материала (включая разгрузку из достигнутого пластического состояния), а значение  $\bar{c} = 1$  соответствует пластическому течению материала. Выражение (5) для определения значения параметра  $\bar{c}$  можно записать в виде [32]

$$\bar{c} = \begin{cases} 0, & F < 0 \text{ или } F = 0 \text{ и } n : C^E : d \leq 0, \\ 1, & F = 0 \text{ и } n : C^E : d > 0. \end{cases} \quad (10)$$

Определяющие соотношения (8) являются нелинейными относительно тензора скорости деформаций  $d$ , так как тензор четвертого ранга  $C^{EP}$  зависит от  $d$  (эта зависимость вводится через зависимость значения параметра  $\bar{c}$  от  $d$  в (10)). В случае квазистатического деформирования представление определяющих соотношений пластичности в виде (8) позволяет записать вариационную формулировку задачи и получить симметричную матрицу касательной жесткости для метода конечных элементов [25, 29, 33].

Тензор четвертого ранга  $C^E$  определяем для линейного упругого изотропного материала. Компоненты этого тензора в декартовой системе координат записываются в виде (здесь и далее нижние индексы принимают значения 1, 2, 3)

$$C_{ijkl}^E = \frac{E}{1 + \nu} \left( \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij}\delta_{kl} \right),$$

где  $\delta_{ij}$  — дельта-функция Кронекера;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Для получения конкретного вида тензора четвертого ранга  $C^{EP}$  в (9) требуется задать выражение для функции текучести  $F(s)$ , с помощью которой определяется тензор второго ранга  $n$  в (6).

Проведенный в [15] сравнительный анализ различных моделей пластичности, используемых при математическом моделировании процессов коллизии плит, позволяет сделать следующий вывод. Для описания деформирования мантии (в состоянии, близком к жидкому) достаточно использовать модель идеального упругопластического материала с функцией текучести Хубера — Мизеса, при этом следует использовать достаточно небольшое значение предела текучести мантии по сравнению с пределом текучести коры. Отметим, что в данной модели упругопластического материала предел текучести не зависит от давления (среднего напряжения). По-видимому, более реалистично поведение материала плиты описывается моделями упругопластического деформирования пород с функцией текучести, зависящей от давления [22–24, 34–40]. Основой всех моделей, учитывающих давление в породе, являются результаты экспериментов по определению коэффициента сцепления  $c$  и угла внутреннего трения  $\Phi$ . Эти константы материала коррелируют с предельными значениями максимального нормального давления  $\sigma_n$  и касательного напряжения  $\tau$ . Для некоторого фиксированного напряженно-деформированного состояния предельные значения этих величин лежат на границе круга Мора [34, 35], а при изменении напряженно-деформированного состояния — на огибающих кругов Мора. Обычно в плоскости  $\sigma_n \sim \tau$  огибающие кругов Мора (отделяющие области упругого деформирования от областей, в которых напряженно-деформированное состояние соответствует пластическому деформированию или разрушению) аппроксимируются прямыми линиями или параболой. Этим аппроксимациям соответствуют модели пластичности с конической и параболической функциями текучести Друкера — Прагера.

Рассмотрим функции текучести  $F(s)$ , которые в настоящей работе используются при математическом моделировании процессов надвига и субдукции. Предполагаем, что первоначально пластический материал был изотропным, поэтому зависимость функции текучести от тензора напряжений  $s$  сводится к ее зависимости от трех главных инвариантов  $I_1(s)$ ,  $I_2(s)$ ,  $I_3(s)$  этого тензора:

$$I_1(s) \equiv \text{tr } s, \quad I_2(s) \equiv [(\text{tr } s)^2 - \text{tr } s^2]/2, \quad I_3(s) \equiv \det s.$$

Используем предположение о том, что функция  $F(s)$  не зависит от инварианта  $I_3(s)$ , т. е. функция  $F$  может зависеть только от инвариантов  $I_1(s)$  и  $I_2(s)$ . Таким образом, из рассмотрения исключаются классические поверхности текучести Треска и Кулона — Мора.

В формулировках определяющих соотношений пластичности удобно выделить гидростатическую составляющую тензора напряжений

$$s_m = I_1(s)/3 \quad \Leftrightarrow \quad s_m = s_{ii}/3.$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3. Следуя [22], введем новое обозначение для первого главного инварианта тензора напряжений

$$J_1(s) \equiv I_1(s) = 3s_m = s_{ii}.$$

Введем также тензор-девиатор напряжений

$$s' \equiv s - s_m g \quad \Leftrightarrow \quad s'_{ij} \equiv s_{ij} - s_m \delta_{ij}$$

( $g$  — единичный тензор) и инвариант тензора напряжений [22]

$$J_2(s) \equiv -I_2(s') = (1/2)\text{tr } s'^2 = (1/2)s' : s' \quad \Leftrightarrow \quad J_2(s) = (1/2)s'_{ij}s'_{ij}.$$

Рассмотрим функции текучести  $F(s)$  трех видов, соответствующие некоторым моделям материалов, доступным пользователям пакета MSC.Marc 2005 [22].

