УДК 629.7.023:539.4.384.4

НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ОВАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ С ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

Л. П. Железнов, В. В. Кабанов, Д. В. Бойко

Сибирский научно-исследовательский институт авиации им. С. А. Чаплыгина,
630051 Новосибирск
E-mail: lev@wsr.ru

Исследована задача устойчивости цилиндрических оболочек с овальным контуром поперечного сечения при комбинированном нагружении изгибающим моментом и внутренним давлением. Использован вариационный метод конечных элементов в перемещениях. Докритическое напряженно-деформированное состояние оболочек считается моментным и нелинейным. Определено влияние нелинейности деформирования оболочек и их овализации на величину критических нагрузок и формы потери устойчивости.

Ключевые слова: овальная цилиндрическая оболочка, изгиб моментом, внутреннее давление, нелинейное деформирование, устойчивость, метод конечных элементов.

Введение. Некруговые цилиндрические оболочки значительно экономичнее круговых. Применение их в конструкциях современных пассажирских самолетов позволяет эффективнее использовать внутренний объем гермокабин, повысить комфортность и пассажироемкость, уменьшить массу самолета. Примером может служить аэробус А-380 на 500 мест с двухэтажной гермокабиной овального поперечного сечения. Однако надежных методик расчета устойчивости таких гермокабин пока не создано, так как некруговые оболочки, в отличие от круговых, недостаточно исследованы на устойчивость. Это можно объяснить трудностями решения задач, обусловленными переменностью радиуса кривизны некруговых оболочек, приводящей к появлению переменных коэффициентов в уравнениях устойчивости. Известные решения задач устойчивости получены аналитическими методами и, как правило, в линейном приближении без учета моментности и нелинейности докритического состояния оболочек, т.е. в классической постановке. Рассматриваемый в данной работе случай нагружения овальных цилиндрических оболочек не исследовался даже в классической постановке.

Исследование нелинейного деформирования и устойчивости неподкрепленной оболочки. Исследуем задачу нелинейного деформирования и устойчивости консольной ($u = v = w = w_x = 0$) цилиндрической оболочки овального поперечного сечения при действии внутреннего давления q и краевого изгибающего момента M. Нагруженный край оболочки подкреплен жестким в своей плоскости шпангоутом. Действие изгибающего момента заменим действием неоднородных по направляющей оболочки осевых усилий $T = Mz_1/J$ (z_1 — расстояние от точек контура оболочки до горизонтальной оси AA; J — момент инерции площади поперечного сечения относительно оси AA). Оболочка имеет длину $L = 2800$ мм, толщину $h = 3{,}3$ мм, модуль упругости материала $E = 7 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$.

Рассмотрим овал с полуосями a и b (рис. 1), построенный из двух пар окружностей следующим образом. Проводим окружность радиуса a с центром O до пересечения с по-

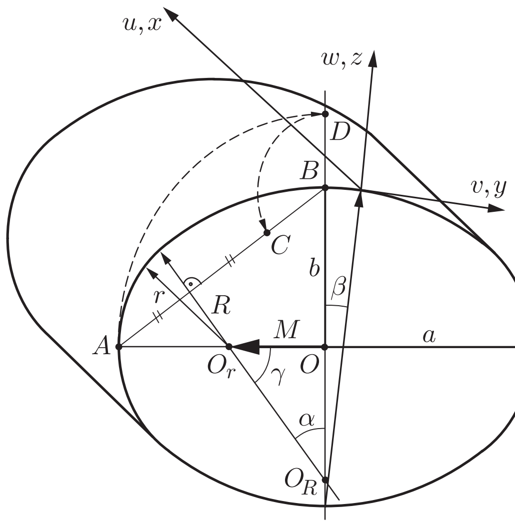

Рис. 1. Схема построения овала

луосью b. Затем проводим окружность радиуса $a - b$ до пересечения с прямой AB. Делим отрезок AC пополам, восстанавливаем к нему перпендикуляр. Проводим из центров O_r, O_R дуги окружностей малого r и большого R радиусов окружностей. Точка сопряжения дуг окружностей определяется углом α. Из условий построения овала получаем его геометрические характеристики

$$r = a\,\frac{1 + k^2 - \sqrt{1 + k^2}}{1 + k - \sqrt{1 + k^2}}, \qquad R = a\,\frac{1 - k(\sqrt{1 + k^2} - k)}{1 + k - \sqrt{1 + k^2}}, \qquad k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Периметр овала $P = 4(R\alpha + r\gamma)$, $\gamma = \pi/2 - \alpha$. Радиус окружности с таким же периметром (эквипериметрический радиус) $R_0 = P/(2\pi) = 1000$ мм.

