

и очень быстрым охлаждением узкой зоны больших деформаций за счет теплоотдачи в основной металл, что способствует подавлению таких вредных процессов; как перекристаллизация и формирование интерметаллидной прослойки, ухудшающих качество сварного соединения.

Воспользуемся изложенными соображениями для того, чтобы сделать предположение о возможной причине волнообразования при сварке взрывом. При достаточно малых числах Рейнольдса максимальные давления (3), (4), достигаемые при соударении, оказываются недостаточными для преодоления вязкого сопротивления в зоне формирования кумулятивной пелены. Поэтому течение с большими деформациями обрывается и сменяется режимом упругого соударения. Но в этом режиме в окрестности угловой точки контакта возникает особенность упругого поля с упругими напряжениями, возрастающими до теоретического предела прочности решетки. Вследствие этого вновь становится возможным выдавливание вязкого материала в пелену, и цикл завершается. Регулярное повторение таких циклов и может составлять причину процесса волнообразования.

Таким образом, в условиях сварки взрывом весьма существенны проявления вязких сил, в связи с чем даже простейшая схема рассмотрения должна учитывать влияние масштабного фактора, а область сварки должна рассматриваться, как область в трехмерном пространстве (γ, v, h) . Поверхность, ограничивающая эту область снизу (со стороны малых γ) и соответствующая запертию течения с большими деформациями вязкими силами, может быть составлена из участков, описываемых уравнениями (1), (5) — (8), причем окончательный выбор между этими вариантами должен осуществляться на основании специального эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудиннов В. М., Коротеев А. Я. Сварка взрывом в металлургии.— М.: Металлургия, 1978.— 166 с.
2. Годунов С. К., Дерibas А. А., Мали В. И. О влиянии вязкости материала на процесс образования струй при соударении металлических пластин // ФГВ.— 1975.— 11, № 1.— С. 3—18.
3. Дерibas А. А. Физика упрочнения и сварки взрывом.— Новосибирск: Наука, 1980.— 221 с.
4. Бондарь М. П., Оголихин В. М. Пластическая деформация и образование связи при сварке взрывом медных пластин // ФГВ.— 1988.— 24, № 1.— С. 122—127.
5. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения.— М.: Наука, 1974.— 640 с.
6. Седых В. С. Сварка взрывом и свойства сварных соединений: Межвед. сб. научн. тр./Под ред. В. С. Седых.— Волгоград: Изд-во ВПИ, 1985.— С. 3—30.
7. Соннов А. П. // Там же.— 1988.— С. 3—17.
8. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды.— М.: Наука, 1978.— 304 с.
9. Симонов В. А. Дополнительные ограничения области сварки взрывом // ФГВ.— 1991.— 27, № 3.— С. 110—114.
10. Добрушин Л. Д. К вопросу о нижней границе сварки взрывом // Автоматическая сварка.— 1979.— № 6.— С. 64—65.
11. Wylie H. K., Crossland B. Explosive cladding with thick flyer plates // Int. Conf. on the Use of High-Energy Rate Methods for Forming, Welding and Compaction.— Univ. Leeds.— 1973.— P. 151—157.

г. Киев

Поступила в редакцию 22/VI 1992

УДК 530.1

В. Н. Доровский, Ю. В. Перепечко, Е. И. Роменский

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В НАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ УПРУГОДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕДАХ

В терминах метрического тензора деформаций приведены уравнения движения жидкости во вмещающем деформирующемся остове. Построено уравнение состояния среды без предположения о локальной аддитивности энтропии. Исследовано обратимое гидродинамическое приближение и проанализировано распространение малых

© В. Н. Доровский, Ю. В. Перепечко, Е. И. Роменский, 1993.

отклонений от термодинамически равновесного состояния. Показано, что система уравнений звуковых колебаний двухскоростной гидродинамической системы гиперболическая. В указанном приближении в системе существуют три типа колебаний: поперечный звук и два продольных. Построен пример теории, описывающей двухскоростной континуум с одним давлением, уравнения которой в обратимом приближении также гиперболические. Численно исследованы переходные процессы в нелинейной двухскоростной гидродинамике.

В работах [1, 2] предложены дифференциальные уравнения континуальной двухскоростной гидродинамики. Принципиальное отличие развитой теории от существующих построений (см., например, [3]) состоит в отказе от предположения о локальной аддитивности энтропии. Энергия двухскоростного континуума не делится на внутреннюю, зависящую только от термодинамических степеней свободы, и кинетическую. Теория строится на законах сохранения и принципе относительности Галилея. В основе теории лежат известные гидродинамические методы исследования систем с различным характером упорядочения [4]. Установлено, что перечисленные требования однозначно определяют уравнения движения классического двухскоростного континуума, учитывающие деформации пористого насыщенного жидкостью остова.