1. Функция текучести Хубера — Мизеса

$$F_1(s) \equiv \sqrt{J_2} - \sigma_y/\sqrt{3},$$

где  $\sigma_y$  — предел текучести материала при одноосном растяжении образца. В главных осях тензора напряжений  $s_1, s_2, s_3$  поверхность текучести  $F_1(s) = 0$  имеет вид цилиндра.

2. Коническая функция текучести Друкера — Прагера. Данная функция является обобщением функции текучести Хубера — Мизеса при учете влияния среднего напряжения ( $s_m = J_1/3$ ) на текучесть материала. Эта функция записывается в виде [22, 38]

$$F_2(s) \equiv \alpha J_1 + \sqrt{J_2} - \sigma_y/\sqrt{3}. \quad (11)$$

Здесь  $\alpha, \sigma_y$  — некоторые константы материала. Эти константы можно определить через константы  $c$  и  $\Phi$  по формулам (120) разд. 7 в [22]. Однако при решении геофизических задач целесообразно использовать формулы для определения констант  $\alpha$  и  $\sigma_y$  через константы  $c$  и  $\Phi$ , полученные в [41]:

$$\sigma_y = \sqrt{3}c \cos \Phi, \quad \alpha = (1/3)(1 - \bar{\lambda}) \sin \Phi, \quad \bar{\lambda} \equiv \rho^w/\rho^s. \quad (12)$$

Первое выражение в (12) совпадает с условием текучести материала при чистом сдвиге, получаемым из критерия пластического течения материала с функцией текучести Мора — Кулона (см. [35. С. 141])

$$F_{MC}(s) \equiv s_1 - s_3 + (s_1 + s_3) \sin \Phi - 2c \cos \Phi.$$

В случае чистого сдвига  $s_1 = \tau, s_3 = -\tau$ , поэтому при  $F_{MC}(s) = 0$  получаем

$$\tau_y = c \cos \Phi. \quad (13)$$

С учетом соотношения  $\tau_y = \sigma_y/\sqrt{3}$  уравнение (13) эквивалентно первому выражению в (12). При определении параметра  $\bar{\lambda}$  в (12) используются плотность поровой жидкости  $\rho^w$  и массовая плотность  $\rho^s$  плит коры. В главных осях тензора напряжений  $s_1, s_2, s_3$  поверхность текучести  $F_2(s)$  имеет вид конуса.

3. Параболическая функция текучести Друкера — Прагера. Данная функция имеет вид [22. Разд. 7. С. 74]

$$F_3(s) \equiv (3J_2 + \sqrt{3}\beta\sigma_y J_1)^{1/2} - \sigma_y, \quad (14)$$

где  $\beta, \sigma_y$  — константы материала. Здесь огибающая кругов Мора имеет вид параболы. Отметим, что функция текучести (14) более точно, чем функция (11), описывает предельные состояния материалов пород, наблюдаемые в экспериментах, т. е. огибающая параболической формы практически для всех известных материалов пород лучше соответствует экспериментальным данным, чем огибающая в виде прямых линий, составляющих стороны угла величиной  $2\Phi$ . Как и выше, константу материала  $\sigma_y$  определяем из первой формулы в (12), а константу материала  $\beta$  — из формул, представленных в [22. Разд. 7. С. 74]:

$$\sigma_y^2 = 3\left(c^2 - \frac{\tilde{\alpha}^2}{3}\right), \quad \beta = \frac{\tilde{\alpha}}{\sqrt{3(3c^2 - \tilde{\alpha}^2)}}. \quad (15)$$

Полагая значения констант  $\sigma_y, c$  известными, из первого выражения в (15) определяем величину  $\tilde{\alpha}$ , а затем, подставляя ее во второе выражение в (15), определяем параметр  $\beta$ . В главных осях тензора напряжений  $s_1, s_2, s_3$  поверхность текучести  $F_3(s) = 0$  имеет вид параболоида.