Для численного исследования задачи использован разработанный в [1, 2] вариант вариационного метода конечных элементов в перемещениях. В этом варианте применяется построенный авторами данной работы эффективный четырехугольный элемент оболочки естественной кривизны, в аппроксимациях перемещений которого в явном виде выделены перемещения его как твердого тела. При этом линиями главных кривизн оболочка разбивается на m частей по образующей и на n частей по направляющей. Таким образом, оболочка представляется в виде набора $m \times n$ конечных элементов. Деформационные перемещения точек конечного элемента аппроксимируются полиномами. Задача сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых неизвестных элементов. Эта система решается шаговым методом по нагрузке с линеаризацией системы на каждом шаге по методу Ньютона — Канторовича. Линейная система решается методом Краута с разложением матрицы Гессе (матрицы вторых производных потенциальной энергии деформации оболочки) $H = LDL^{\text{т}}$ на диагональную и две треугольные матрицы. Контроль устойчивости оболочки осуществляется проверкой матрицы Гессе на положительную определенность по критерию Сильвестра, что сводится к проверке положительности элементов диагональной матрицы D. Появление отрицательных элементов соответствует потере устойчивости оболочки. После того как найдено значение параметра нагрузки, при котором равновесное состояние неустойчиво, отыскивается форма потери устойчивости оболочки из решения системы уравнений $H\boldsymbol{\delta} = 0$, где $\boldsymbol{\delta}$ — вектор бифуркационных узловых перемещений. Для этого определяется одна линейно зависимая (вырожденная) строка матрицы H, соответствующая первому отрицательному элементу матрицы D. Элементы этой строки и соответствующего столбца матрицы H полагают-

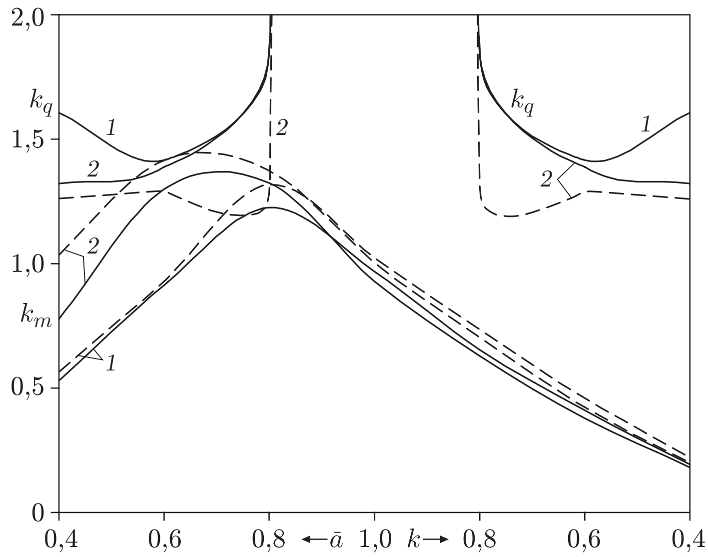

Рис. 2. Зависимости параметров k_m, k_q от параметра $\bar a$ в случае раздельного действия нагрузок:

1 — эквипериметрические овальные оболочки; *2* — эллиптические оболочки; штриховые линии — линейное исходное напряженно-деформированное состояние; сплошные — нелинейное

ся равными нулю. На место диагонального коэффициента заносится единица, а в правую часть системы — соответствующий столбец, умноженный на докритическое перемещение, соответствующее вырожденной строке. Из решения полученной таким образом системы и отыскивается форма потери устойчивости оболочки. В случае предельной точки форма потери несущей способности отыскивается из нелинейного исходного напряженно-деформированного состояния для нагрузки, близкой к предельной.

Сходимость решения по числу конечных элементов имеет вид (Δ — погрешность)

$$\begin{array}{lcccc} m\times n = & 5\times 120 & 10\times 120 & 20\times 120 & 30\times 120 \\ \Delta,\ \% = & 30 & 5 & 1 & 0{,}5 \end{array}$$

В расчете с учетом симметрии нагрузок рассматривалась 1/4 оболочки, при этом в разрезах удовлетворялись условия симметрии.