Уравнения движения

Для ряда приложений удобно определить метрический тензор g_{ik} , описывающий деформации пористого остова, через локальный деформационный репер e_i^α , используемый в [1]: $g_{ik} = e_i^\alpha e_k^\beta \delta_{\alpha\beta}$. Тогда полная система уравнений гидродинамики двухскоростного континуума примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0, \quad \mathbf{j} = \rho_s \mathbf{u} + \rho_l \mathbf{v}, \\ \frac{\partial g_{ik}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) g_{ik} + g_{kn} \partial_i u_n + g_{in} \partial_k u_n &= 0, \\ \rho_s &= \operatorname{const} \sqrt{\det(g_{ik})}, \quad \rho_l = \rho - \rho_s, \\ \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\mathbf{j} s - \frac{\kappa}{T} \nabla T \right) &= \frac{R}{T}, \\ R &= \frac{\kappa}{T} (\nabla T)^2 + \chi (\mathbf{j} - \rho \mathbf{u})^2 + \frac{\eta}{2} \left(\partial_k v_i + \partial_i v_k - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v} \right)^2, \\ \frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_k \left(\rho_s u_i u_k + \rho_l v_i v_k + h_{in} g_{nk} + p \delta_{ik} - \eta \left(\partial_k v_i + \partial_i v_k - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \right) &= 0, \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) v_i &= -\frac{1}{\rho} \partial_i p + \frac{\rho_s}{2\rho} \partial_i w^2 - \frac{h_{kj}}{2\rho} \partial_i g_{jk} - \chi (j_i - \rho u_i) + \\ &+ \frac{1}{\rho_l} \partial_k \left(\eta \left(\partial_k v_i + \partial_i v_k - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Закон сохранения энергии есть следствие приведенных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(e_0 - \frac{\rho v^2}{2} + (\mathbf{v}, \mathbf{j}) \right) + \partial_i \left(\left(\mu + \frac{v^2}{2} + Ts \right) j_i + \rho (\mathbf{u}, \mathbf{i}_0) u_i + h_{ij} g_{jk} u_k - \right. \\ \left. - \eta v_k \left(\partial_k v_i + \partial_i v_k - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) - \kappa \partial_i T \right) &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение состояния

$$e_0 = e_0(\rho, s, g_{ik}, w^2) \quad (2)$$

считается заданным, причем

$$de_0 = \frac{p}{\rho^2} d\rho + T ds + (\mathbf{u} - \mathbf{v}, d\mathbf{i}_0) + \frac{h_{ik}}{2\rho} dg_{ik}, \quad (3)$$

$$\mathbf{i}_0 = \frac{\rho_s}{\rho} (\mathbf{u} - \mathbf{v}), \quad \mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}.$$

В системе (1) ρ — плотность, ρ_s, ρ_l — парциальные плотности твердого остова и жидкости, присутствующей в нем; \mathbf{u}, \mathbf{v} — скорости остова и жидкости; \mathbf{j} — плотность импульса; T — температура; s — энтропия единицы массы; p — давление; e_0 — внутренняя энергия единицы массы; η — сдвиговая вязкость системы, χ — параметр, учитывающий межфазное трение; κ — теплопроводность. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Дифференциальный оператор ∂_i соответствует $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Уравнение состояния

Для придания системе (1) конкретного содержания, необходимо построить уравнение состояния (2). В гукковом приближении оно строится из общих соображений. Обозначим через \tilde{e}_0 значение e_0 при $\mathbf{w} = 0$ и построим уравнение состояния для этого случая.

Выберем произвольное ненапряженное состояние насыщенного жидкостью пористого тела $T = T_0, \rho = \rho_0, g_{ik} = \delta_{ik}, h_{ik} = 0, p = 0$ и определим два инварианта метрического тензора деформаций

$$I_1 = \delta_{ik}(g_{ik} - \delta_{ik}), \quad I_2 = \delta_{ik}\delta_{jm}(g_{im} - \delta_{im})(g_{jk} - \delta_{jk}).$$

С точностью до кубических членов разложения имеем

$$\begin{aligned} \tilde{e}_0(\rho, s, g_{ik}) = & e_*(I_1, I_2) + e_\rho(I_1)(\rho - \rho_0) + e_s(I_1)(s - s_0) + \\ & + \frac{e_{\rho\rho}}{2}(\rho - \rho_0)^2 + \frac{e_{ss}}{2}(s - s_0)^2 + e_{\rho s}(\rho - \rho_0)(s - s_0). \end{aligned}$$

При

$$\begin{aligned} e_*(I_1, I_2) = & \text{const} + \frac{\lambda}{8\rho_0} I_1^2 + \frac{\mu}{4\rho_0} I_2, \\ e_\rho(I_1) = & \frac{c_1}{2\rho_0} I_1 \quad \text{и} \quad e_s(I_1) = \frac{c_2}{2\rho_0} I_1 \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} \tilde{e}_0(\rho, s, g_{ik}) = & e_*(I_1, I_2) + \frac{c_1}{2\rho_0} I_1(\rho - \rho_0) + \left(T_0 + \frac{c_2 I_1}{2\rho_0}\right)(s - s_0) + \\ & + \frac{e_{\rho\rho}}{2}(\rho - \rho_0)^2 + \frac{e_{ss}}{2}(s - s_0)^2 + e_{\rho s}(\rho - \rho_0)(s - s_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Дифференциальная форма (3) позволяет, используя (4), вычислить давление, температуру, а также тензор h_{ik} с точностью до квадратичных членов разложения

$$\begin{aligned} p = \rho^2 \frac{\partial \tilde{e}_0}{\partial \rho} = & \frac{\rho_0}{2} c_1 \delta g_{ll} + \rho_0^2 e_{\rho\rho} \delta \rho + \rho_0^2 e_{\rho s} \delta s, \\ T = \frac{\partial \tilde{e}_0}{\partial s} = & T_0 + \frac{1}{2\rho_0} c_2 \delta g_{ll} + e_{ss} \delta s + e_{\rho s} \delta \rho, \\ h_{ik} = 2\rho \frac{\partial \tilde{e}_0}{\partial g_{ik}} = & \mu \left(\delta g_{ik} - \frac{\delta g_{ll}}{3} \delta_{ik} \right) + \frac{K}{2} \delta g_{ll} \delta_{ik} + c_1 \delta_{ik} \delta \rho + c_2 \delta_{ik} \delta s, \\ \delta \rho = \rho - \rho_0, \quad \delta s = s - s_0, \quad \delta g_{ll} = & \delta_{ik}(g_{ik} - \delta_{ik}), \quad \delta g_{ik} = g_{ik} - \delta_{ik}, \\ & K = \frac{2\mu}{3} + \lambda. \end{aligned} \quad (5)$$