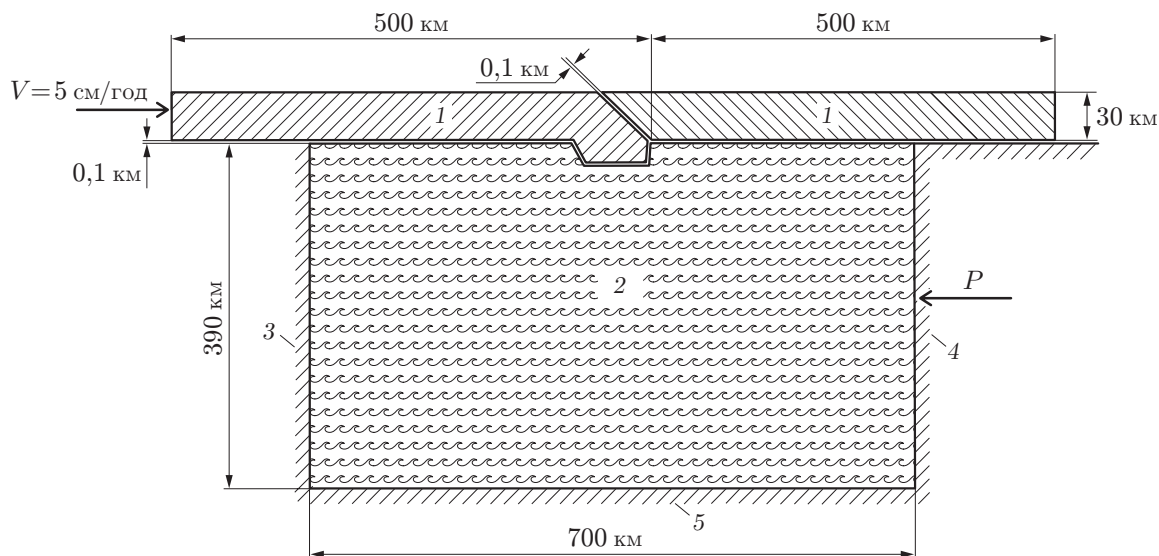


Рис. 1. Геометрические параметры области, включающей плиты и мантию, до момента времени  $t = 0$  приложения весовой нагрузки:

1 — кора; 2 — мантия; 3 — неподвижная жесткая стенка; 4 — подвижная жесткая стенка; 5 — жесткое дно

**3. Постановка задачи о моделировании процесса коллизии плит.** Задача о контакте плит решается в два этапа. На первом этапе (вспомогательном) определяется распределение напряжений в плитах после приложения веса (т. е. условия статического равновесия плит до начала горизонтального движения левой плиты). При этом предполагается, что в начальный момент времени плиты не контактируют ни между собой, ни с мантией и между ними имеется зазор шириной 100 м. Геометрические параметры области в момент времени  $t = 0$  приведены на рис. 1. Отметим, что на нижней поверхности левой плиты в области коллизии плит имеется утолщение в виде “киля”. Наличие подобной неоднородности в плите является важным условием реализации субдукции плит [13–15]. Задача решается в двумерной постановке (в предположении плоской деформации). В результате приложения весовой нагрузки от нуля до окончательной величины (соответствующей массовым плотностям коры  $\rho^s$  и мантии  $\rho^m$ ) плиты и мантия совершают вертикальные движения (оседают), входят в контакт, в результате чего в них возникают напряжения, которые определяются законами упругопластического деформирования. Для моделирования открытой правой границы области, занимаемой мантией, используем приближение жесткой подвижной стенки, способной перемещаться в горизонтальном направлении и находящейся под действием силы  $P$  (см. рис. 1), определяемой как интегральная величина статического давления в жидкости. Предполагаем, что полная весовая нагрузка прикладывается к материалам плит и мантии в течение 10 лет. В соответствии с этим полагаем, что сила  $P$  возрастает по линейному закону от нуля до значения  $P = 2,584 \cdot 10^{15}$  Н в течение 10 лет и далее это значение не изменяется во времени. Отметим, что в работах [13–15] открытая область нагружалась на правой границе области мантии гидростатическим давлением, распределенным по закону Паскаля. При таком моделировании открытой области первоначально прямой участок границы значительно искажается, что при больших интервалах времени затрудняет проведение расчетов.

При решении основной задачи субдукции задается горизонтальное движение торца левой плиты со скоростью 5 см/год. В деформируемых плитах конечно-элементные сетки состоят преимущественно из четырехугольных элементов, которые непрерывно деформи-

руются вместе с плитами (т. е. перестройка сетки не проводится). Выбор четырехугольных элементов плит обусловлен тем, что при субдукции плиты испытывают изгибные деформации, а в условиях изгиба при использовании треугольных элементов тело становится более “жестким”, чем при использовании четырехугольных элементов [30].

Мантия испытывает большие деформации в области субдукции плит, что приводит к необходимости перестройки конечно-элементной сетки в области, занимаемой мантией. Поскольку мантия не испытывает существенных деформаций изгиба, область, занимаемая ею, моделируется треугольными элементами, так как перестройка сетки с такими элементами в пакете MSC.Marc выполняется более эффективно, чем перестройка сетки с четырехугольными элементами. Сетка в области, занимаемой мантией, подвергается перестройке по алгоритму Делоне. Перестройка сетки с заданной длиной ребра элемента проводится при выполнении хотя бы одного из следующих условий:

- начальный момент времени интегрирования  $t = 0$ ;
- угол между ребрами некоторого элемента изменяется более чем на  $20^\circ$ ;
- элементы искажаются достаточно сильно.

Так как при больших упругопластических деформациях среда становится почти несжимаемой (таким материалом является материал мантии), то результаты расчетов с использованием метода конечных элементов в стандартной формулировке, основанной на аппроксимации только компонент вектора перемещений, становятся недостоверными [13]. Эту проблему можно решить с помощью пакета MSC.Marc, в котором имеется возможность использовать конечные элементы в формулировке Германна. Аппроксимация этих элементов основана на независимом представлении компонент вектора перемещений и гидростатического давления [31]. Такая формулировка уравнений и соответствующие конечные элементы разработаны для решения задач деформирования несжимаемых или почти несжимаемых сред. Вычисления, результаты которых представлены в настоящей работе, проведены с использованием конечных элементов в формулировке Германна.