На рис. 2 показаны зависимости параметров $k_m = M_0^*/M_0$, $k_q = q/q_e$ от параметра $\bar a = a/b$ в случае раздельного действия нагрузок (q, M_0^* — критические значения внутреннего давления и изгибающего момента; $q_e = \bar q E\gamma^2$; $\bar q = (24{,}1k + 130{,}2k^3 + 276{,}3k^5)\lambda^{-2}\gamma^{0,6}$; $\lambda = L/R_0$; $\gamma = h/R_0$; $k = b/a \leqslant 1$; $M_0 = \pi E R_0 h^2/\sqrt{3(1-\nu^2)}$ — критическое значение изгибающего момента круговой цилиндрической оболочки радиусом R_0). Видно, что при действии внутреннего давления влияние нелинейности исходного напряженно-деформированного состояния эллиптических оболочек существенно в диапазонах $0{,}6 < \bar a < 0{,}8$ и $1{,}675 > \bar a > 1{,}25$. У овальных оболочек критические значения параметра k_q внутреннего давления существуют только в случае нелинейного исходного напряженно-деформированного состояния. Критические значения k_q овальных оболочек больше критических значений k_q эквипериметрических эллиптических оболочек. В диапазоне $0{,}8 < \bar a < 1{,}25$ как эллиптические, так и овальные оболочки вообще не теряют устойчивость при действии внутреннего давления.

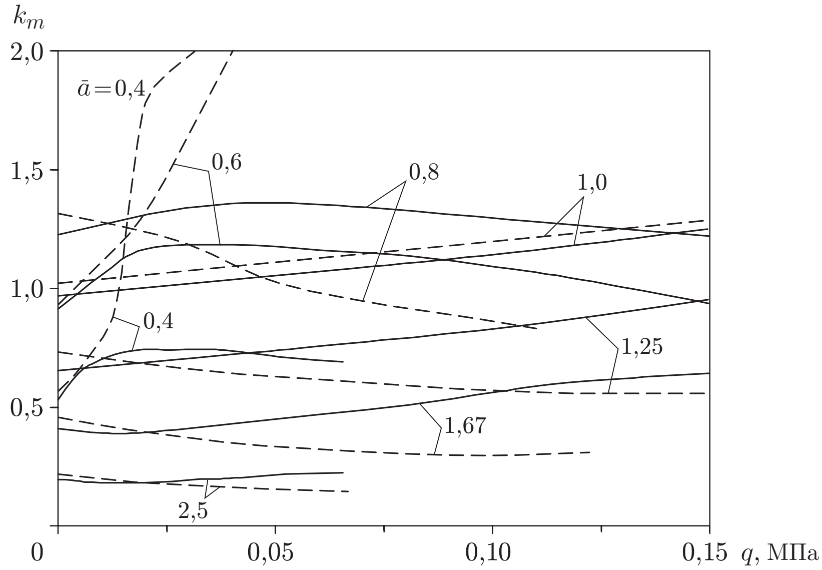

Рис. 3. Зависимости параметра k_m от внутреннего давления q для овальных оболочек

При действии изгибающего момента значительное влияние нелинейности наблюдается у эллиптических оболочек при $\bar{a} < 0{,}8$, у овальных — при $0{,}9 > \bar{a} > 0{,}7$. В диапазоне $\bar{a} < 0{,}8$ критические значения k_m овальных оболочек существенно меньше критических значений k_m эллиптических оболочек. В случае действия внутреннего давления нелинейность приводит к повышению критических нагрузок, а при действии изгибающего момента — к их снижению.

На рис. 3 показаны зависимости параметра $k_m = M_0^*/M_0$ от внутреннего давления q для овальных оболочек при различных значениях параметра $\bar{a}$ для случаев линейного и нелинейного (штриховые и сплошные кривые соответственно) докритических напряженно-деформированных состояний. Видно, что влияние нелинейности напряженно-деформированного состояния у овальных оболочек имеет сложный характер. В большинстве случаев кривые, полученные на основе линейного решения, лежат выше кривых, полученных из нелинейного решения. При больших значениях внутреннего давления ($q > 0{,}05$) овальные оболочки с $\bar{a} = 0{,}4$; $0{,}6$ не теряют устойчивости при линейном напряженно-деформированном состоянии. Кроме того, на рис. 3 видно, что с увеличением q критические значения параметра k_m увеличиваются при $\bar{a} > 1$. В этом случае внутреннее давление поддерживает оболочку. При $\bar{a} < 1$ большое внутреннее давление приводит к уменьшению критического момента. Такое расположение кривых характерно и для случаев эллиптических оболочек.