Чтобы придать теории физическое содержание необходимо коэффициенты разложения $c_1, c_2, e_{\rho\rho}, e_{\rho s}, e_{ss}$ вычислить, либо указать способ их измерения. С этой целью рассмотрим свободное тепловое расширение

$$\delta g_{ik} = \frac{\delta_{ik}}{3} \delta g_{ll}, \quad h_{ik} = 0, \quad p = 0. \quad (6)$$

Определим теплоемкость c_0 и коэффициент теплового свободного расширения D :

$$\delta\rho = -D\delta T, \quad \delta s = \frac{c_0}{T_0} \delta T.$$

Рассмотрим также изотермическое всестороннее сжатие

$$\delta g_{ik} = \frac{\delta_{ik}}{3} \delta g_{ll}, \quad h_{ik} = -p_* g^{ik}, \quad p \neq 0, \quad T = T_0, \quad (7)$$

которое вводит в рассмотрение коэффициент $(\partial\rho/\partial p)_{T, p_* = 0}$. Решая уравнения (6), (7) с учетом (5), однозначно определяем коэффициенты в (4) [5]

$$e_{\rho s} = \frac{TD}{\rho_0^2 c_v} \left(\frac{\partial\rho}{\partial p} \right)_{T, p_* = 0}^{-1}, \quad c_{ss} = \frac{T}{C_v}, \quad e_{\rho\rho} = \frac{C_p}{\rho_0^2 c_v} \left(\frac{\partial\rho}{\partial p} \right)_{T, p_* = 0}^{-1} + \frac{K}{\rho_0^3},$$

$$c_1 = -\frac{K}{\rho_0}, \quad c_2 = 0.$$

Изотермическая сжимаемость находится при $p_* = 0$, т. е. для случая, когда снято взаимодействие в твердой составляющей континуума. Здесь можно ввести пористость d :

$$\rho = \rho_s^f(p, T)(1-d) + \rho_l^f(p, T)d, \quad (8)$$

где ρ_s^f, ρ_l^f — физические плотности компонент, слагающих континуум. Для двухпараметрических сред соотношение (8) дает

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial p} \right)_{p_* = 0} = \frac{\rho}{\rho_l^f} \frac{\partial\rho_l^f}{\partial p} d + \frac{\rho}{\rho_s^f} \frac{\partial\rho_s^f}{\partial p} (1-d). \quad (9)$$

Кинетическую зависимость $e_0(\mathbf{w})$ установить в общем случае без привлечения сведений о характере взаимодействия в системе нельзя. Тем не менее, используя дифференциальную форму (3), можно ограничиться для значительного числа приложений первыми членами разложения энергии $e_0(\rho, s, \mathbf{i}_0, g_{ik})$ по относительной скорости \mathbf{w}

$$e_0(\rho, s, \mathbf{i}_0, g_{ik}) = \tilde{e}_0(\rho, s, g_{ik}) + \frac{\rho_s}{2\rho} w^2, \quad \mathbf{w} = \frac{\hat{c}}{\rho_s} \mathbf{i}_0.$$

Таким образом, собирая полученные формулы, приведем окончательный вид уравнения состояния:

$$e_0(\rho, s, g_{ik}, \mathbf{i}_0) = \text{const} + \frac{\lambda}{8\rho_0} I_1^2 + \frac{\mu}{4\rho_0} I_2 - \frac{K}{2\rho_0^2} I_1(\rho - \rho_0) + T_0(s - s_0) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\alpha_3 + \frac{K}{\rho_0^3} \right) (\rho - \rho_0)^2 + \frac{\alpha_2}{2} (s - s_0)^2 + \alpha_1(\rho - \rho_0)(s - s_0) + \frac{\rho_s}{2\rho} w^2. \quad (10)$$

В результате дифференцирования (10) по термодинамическим переменным получим

$$p = -\frac{K}{2} \delta g_{ll} + \left(\rho_0^2 \alpha_3 + \frac{K}{\rho_0} \right) \delta\rho + \rho_0^2 \alpha_1 \delta s + \frac{\rho_s w^2}{2}, \quad T = T_0 + \alpha_2 \delta s + \alpha_1 \delta\rho, \quad (11)$$

$$h_{ik} = \mu g_{ik} + \frac{\lambda}{2} g_{ll} \delta_{ik} - K \frac{\rho}{\rho_0} \delta_{ik} - \frac{K}{2} \delta_{ik} - \frac{g^{ik} \rho_s w^2}{2}.$$

Звук

Система (1) и уравнение состояния (10) позволяют исследовать вопрос о распространении звука в пористых упругодеформируемых насыщенных жидкостью средах. С этой целью опустим из рассмотрения в си-