При интегрировании уравнений квазистатического движения системы плиты — мантия по времени  $t$  используется пошаговая процедура, включающая автоматический выбор величины шага  $\Delta t$  и уточнение решения на каждом шаге по времени с помощью итерационной процедуры метода Ньютона — Рафсона [22–25]. Несмотря на то что при решении задачи коллизии плит используется адаптивный шаг по времени, в некоторых случаях целесообразно его ограничивать, во-первых, для обеспечения сходимости итерационного процесса и, во-вторых, для увеличения точности решения (при решении задач упругопластичности точность решения зависит от величины шага по времени). На основе проведенных в [13] численных экспериментов выбран следующий шаг по времени:  $\Delta t_{\max} = 3000$  лет. Этот шаг является максимальным в расчетах, результаты которых представлены в данной работе.

Подробный анализ моделей материалов и выбор констант этих моделей проведены в [15]. С учетом результатов этого анализа выберем для мантии модель упругопластического материала с поверхностью текучести Мизеса со следующими константами:  $E^m = 10^{10}$  Па,  $\nu^m = 0,499$ ,  $\sigma_y^m = 4 \cdot 10^4$  Па,  $\rho^m = 3300$  кг/м<sup>3</sup> ( $E^m$ ,  $\nu^m$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона;  $\sigma_y^m$  — предел текучести;  $\rho^m$  — массовая плотность).

Для деформируемых плит выберем модель материала с параболической поверхностью текучести Друкера — Прагера со следующими константами:  $E^s = 10^{11}$  Па,  $\nu^s = 0,25$ ,  $\sigma_y^s = 2,837 \cdot 10^7$  Па,  $\beta = 0,3331$ ,  $\rho_0^s = 3000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_t^s = 3510$  кг/м<sup>3</sup> ( $\rho_0^s$ ,  $\rho_t^s$  — плотности материала плит до и после их погружения в мантию соответственно). Увеличение плотности на 17 % соответствует фазовому переходу габбро — эклогит и обеспечивает глубокое погружение плит в мантию. Значение  $\beta$  определялось из (15) для выбранного значения  $\sigma_y$  и значения коэффициента сцепления  $c = 1,4185 \cdot 10^7$  Па. Отметим, что для преодоления



вычислительных трудностей в настоящей работе используется значение  $\sigma_y$ , в два раза превышающее значение этого параметра в работе [15]. Такое различие находится в пределах разброса известных значений  $\sigma_y$ .

**4. Результаты компьютерного моделирования.** Для оценки влияния трения плит в области их контакта выполнено моделирование субдукции плит с использованием предположений об их идеальном скольжении относительно друг друга и о том, что при контакте плит возникает трение, удовлетворяющее закону Кулона [22, 25]. Расчеты проведены при двух значениях коэффициента трения:  $k_f = 0,1; 0,5$ . Согласно закону трения Кулона в процессе деформирования в области контакта плит возникают чрезмерно большие касательные напряжения. Чтобы избежать превышения максимально допустимых напряжений в упругопластической среде, в пакете MSC.Marc предусмотрено ограничение их значений. В настоящей работе допускалось максимальное значение касательных напряжений на поверхности контакта  $\tau_{\max} = 2 \cdot 10^7$  Па.

Результаты расчетов представлены на рис. 2–5. Так как в расчетах, проведенных при различных значениях коэффициента трения  $k_f$ , формы деформированных плит близки, на рис. 2, 3 показаны формы, полученные в расчете без учета трения ( $k_f = 0$ ). На рис. 2 представлен общий вид деформированной области, полученной в результате расчетов в случае, когда к плитам и мантии приложена весовая нагрузка ( $t = 10$  лет). На рис. 2 приведен также фрагмент модели в области коллизии плит с конечно-элементной сеткой. На рис. 3 представлен сценарий развития субдукции плит, полученный в расчетах без учета трения между ними. На рис. 4 приведена зависимость глубины впадины  $h_a$  (см. рис. 2, б, в), а на рис. 5 — величин подъема  $h_b$  и  $h_c$ , характеризующих надвиг правой плиты на левую плиту, от времени. Отметим, что в процессе движения плит точка максимального подъема перемещается слева направо, а впадина практически не перемещается в пространстве. Из рис. 4, 5 следует, что приблизительно через 1 млн лет после начала движения происходит почти полное завершение формирования рельефа дневной поверхности