На рис. 4 показаны кривые зависимости $R_q(R_m)$ для овальных и эллиптических оболочек (сплошные и штриховые кривые соответственно) в случае нелинейного напряженно-деформированного состояния при различных значениях параметра оболочек $\bar{a}$ ($R_q = k_q/k_{q0} = q/q_0$; $R_m = k_m/k_{m0} = M^*/M_0^*$; $k_q = q/q_e$; $k_m = M_0^*/M_0$; k_{q0}, k_{m0} — критические значения параметров k_q, k_m; q_0, M_0^* — критические значения q и M при раздельном нагружении). Точки этих кривых соответствуют критическим значениям параметров внутреннего давления и изгибающего момента. Большинство кривых имеют по два характерных участка, соответствующих различному влиянию внутреннего давления на устойчивость оболочек. Эти участки разделяются вертикальной прямой $R_m = 1$, давление здесь нейтрально. При $R_m > 1$ давление стабилизирует оболочки, оказывая поддержи-

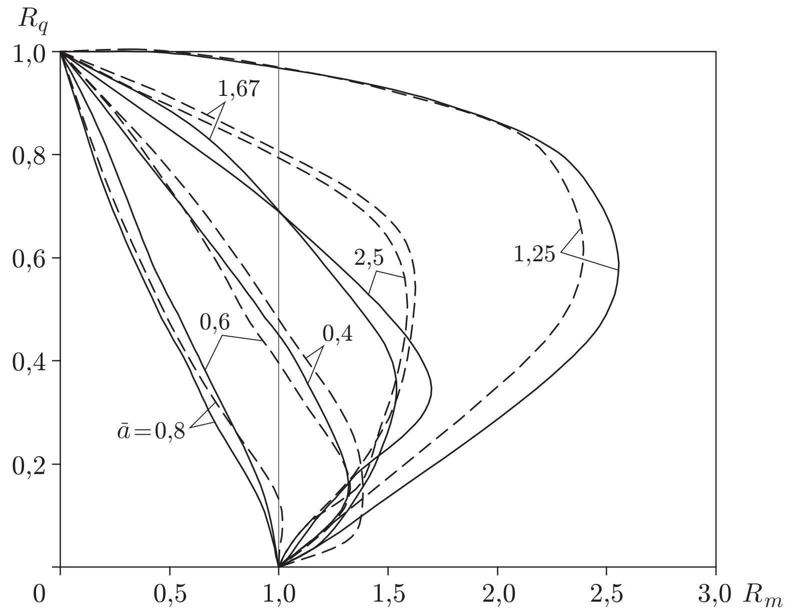

Рис. 4. Зависимости $R_q(R_m)$ для овальных (сплошные кривые) и эллиптических (штриховые кривые) оболочек

вающее действие, при $R_m < 1$ давление приводит к уменьшению значения критического момента.

На рис. 4 также видно, что при $\bar{a} < 1$ (вытянутые по вертикали оболочки) внутреннее давление в основном приводит к уменьшению значений критического изгибающего момента, а при $\bar{a} > 1$ (сплюснутые оболочки) — к их увеличению. Объяснить это можно расположением критических зон (мест потери устойчивости) при внутреннем давлении и изгибе моментом. При внутреннем давлении эти зоны расположены ближе к зонам оболочки большой кривизны, а при изгибе моментом — в зонах сжатия в верхней части оболочки. У вытянутых оболочек критические зоны от действия давления и изгиба перекрываются в большей степени, чем у сплюснутых. К тому же у сплюснутых оболочек зоны растяжения от действия внутреннего давления перекрываются зонами сжатия вследствие изгиба, стабилизируя оболочку.

Интересен обнаруженный факт неоднозначности влияния внутреннего давления на участках зависимостей $R_q(R_m)$ при $R_m > 1$. Зависимости $R_q(R_m)$ являются границами устойчивости и неустойчивости оболочек. Устойчивая оболочка при заданном значении $R_m > 1$ может потерять устойчивость как при понижении, так и при повышении внутреннего давления.

На рис. 5 представлены формы потери устойчивости оболочек при $q = 0{,}06$ МПа, $\bar{a} = 0{,}8$ (рис. 5,*а*) и $\bar{a} = 1{,}25$ (рис. 5,*б*). Форма потери устойчивости существенно зависит от отношения k_q/k_m. Вытянутые по вертикали оболочки теряют устойчивость в зоне сжатия с образованием нескольких наклонных складок, распространяющихся по всей длине оболочки, а сплюснутые оболочки теряют устойчивость, как при чистом изгибе, в зоне максимальных сжимающих продольных усилий. (Результаты получены при достаточной для сходимости решения сетке конечных элементов $m \times n = 30 \times 60$.)