стеме (1) диссипативные процессы и линеаризуем ее относительно термодинамически равновесного состояния $\mathbf{u} = \mathbf{v} = 0$, $T = T_0$, $\rho = \rho_0$, $h_{ik} = 0$, $p = 0$, тогда с линейной точностью получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ik}}{\partial t} + \partial_i u_k + \partial_k u_i &= 0, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \partial_i p + \frac{1}{\rho_{0,s}} \partial_k h_{ik} &= 0, \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \partial_i p = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_{0,s} \operatorname{div} \mathbf{u} + \rho_{0,l} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Система (12) замыкается уравнениями состояния (11)

$$\begin{aligned} p &= -\frac{K}{2} g_{ii} + \left(\rho_0^2 \alpha_3 + \frac{K}{\rho_0} \right) \rho + \rho_0^2 \alpha_1 s + \text{const}, \\ h_{ik} &= \mu g_{ik} + \frac{\lambda}{2} g_{il} \delta_{ik} - K \frac{\rho}{\rho_0} \delta_{ik} + \text{const}. \end{aligned}$$

Исключим из (12) термодинамические степени свободы. После простейших преобразований приходим к замкнутой относительно скоростей \mathbf{u} , \mathbf{v} системе двух уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}} + \left(\frac{2K}{\rho_0} - \rho_{0,s} \left(\rho_0 \alpha_3 + \frac{K}{\rho_0^2} \right) - \frac{\lambda + \mu}{\rho_{0,s}} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{\mu}{\rho_{0,s}} \Delta \mathbf{u} + \\ + \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} \left(\frac{K}{\rho_{0,s}} - \left(\rho_0^2 \alpha_3 + \frac{K}{\rho_0} \right) \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \ddot{\mathbf{v}} + \left(\frac{K}{\rho_0} - \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0} \left(\rho_0^2 \alpha_3 + \frac{K}{\rho_0} \right) \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} \left(\frac{K}{\rho_0} + \rho_0^2 \alpha_3 \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Представим скорости в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_l + \mathbf{v}_t$ так, что $\operatorname{div} \mathbf{u}_t = \operatorname{div} \mathbf{v}_t = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{u}_l = \operatorname{rot} \mathbf{v}_l = 0$.

Следуя методу [6], получаем уравнения, определяющие продольные и поперечные составляющие скоростей \mathbf{u} и \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_t - \frac{\mu}{\rho_{s,0}} \Delta \mathbf{u}_t &= 0, \quad \ddot{\mathbf{v}}_t = 0, \\ \ddot{\mathbf{u}}_l + \left(\frac{2K}{\rho_0} - \rho_{0,s} \left(\rho_0 \alpha_3 + \frac{K}{\rho_0^2} \right) - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_{0,s}} \right) \Delta \mathbf{u}_l + \\ + \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} \left(\frac{K}{\rho_{0,s}} - \rho_0^2 \alpha_3 - \frac{K}{\rho_0} \right) \Delta \mathbf{v}_l &= 0, \\ \ddot{\mathbf{v}}_l + \left(\frac{K}{\rho_0} - \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0} \left(\rho_0^2 \alpha_3 + \frac{K}{\rho_0} \right) \right) \Delta \mathbf{u}_l - \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} \left(\frac{K}{\rho_0} + \rho_0^2 \alpha_3 \right) \Delta \mathbf{v}_l &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Исследуем условия существования решений системы уравнений (14) в виде монохроматических звуковых волн

$$\mathbf{u}_l = \mathbf{u}_{l0} e^{i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{v}_l = \mathbf{v}_{l0} e^{i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в систему (14), приходим к системе однородных линейных алгебраических уравнений на амплитуды \mathbf{u}_{l0} , \mathbf{v}_{l0}

$$\begin{aligned} \left(c_l^2 + \frac{2K}{\rho_0} - \rho_0 \rho_{0,s} e_{\rho\rho} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_{0,s}} \right) \mathbf{u}_{l0} + \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} \left(\frac{K}{\rho_{s,0}} - \rho_0^2 e_{\rho\rho} \right) \mathbf{v}_{l0} &= 0, \\ \left(\frac{K}{\rho_0} - \rho_0 \rho_{0,s} e_{\rho\rho} \right) \mathbf{u}_{l0} + (c_l^2 - \rho_0 \rho_{0,l} e_{\rho\rho}) \mathbf{v}_{l0} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Условие существования решений вида (15) сводится к условию равенства нулю определителя системы уравнений (16)

$$c_l^4 - 2B_* c_l^2 + b_* = 0, \quad (17)$$

где

$$B_* = \frac{c_p}{2c_v} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T, p_*=0}^{-1} + \frac{K}{2\rho_0} \left(\frac{(\lambda + 2\mu)\rho_0}{\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\rho_{0,s}} - 1 \right),$$

$$b_* = (\lambda + 2\mu) \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0 \rho_{0,s}} \left(\frac{K}{\rho_0} \left(1 - \frac{K}{\lambda + 2\mu} \right) + \frac{c_p}{c_v} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T, p_*=0}^{-1} \right).$$

Выражение (17) имеет корни:

$$c_{l1}^2 = B_* \left(1 + \sqrt{1 - \frac{b_*}{B_*}} \right), \quad c_{l2}^2 = B_* \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b_*}{B_*}} \right). \quad (18)$$

Для монохроматических волн (15) выполняются условия

$$\text{rot}_i \mathbf{u}_l = \varepsilon_{ijk} \partial_j (u_{l0,k} e^{i(\mathbf{k}_l \mathbf{r} - \omega t)}) = i(\mathbf{k}_l, \mathbf{u}_{l0})_i e^{i(\mathbf{k}_l \mathbf{r} - \omega t)} = 0,$$

$$\text{rot}_i \mathbf{v}_l = \varepsilon_{ijk} \partial_j (v_{l0,k} e^{i(\mathbf{k}_l \mathbf{r} - \omega t)}) = i(\mathbf{k}_l, \mathbf{v}_{l0})_i e^{i(\mathbf{k}_l \mathbf{r} - \omega t)} = 0. \quad (19)$$