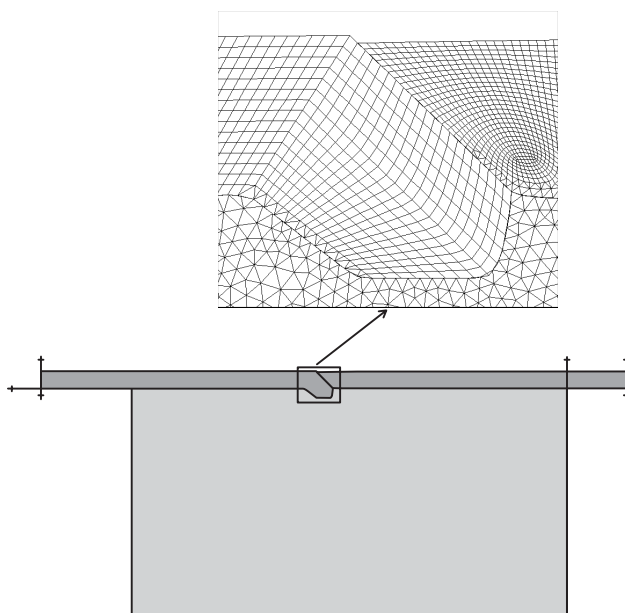


Рис. 2. Формы деформированных плит и мантии, полученные в результате приложения к ним весовой нагрузки ( $t = 10$  лет):

*вверху* — фрагмент модели с конечно-элементной сеткой; жирные прямые линии — модели жестких тел, контактирующих с деформируемыми телами

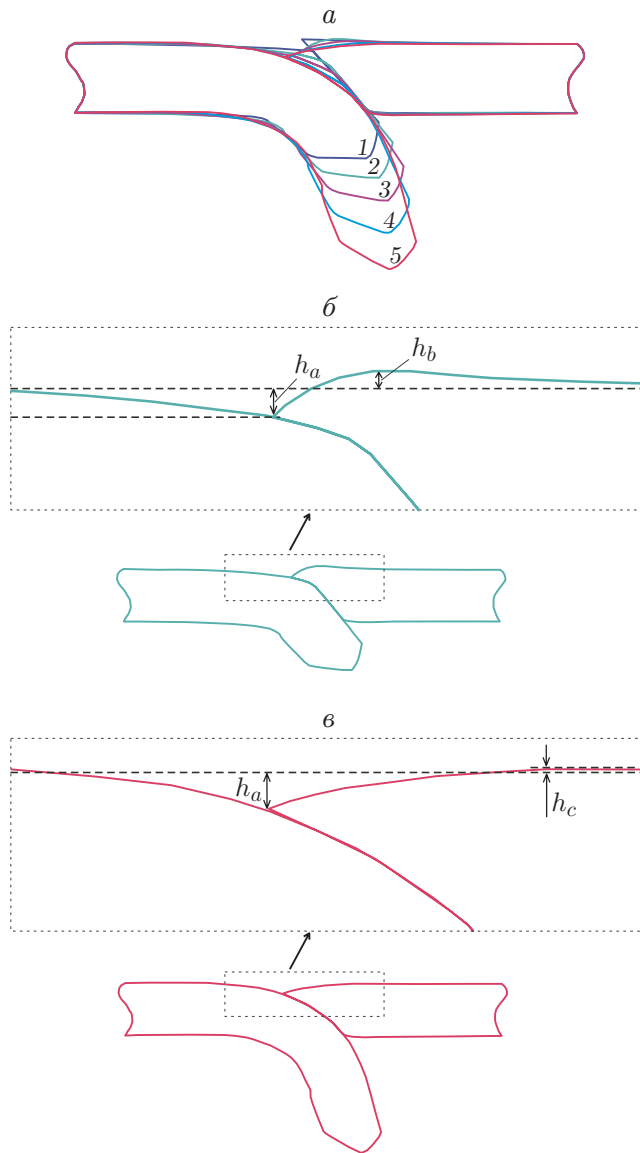


Рис. 3

Рис. 3. Сценарий развития субдукции плит:

*a* — формы деформированных плит в процессе их коллизии (1 —  $t = 0,207$  млн лет, 2 —  $t = 0,402$  млн лет, 3 —  $t = 0,597$  млн лет, 4 —  $t = 0,807$  млн лет, 5 —  $t = 1,081$  млн лет); *б, в* — формы деформированных плит и увеличенные фрагменты моделей (*б* —  $t = 0,402$  млн лет, *в* —  $t = 1,081$  млн лет)

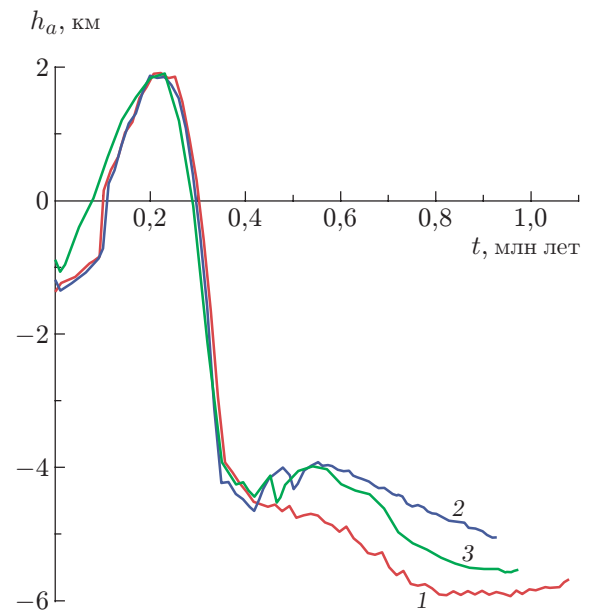


Рис. 4

Рис. 4. Расчетная зависимость глубины впадины  $h_a$  от времени:

1 — без учета трения ( $k_f = 0$ ); 2, 3 — с учетом трения (2 —  $k_f = 0,1$ , 3 —  $k_f = 0,5$ )

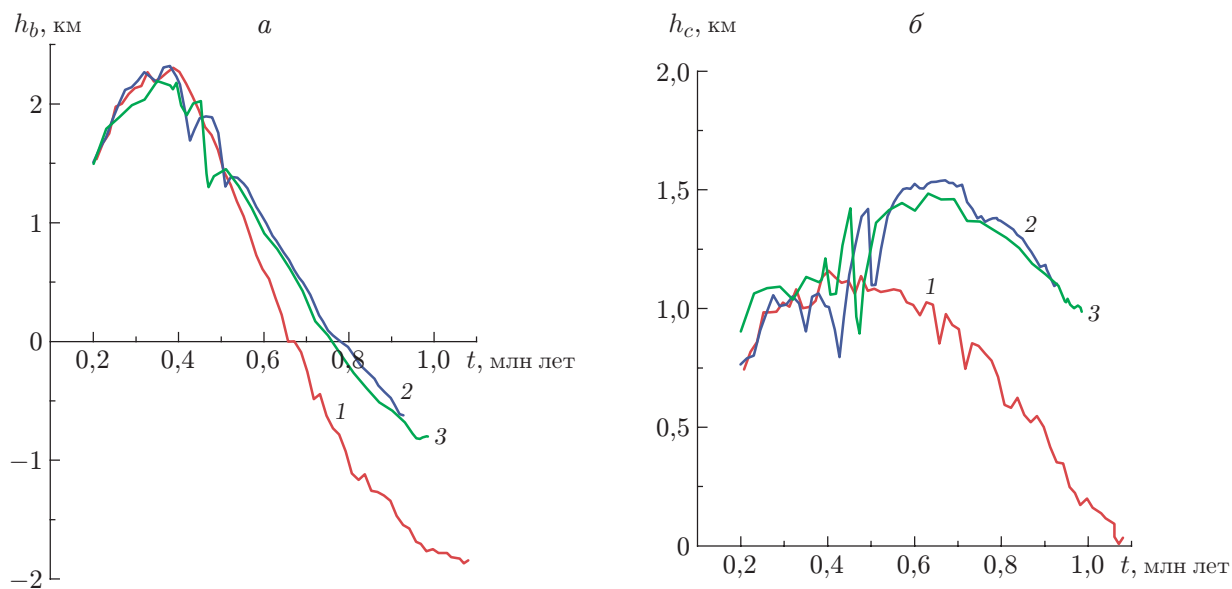


Рис. 5. Расчетные зависимости величин подъемов  $h_b$  (а) и  $h_c$  (б) от времени: 1 — без учета трения ( $k_f = 0$ ); 2, 3 — с учетом трения (2 —  $k_f = 0,1$ , 3 —  $k_f = 0,5$ )

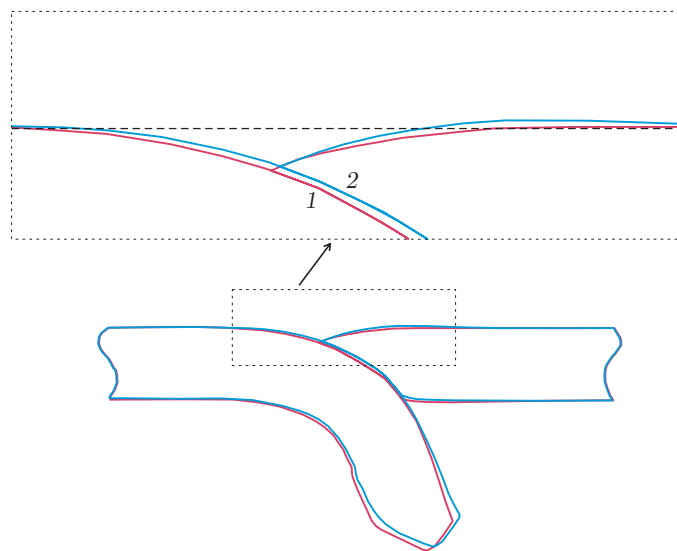


Рис. 6. Формы деформированных плит:  
1 — расчет без учета трения плит ( $k_f = 0$ ), 2 — расчет с учетом трения ( $k_f = 0,5$ ) при  $t \approx 1$  млн лет; *вверху* — увеличенный фрагмент модели