Исследование прочности и устойчивости отсека фюзеляжа пассажирского самолета. В качестве примера рассмотрим подкрепленный стрингерами овальный отсек фюзеляжа пассажирского самолета. Отсек представляет собой оболочку, составленную из трех пар окружностей с радиусами, равными 1810, 1900, 2700 мм. Контур овала близок

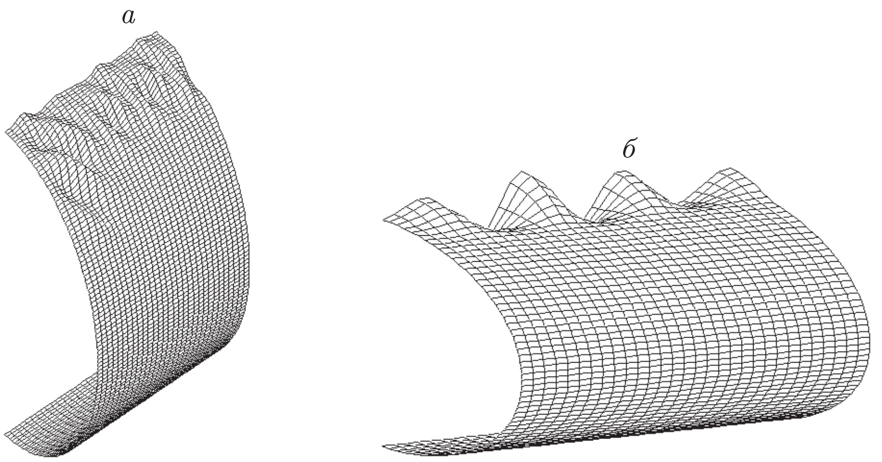

Рис. 5. Формы потери устойчивости вытянутых по вертикали (*а*) и сплюснутых (*б*) оболочек

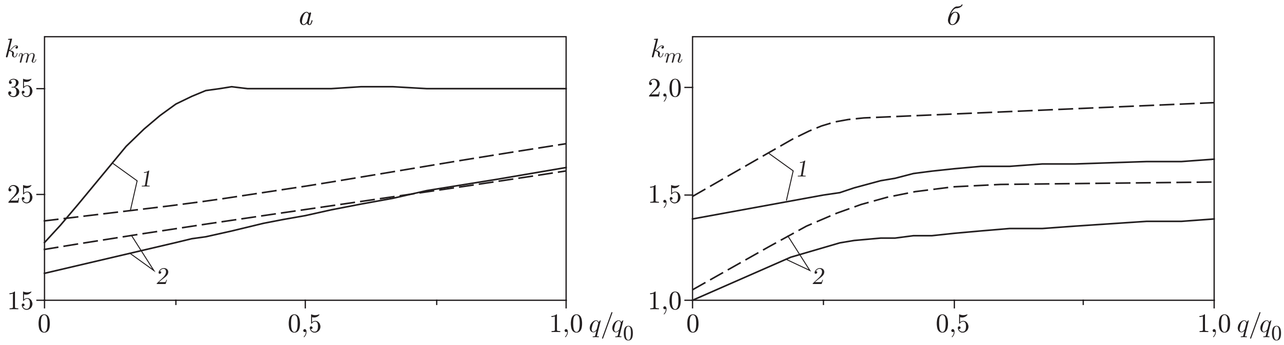

Рис. 6. Зависимости параметра k_m от параметра q/q_0:
а — $F_{\text{с}} > 0$; *б* — $F_{\text{с}} = 0$

к контуру эллипса с полуосями $a = 1900$ мм, $b = 2050$ мм. Отсек (далее оболочка) имеет длину $L = 500$ мм (шаг шпангоутов), толщину $h = 3{,}2$ мм, выполнен из материала с модулем упругости $E = 0{,}7 \cdot 10^4$ МПа, коэффициентом Пуассона $\nu = 0{,}3$. Площадь поперечного сечения стрингеров $F_{\text{с}} = 306$ мм^2, момент инерции $J_{\text{с}} = 41\,000$ мм^4, шаг стрингеров $d_{\text{с}} = 150$ мм, эксцентриситет (расстояние от центра тяжести поперечного сечения стрингера до срединной поверхности оболочки) $e_{\text{с}} = 10$ мм. Оболочка нагружена внутренним давлением q и изгибающим моментом M, действующим в вертикальной или горизонтальной плоскости, и трактуется как конструктивно-анизотропная [3].