Амплитуды \mathbf{u}_{l0} , \mathbf{v}_{l0} , как следует из условия (19), параллельны волновому вектору \mathbf{k}_l ($k_l^2 = \omega^2/c_l^2$). Такие продольные волны распространяются с двумя скоростями c_{l1} , c_{l2} , определяемыми формулами (18). Напротив, для монохроматической волны $\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{t0} \exp(i(\mathbf{k}_t \mathbf{r} - \omega t))$ выполняются условия

$$\text{div} \mathbf{u}_t = \partial_i (u_{t0,i} e^{i(\mathbf{k}_t \mathbf{r} - \omega t)}) = i(\mathbf{k}_t, \mathbf{u}_{t0}) e^{i(\mathbf{k}_t \mathbf{r} - \omega t)} = 0.$$

Вектор \mathbf{u}_{t0} ортогонален волновому вектору \mathbf{k}_t . В такой поперечной монохроматической волне (см. (13))

$$(\mathbf{k}_t, \mathbf{u}_{t0}) = 0, \quad k_t^2 = \frac{\omega^2}{c_t^2}, \quad c_t^2 = \frac{\mu}{\rho_{s,0}}. \quad (20)$$

Жидкость, заполняющая поры, не имеет поперечных звуковых колебаний. Три скорости звука c_{l1} , c_{l2} , c_t определяются экспериментально. По этой причине равенства (18) и (20) можно рассматривать как соотношения, позволяющие связать три коэффициента упругости с измеримыми скоростями звука.

Коэффициенты μ , λ , $(\partial \rho / \partial p)_{T, p_*=0}$ в общем случае являются функциями термодинамических переменных, характеризующих локальное состояние системы при $\mathbf{w} = 0$. Одной из таких величин может служить объемная доля жидкости в насыщенном пористом теле d . Зависимость парциальных плотностей от пористости очевидна:

$$\rho_0 = \rho_{s,0}^f (1 - d) + \rho_{l,0}^f d, \quad \rho_{s,0} = \rho_{s,0}^f (1 - d), \quad \rho_{l,0} = \rho_{l,0}^f d.$$

Если обозначить через λ_s , μ_s коэффициенты Ламэ однородного материала, то следующие предположения вполне очевидны

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \lambda = \lambda_s, \quad \lim_{d_0 \rightarrow 0} \mu = \mu_s, \quad \lim_{d_0 \rightarrow 0} K = \lim_{d_0 \rightarrow 0} \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) = K_s.$$

Используем введенные пределы для определения предельных значений коэффициентов

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} b_* = 0, \quad \lim_{d_0 \rightarrow 0} 2B_* = \frac{\lambda_s + 2\mu_s}{\rho_s}.$$

Таким образом, предельные соотношения для скоростей звука имеют вид

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} c_{l1} = \sqrt{\frac{\lambda_s + 2\mu_s}{\rho_s}}, \quad \lim_{d_0 \rightarrow 0} c_t = \sqrt{\frac{\mu_s}{\rho_s}}, \quad \lim_{d_0 \rightarrow 0} c_{l2} = 0$$

и совпадают с известными выражениями для продольной и поперечной скоростей звука в однородной, изотропной «гуковской» среде линейной теории упругости [6]. В указанном пределе скорость дополнительных продольных колебаний c_{l2} исчезает.

Затухание звука

Примем во внимание диссипативные процессы при распространении звуковых колебаний, причем ограничимся для простоты только потерей энергии при межкомпонентном трении, вводимом в систему уравнений (1) кинетическим коэффициентом χ . В этом случае уравнения (1), описывающие поглощение звука, с линейной точностью примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ik}}{\partial t} + \partial_i u_k + \partial_k u_i &= 0, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_{0,s} \operatorname{div} \mathbf{u} + \rho_{0,l} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \partial_i p - \chi \rho_{0,s} (u_i - v_i) &= 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \partial_i p + \frac{1}{\rho_{0,s}} \partial_k h_{ik} + \chi \frac{\rho_{0,i}^2}{\rho_{0,s}} (u_i - v_i) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Система (21) замыкается соотношениями (11). Повторив вывод выражения (17) для скоростей продольного звука с учетом затухания, получаем

$$c_{\parallel}^4 + i \frac{\rho_0 \rho_{0,l}}{k_l \rho_{0,s}} \chi c_{\parallel}^3 - 2B_* c_{\parallel}^2 - i \frac{\rho_{0,l}}{k_l \rho_{0,s}} \chi (\lambda + 2\mu + \rho_0^3 e_{pp} - 2K) c_{\parallel} + b_* = 0. \quad (22)$$

Аналогично для скорости поперечного звука имеем

$$c_{\perp}^3 + i \frac{\rho_0 \rho_{0,i}}{k_l \rho_{0,s}} \chi c_{\perp}^2 - \frac{\mu}{\rho_{0,s}} c_{\perp} - i \frac{\rho_{0,i}}{k_l \rho_{0,s}} \chi \mu = 0. \quad (23)$$

Определим величину z соотношением $c_{\perp} = ic_t z$, после чего выражение (23) трансформируется в кубический многочлен с действительными положительными коэффициентами:

$$z^3 + v_2 z^2 + z + v_0 = 0, \quad v_2 = \frac{\rho_0}{\rho_{0,s}} v_0, \quad v_0 = \frac{\rho_{0,l}}{k_l c_t} \chi.$$