в области коллизии плит. Отметим, что учет трения приводит к уменьшению глубины впадины и увеличению величины подъема. На рис. 5 видно, что при учете трения между контактирующими плитами во временном интервале приблизительно от 0,4 до 0,6 млн лет поверхность надвигающейся плиты совершает вертикальные колебания с амплитудой порядка 0,5 км и периодом  $50 \div 100$  тыс. лет. В то же время в отсутствие трения между плитами амплитуда таких движений невелика. Из рис. 5 следует, что указанные колебания не обусловлены особенностями численного интегрирования уравнений квазистатического движения, а имеют механический характер. Этот вывод обусловлен тем, что вертикальные колебания появляются только при учете трения плит и при различных значениях коэффициента трения качественно подобны. При контакте с учетом трения источником таких колебаний, по-видимому, являются скачкообразные переходы от режима прилипания к режиму проскальзывания и наоборот, которые имеют повторяющийся характер [25] (в настоящее время принято считать, что на временных масштабах, составляющих сотни и тысячи лет, аналогичные особенности контакта плит обуславливают возникновение землетрясений). Выяснение причин появления вертикальных колебаний плит в области их контакта требует проведения дальнейших исследований.

На рис. 6 представлены формы деформированных плит, полученные в расчетах как без учета их трения ( $k_f = 0$ ), так и с учетом трения ( $k_f = 0,5$ ). Следует отметить, что графики развития впадин и подъемов, а также формы деформированных плит в полностью установившемся режиме (более 1 млн лет) получить не удалось вследствие затруднений, возникших при проведении расчетов. Из результатов сравнения полученных в расчетах профилей дневной поверхности (см. рис. 5, 6) следует, что приблизительно через 1 млн лет после начала движения первоначально сравнительно большая величина подъема ( $h_b \approx 2,3$  км) становится незначительной, причем в расчетах без учета трения эта величина практически равна нулю, а в расчетах с учетом трения на завершающей стадии  $h_c \approx 1$  км. Это значение согласуется с высотой хребта островной дуги ( $1 \div 2$  км) в Курило-Камчатской зоне субдукции [7]. Влияние трения на глубину впадины менее существенно (см. рис. 4). Для глубины впадины получены значения  $h_a = 5,5 \div 6,0$  км, достаточно близкие к глубине глубоководного желоба (приблизительно 7 км) в Курило-Камчатской зоне субдукции [7].

**Заключение.** С помощью математического моделирования субдукции плит исследовано формирование рельефа дневной поверхности в области их коллизии. Предполагалось, что в начальном состоянии земная кора имела разлом и в результате встречного сближения двух ее блоков произошла коллизия. Задача решалась с использованием нелинейных уравнений МДТТ, учитывающих нелинейности всех типов: геометрическую, физическую и контактную. Результаты проведенных расчетов показывают, что в выбранных масштабах коллизии блоков учет трения практически не существен при определении скорости движения субдукционной плиты, но оказывает значительное влияние на величину подъема поверхности континентальной (правой) плиты. Разность величин подъема поверхности при учете трения достигает 1 км. В моделях с учетом трения имели место колебательные вертикальные движения поверхности как во впадине, так и на континентальной возвышенности с амплитудой, приближенно равной 0,5 км. Период этих колебаний составляет  $50 \div 100$  тыс. лет.

Показано, что для рассматриваемых плит, движущихся с относительной скоростью 5 см/год, формирование рельефа, типичного для субдукционной зоны, завершается через 1 млн лет. Сравнение полученных в результате численного решения уравнений МДТТ значений параметров, характеризующих рельеф дневной поверхности в области коллизии плит (впадины и подъема), с реальными значениями этих параметров показывает, что они хорошо согласуются.