На рис. 6 показаны зависимости параметра $k_m = M^*/M_0$ от параметра q/q_0 (M^* — критическое значение момента; $M_0 = 2 \cdot 10^9$ Н · см, $q_0 = 0{,}2$ МПа) для случаев подкрепленной ($F_{\text{с}} > 0$) и неподкрепленной ($F_{\text{с}} = 0$) оболочек для линейного и нелинейного докритических состояний (штриховые и сплошные кривые соответственно). Кривые *1* соответствуют действию изгибающего момента в вертикальной плоскости, кривые *2* — в горизонтальной. Видно, что критический момент, действующий в вертикальной плоскости подкрепленной оболочки, больше момента, действующего в горизонтальной плоскости. При малых значениях параметра q/q_0 у подкрепленной оболочки влияние нелинейности больше, чем у неподкрепленной. В случае действия изгибающего момента в вертикальной плоскости у подкрепленной оболочки нелинейность докритического состояния приводит к повышению критической нагрузки, а у неподкрепленной — к ее понижению. В случае дей-

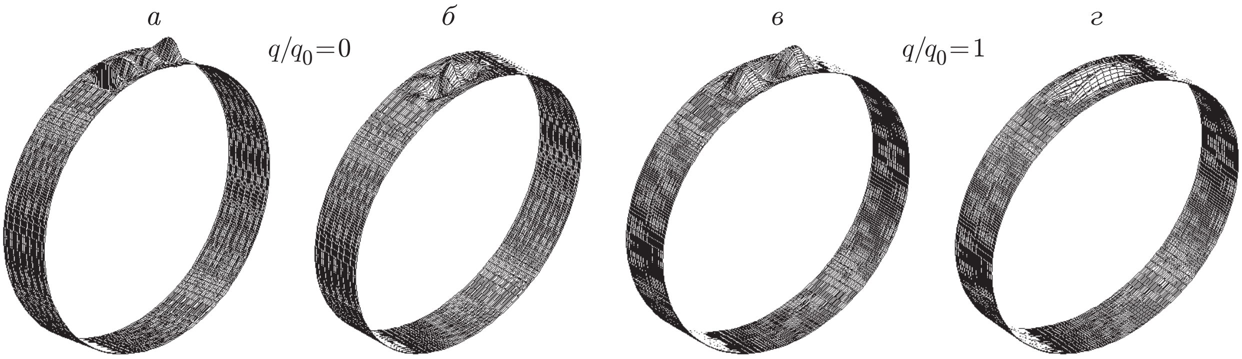

Рис. 7. Формы потери устойчивости при действии изгибающего момента в вертикальной плоскости подкрепленной (*а, в*) и неподкрепленной (*б, г*) оболочек

ствия изгибающего момента в горизонтальной плоскости влияние нелинейности больше для неподкрепленной оболочки.

На рис. 7 представлены формы потери устойчивости при действии изгибающего момента в вертикальной плоскости неподкрепленной и подкрепленной оболочек при значениях параметра $q/q_0 = 0$, 1. Видно, что оболочка теряет устойчивость в верхней части в зоне действия максимальных сжимающих нормальных усилий. Кроме того, форма потери устойчивости оболочки качественно меняется в зависимости от подкрепления и действия внутреннего давления. Так, подкрепленные оболочки при отсутствии внутреннего давления теряют устойчивость с образованием по дуге двух волн (рис. 7,*а*), при наличии внутреннего давления — с образованием одной волны (рис. 7,*в*). Неподкрепленные оболочки при отсутствии внутреннего давления теряют устойчивость с образованием в верхней части полуволны (рис. 7,*б*), при наличии внутреннего давления — с образованием двух полуволн (рис. 7,*г*).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Железнов Л. П., Кабанов В. В.** Конечный элемент и алгоритм исследования нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек // Прикладные проблемы механики тонкостенных конструкций. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 2000. С. 120–127.
2. **Железнов Л. П., Кабанов В. В.** Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внутреннем давлении // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 4. С. 155–160.
3. **Кабанов В. В.** Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение, 1982.

Поступила в редакцию 4/IV 2005 г.,
в окончательном варианте — 22/VI 2005 г.