Необходимое и достаточное условие наличия корней в левой полуплоскости для таких многочленов [7]

$$v_2 - v_0 = \frac{\rho_{0,l}}{\rho_{0,s}} v_0 > 0$$

всегда выполнено, следовательно,

$$z = -\frac{1}{c_t k_l t_*} - ic_*, \quad t_* > 0, \quad \operatorname{Im} c_* = 0.$$

Как следствие, решение системы (21)

$$w_i = w_{0,i} e^{-\frac{t}{t_*}} e^{ib_i(x - c_* c_t t)} \quad (24)$$

представляется затухающей волной с характерным временем затухания t_* , бегущей со скоростью $c_* c_t$. Для продольных волн подстановкой $c_{\parallel} = i = \sqrt{2B_*} \tilde{z}$, (22) преобразуется в полином с действительными коэффициентами

$$\tilde{z}^4 + \frac{\rho_0 \rho_{0,l}}{k_l \rho_{0,s} (2B_*)^{1/2}} \chi \tilde{z}^3 + \tilde{z}^2 + \frac{\rho_{0,l}}{k_l \rho_{0,s} (2B_*)^{3/2}} \chi (\lambda + 2\mu + \rho_0^3 e_{pp} - 2K) \tilde{z} + \frac{b_*}{4B_*^2} = 0.$$

Для затухания звуковых продольных колебаний необходимо и достаточно наличия корней только в левой полуплоскости, что, согласно

критерию Рауса — Гурвица [7], обеспечивается выполнением условий

$$\frac{\rho_0 \rho_{0,l}}{k_l \rho_{0,s} B_*^{1/2}} > 0, \quad B_* > 0, \quad \frac{b_*}{4B_*^2} > 0,$$

$$\frac{\rho_{0,l}^2}{k_l \rho_{0,s}^2 B_*^{3/2}} \chi(\lambda + 2\mu) > 0, \quad \frac{16\rho_{0,l}^3}{9k_l \rho_{0,s}^3 B_*^3} \chi^2 > 0,$$

которые, как легко показать, выполняются для всех термодинамически устойчивых веществ. Амплитуды продольных волн имеют пространственно-временную структуру типа (24).

В результате показано затухание продольных и поперечных волн при учете межкомпонентного трения.

Гиперболичность уравнений в двухскоростных средах с одним давлением

Равноправие компонент двухскоростного континуума в системе (1) обеспечивается уравнением состояния, для которого $h_{ik} = -p_* g_{ik}$. В этом случае располагаем теорией с двумя давлениями p и p_* . Численный анализ показывает, что исходная, линеаризованная относительно ненулевого гидродинамического фона система (1) в обратимом гидродинамическом приближении гиперболическая. Существует мнение, что такая гиперболичность есть следствие наличия в системе двух давлений [3].

Можно построить гидродинамическую систему уравнений с одним давлением, линеаризованный вариант которой представляется гиперболической системой уравнений в частных производных. Действительно, положив в обратимом приближении системы (1) $h_{ik} = 0$, получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_s \mathbf{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathbf{j} s) = 0,$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) v_i = -\frac{1}{\rho} \partial_i p + \frac{\rho_s}{2\rho} \partial_i w^2,$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_k \Pi_{ik} = 0, \quad \Pi_{ik} = \rho_s u_i u_k + \rho_l v_i v_k + p \delta_{ik}, \quad (25)$$

$$p = p(\rho, s, w^2), \quad \rho = \rho_s + \rho_l,$$

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} + \rho_s \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}.$$

В (25) нарушено равноправие компонент в силу того, что снято взаимодействие в континууме с парциальной плотностью ρ_s . В этом случае можно говорить об увлечении континуума твердых частиц потоком жидкости.

Выберем в качестве гидродинамического фона состояние с $\rho = \rho_0$, $\rho_s = \rho_{0,s}$, $T = T_0$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ и линеаризуем систему (25). С линейной точностью в одномерном варианте ($\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v} = (w, 0, 0)$) уравнения (25) принимают вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} + w_0 \frac{\partial \rho_s}{\partial x} + \rho_{0,s} \frac{\partial w}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho_s}{\partial x} + \rho_{0,s} \frac{\partial w}{\partial x} + \rho_{0,s} \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (u_0 + w_0) \frac{\partial w}{\partial x} + w_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{w_0^2}{2\rho_0} \frac{\partial \rho_s}{\partial x} = 0,$$

$$p = c_0^2 \rho + \frac{\rho_s w^2}{2}.$$

Здесь используется условие адиабатичности $s = \text{const}$ и учтены кинетические поправки к уравнению состояния.

В (26) перейдем в систему отсчета, связанную с потоком невозмущенного движения твердых частиц $x \rightarrow x - u_0 t$. Решение полученной системы ищем в виде бегущих монохроматических волн

$$(\rho, \rho_s, w, v) = (\tilde{\rho}, \tilde{\rho}_s, \tilde{w}, \tilde{v}) e^{i(kx - \omega t)}. \quad (27)$$

Условие существования решения (27) сводится к существованию корней характеристического уравнения

$$c^4 + w_0 c^3 - (c_0^2 + \gamma w_0^2) c^2 - w_0 \left(\frac{\rho_{0,s} - \rho_{0,l}}{\rho_0} c_0^2 + \gamma w_0^2 \right) c = 0,$$