В данной работе рассматривались только те эффекты деформации земной поверхности, которые вызваны столкновением плит и сопровождаются субдукцией. Другие причины такой деформации, в частности всплывание легких блоков, магматические процессы и т. д., не рассматривались.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Артюшков Е. В.** Физическая тектоника. М.: Наука, 1992.
2. **Лобковский В. И.** Современные проблемы геотектоники и геодинамики / В. И. Лобковский, А. М. Никишин, В. Е. Хаин. М.: Науч. мир, 2004.
3. **Добрецов Н. Л.** Глубинная геодинамика. 2-е изд. / Н. Л. Добрецов, А. Г. Кирдяшкин, А. А. Кирдяшкин. Новосибирск: Изд-во СО РАН: Изд-во "Гео", 2001.
4. **Kennett B. L. N.** Geophysical continua / B. L. N. Kennett, H.-P. Bunge. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008.
5. **King S. D.** Subduction zones: observations and geodynamic models // Phys. Earth Planet. Intern. 2001. V. 127. P. 9–24.
6. **Dogliani C., Carminato E., Cuffaro M., Scrocca D.** Subduction kinematics and dynamic constraints // Earth-Sci. Rev. 2007. V. 83. P. 125–175.
7. **Селиверстов Н. И.** Геодинамика зон сочленения Курило-Камчатской и Алеутской островных дуг. Петропавловск-Камчатский: Изд-во Кам. гос. ун-та, 2009.
8. **Shemenda A. I.** Subduction: insights from physical modeling. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1994.
9. **Willingshofer E., Sokoutis D.** Decoupling along plate boundaries: Key variable controlling the mode of deformation and the geometry of collisional mountain belts // Geology. 2009. V. 37, N 1. P. 39–42.
10. **Коробейников С. Н., Полянский О. П., Лиханов И. И. и др.** Математическое моделирование надвига как причины формирования андалузит-кианитовой метаморфической зональности в Енисейском кряже // Докл. АН. 2006. Т. 408, № 4. С. 512–516.
11. **Коробейников С. Н., Ревердатто В. В., Полянский О. П. и др.** Оценка эффекта геометрической нелинейности при математическом моделировании тектонических процессов // Вычисл. методы и программирование. 2006. Т. 7, № 2. С. 130–145.
12. **Коробейников С. Н., Полянский О. П., Свердлова В. Г. и др.** Компьютерное моделирование поддвига и субдукции в условиях перехода габбро — эклогит в мантии // Докл. АН. 2008. Т. 420, № 5. С. 654–658.
13. **Коробейников С. Н., Ревердатто В. В., Полянский О. П. и др.** Компьютерное моделирование поддвига и субдукции при столкновении плит // Сиб. журн. вычисл. математики. 2009. Т. 12, № 1. С. 71–90.
14. **Полянский О. П., Коробейников С. Н., Свердлова В. Г. и др.** Влияние реологии коры на характер субдукции плит по результатам математического моделирования // Докл. АН. 2010. Т. 430, № 4. С. 518–522.
15. **Коробейников С. Н., Ревердатто В. В., Полянский О. П. и др.** О влиянии выбора реологического закона на результаты компьютерного моделирования субдукции плит // Сиб. журн. вычисл. математики. 2011. Т. 14, № 1. С. 71–90.
16. **Wang Zh., Xu B., Zhou Y., et al.** Two-dimensional numerical modelling research on continent subduction dynamics // Acta Geologica Sinica. 2004. V. 78, N 1. P. 313–319.
17. **Capitano F. A., Morra G., Goes S.** Dynamic models of downgoing plate-buoyancy driven subduction: Subduction motions and energy dissipation // Earth Planet. Sci. Lett. 2007. V. 262. P. 284–297.

18. **Capitano F. A., Goes S., Morra G., Giardini D.** Signatures of downgoing plate-buoyancy driven subduction in motions and seismic coupling at major subduction zones // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2007. V. 262. P. 298–306.
19. **Zlotnik S., Diez P., Fernandez M., Verges J.** Numerical modelling of tectonic plates subduction using X-FEM // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 2007. V. 196. P. 4283–4293.
20. **Keppie D. F., Currie C. A., Warren C.** Subduction erosion modes: Comparing finite element numerical models with the geological record // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2009. V. 287. P. 241–254.
21. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
22. **MARC users guide.** V. A. Theory and users information. Santa Ana: MSC Software Corp., 2005.
23. **Bathe K.-J.** Finite element procedures. Upper Saddle River (N. J.): Prentice Hall, 1996.
24. **Zeinkiewicz O. C.** The finite element method / O. C. Zeinkiewicz, R. L. Taylor. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.
25. **Коробейников С. Н.** Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
26. **Голованов А. И.** Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел / А. И. Голованов, Д. В. Бережной. Казань: ДАС, 2001.
27. **Curnier A.** Computational methods in solid mechanics. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994.
28. **Bonnet J.** Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis / J. Bonnet, R. D. Wood. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
29. **Kleiber M.** Incremental finite element modelling in non-linear solid mechanics. Chichester: Ellis Horwood, 1989.
30. **Стренг Г.** Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. М.: Мир, 1977.
31. **Hughes T. J. R.** The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1987.
32. **Хилл Р.** Общая теория единственности и устойчивости для упругопластических тел // *Механика.* 1958. № 6. С. 81–95.
33. **McMeeking R. M., Rice J. R.** Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation // *Intern. J. Solids Structures.* 1975. V. 11. P. 601–616.
34. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. Т. 1.
35. **Boresi A. P.** Advanced mechanics of materials. 5th ed. / A. P. Boresi, R. J. Schmidt, O. M. Sidebottom. N. Y.: John Wiley and Sons, 1993.
36. **Duxbury P., Li X.** Development of elasto-plastic material models in a natural coordinate system // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 1996. V. 135. P. 283–306.
37. **Kojić M.** Inelastic analysis of solids and structures / M. Kojić, K.-J. Bathe. Berlin etc.: Springer, 2005.
38. **Макаров П. В.** Нелинейная механика геоматериалов и геосред / П. В. Макаров, И. Ю. Смолин, Ю. П. Стефанов и др. Новосибирск: Изд-во “Гео”, 2007.
39. **Hiermaier S. J.** Structures under crush and impact: continuum mechanics, discretization and experimental characterization. N. Y. etc.: Springer, 2008.
40. **Irgens F.** Continuum mechanics. Berlin etc.: Springer, 2008.
41. **Brown C. D., Phillips R. J.** Crust-mantle decoupling by flexure of continental lithosphere // *J. Geophys. Res.* 2000. V. 103, N B6. P. 13.221–13.237.

*Поступила в редакцию 15/II 2011 г.,  
в окончательном варианте — 16/IX 2011 г.*