где $\gamma = 1 + \rho_{0,s}/2\rho_0$; $c = \omega/k$. Введем безразмерную скорость $c_* = c/c_0$, которая определится из формулы

$$\varphi(c_*) = c_*^3 + \varepsilon c_*^2 - (1 + \gamma \varepsilon^2) c_* - \varepsilon \left(\frac{\rho_{0,s} - \rho_{0,l}}{\rho_0} + \gamma \varepsilon^2 \right) = 0,$$

$$\varepsilon = w_0/c_0.$$

Легко находятся с линейной точностью три действительных корня, которые приводят к четырем значениям c :

$$c^{(1)} = c_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_{0,s} - \rho_{0,l}}{\rho_0} - 1 \right) w_0, \quad c^{(2)} = -c_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_{0,s} - \rho_{0,l}}{\rho_0} - 1 \right) w_0,$$

$$c^{(3)} = 0, \quad c^{(4)} = -\frac{\rho_{0,s} - \rho_{0,l}}{\rho_0} w_0. \quad (28)$$

Сравнивая результат (28) с соответствующими формулами [3], приходим к выводу: для обеспечения гиперболичности уравнений двухскоростного движения нет необходимости введения второго давления. Последнее в уравнениях континуальной двухскоростной гидродинамики следует вводить лишь в случае существования упругого взаимодействия в системе твердых частиц. Таким образом, имеем пример гиперболической двухскоростной системы с одним давлением. Причина регуляризации уравнений состоит в учете обратимых сил реакции $\rho_s \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2/2\rho$ в системе уравнений (1). Искусственное введение второго давления требует по меньшей мере физических комментариев. Природа сил реакции подробно анализировалась в [2].

Численный анализ

Численный анализ нестационарных режимов двухскоростной гидродинамики, описываемых системой (1) с уравнением состояния (10), проведен для двумерной нестационарной задачи о нагнетании импульса в жидкость, находящуюся в упругодеформированном пористом остове, занимающем поровое полупространство.

Анализируется физическая ситуация, когда диссипация энергии происходит только на межкомпонентном трении.

Система двумерных нестационарных уравнений получается из (1):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial j_x}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial j_y}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yy}}{\partial y} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial g_{xx}}{\partial t} + u_x \frac{\partial g_{xx}}{\partial x} + u_y \frac{\partial g_{xx}}{\partial y} + 2g_{xn} \frac{\partial u_n}{\partial x} = 0, \\
& \frac{\partial g_{xy}}{\partial t} + u_x \frac{\partial g_{xy}}{\partial y} + u_y \frac{\partial g_{xy}}{\partial y} + g_{yn} \frac{\partial u_n}{\partial x} + g_{xn} \frac{\partial u_n}{\partial y} = 0, \\
& \frac{\partial g_{yy}}{\partial t} + u_x \frac{\partial g_{yy}}{\partial x} + u_y \frac{\partial g_{yy}}{\partial y} + 2g_{yn} \frac{\partial u_n}{\partial y} = 0, \\
& \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_n \frac{\partial w_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial w_x}{\partial y} - v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\rho_l}{\rho_s} \nu_{kl} w_x - \frac{1}{2\rho_s} h_{kn} \frac{\partial \sigma_{kn}}{\partial x} + \\
& \quad + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial h_{xn} g_{nx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial h_{xn} g_{ny}}{\partial y} = 0, \\
& \frac{\partial w_y}{\partial t} + w_n \frac{\partial w_y}{\partial y} + u_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial w_y}{\partial y} - v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\rho_l}{\rho_s} \nu_{kl} w_y - \frac{1}{2\rho_s} h_{kn} \frac{\partial \sigma_{kn}}{\partial y} + \\
& \quad + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial h_{yn} g_{nx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial h_{yn} g_{ny}}{\partial y} = 0.
\end{aligned} \tag{29}$$

Потоки в системе (29) соответствуют уравнениям (1). Энергия $E = \rho e_0 + \rho v^2/2 + (v, j - \rho v)$, давление p и h_{ik} определяются уравнением состояния (10). Кинетический коэффициент χ связан с коэффициентом проницаемости k и вязкостью жидкости η_l формулой $\chi = \eta_l / (k \rho \rho_l)$.

Расчетная область на плоскости (x, y) является конечным прямоугольником $0 < x < a$, $0 < y < b$ ($a = b = 1$ м). На правой границе расчетной области ($x = a$) задаются «неотражающие» граничные условия, имитирующие бесконечность и заключающиеся в равенстве нулю инвариантов, переносимых характеристиками, уходящими во внутрь расчетной области. На левой границе расчетной области задаются условия нагнетания жидкости:

$$u_x = 0, \quad T = T_0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad v = (V_0, 0).$$

Здесь V_0 — поддерживаемая постоянной скоростью вмещающей жидкости. На верхних и нижних границах задаются условия $u_x = u_y = v_y = 0$. Для численного решения задачи применяется модифицированная схема Годунова первого порядка точности, в которой все величины относятся к точкам сетки, а не к ячейкам [8].

В численном эксперименте исследовался характер нестационарности процессов в пористых упругодеформируемых телах при различных проницаемостях системы. Непосредственный интерес представляет вопрос о предельных нагрузках для реализации необходимых скоростей течения жидкого компонента.

В качестве модельной системы рассматривалась среда с начальными физическими параметрами, близкими по физическим свойствам к кальцитам, насыщенным нефтью: $\rho_s^f = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\rho_l^f = 0,9 \cdot 10^3$ кг/м³ — физические плотности остова и жидкости; $d_0 = 0,2$ — объемная доля жидкого компонента; $c_s^f = 0,48$ кДж/(кг·К), $c_l^f = 0,21$ кДж/(кг·К) — физические теплоемкости; $(\rho_s^f)^{-1} \partial \rho_s^f / \partial T = -3 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹, $(\rho_l^f)^{-1} \partial \rho_l^f / \partial T = -6 \cdot 10^{-4}$ К⁻¹ — коэффициенты объемного расширения; $(\rho_s^f)^{-1} \partial \rho_s^f / \partial p = 6 \cdot 10^{-11}$ Па⁻¹, $(\rho_l^f)^{-1} \times \partial \rho_l^f / \partial p = 6 \cdot 10^{-10}$ Па⁻¹ — коэффициенты сжимаемости; $\lambda = 2,5 \cdot 10^{-3}$ Дж/м³, $\mu = 9,3 \cdot 10^{-3}$ Дж/м³ — коэффициенты Ламэ.

В начальный момент температура T_0 пористого насыщенного жидкостью тела составляла 293 К.

Численный анализ показывает, что характер нагнетания импульса в пористую насыщенную жидкостью систему определяется величиной скорости нагнетания и особенно значением кинетического параметра χ . Обнаружено существование трех принципиально различных динамических режимов.

1. Для высокопроницаемых сред ($k \gg 10^3$ Д) обнаружено (рис. 1) наличие четко выраженного фронта волн, причем за фронтом импульс

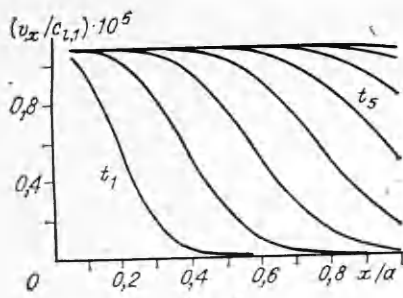


Рис. 1.

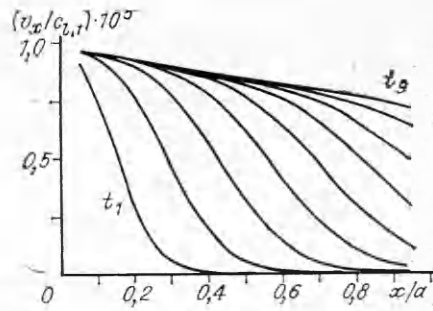


Рис. 2.

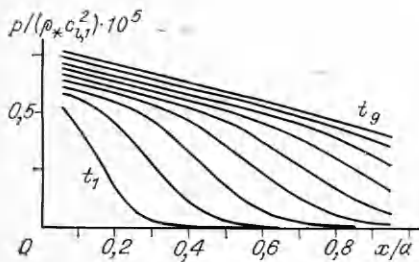


Рис. 3.

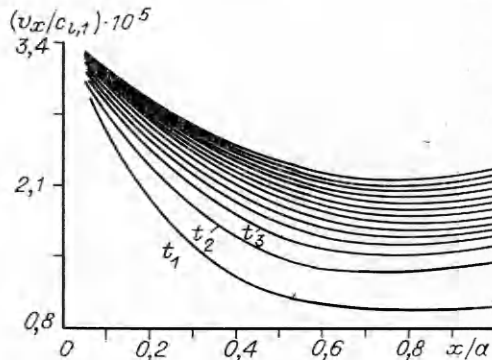


Рис. 4.

жидкости практически не претерпевает последующих изменений. Безразмерные временные указатели находятся в соотношении $t_1 < t_2 < \dots < t_5$ с шагом 0,8 в единицах безразмерного времени.

Приведенная эволюция профилей соответствует значению координаты $y = b/2$. Давление повторяет профили скорости. Граничному значению скорости 0,037 м/с соответствует давление нагнетания $p = 70$ кПа, градиент давления за фронтом волны отсутствует. За фронтом волны среда приходит в стационарное состояние, упругие напряжения сдвига вымирают.

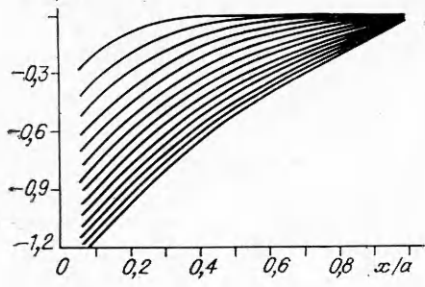
2. В области значений проницаемости порядка 10^3 Д наблюдается формирование профиля скорости v_x с постоянным градиентом, который в дальнейшем медленно эволюционирует к постоянному граничному значению (рис. 2).

При достижении промежуточного линейного профиля скорости v_x формируется течение жидкости с постоянным градиентом давления вдоль оси x ($y = b/2$) (рис. 3), которое в дальнейшем не изменяет своего вида. Для поддержания заданной скорости на входе необходимо достичь давления до 150 кПа. На рис. 2, 3 безразмерные временные интервалы составляют 0,63.

3. При $k \ll 10^3$ Д наблюдается принципиальное отличие в динамике течения: промежуточный квазистационарный профиль скорости не формируется.

Подробно рассмотрим практически интересный случай ($k \approx 1$ Д). На рис. 4 показана эволюция продольных профилей скорости жидкости для граничного значения $v_0 = 3,7$ м/с. Видно существование пограничного слоя на начальном этапе процесса, поскольку на рис. 4 $x = 0$ м соответствуют граничные значения $v_0 = 3,7$ м/с, а при $x = 0,05$ м $v_0 = 0,1$ м/с. Поведение давления аналогично случаю умеренной проницаемости, однако его величина может достигать величины $\approx 0,3$ ГПа.

В этом случае интересно посмотреть результаты расчетов составляющих тензора напряжений h_{imgmj} , поскольку именно они определяют де-



+ δ_{ik}

θ

θ