

УДК 550.834 + 519.64

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА ВЫБОРА РЕФЕРЕНТНОГО СКОРОСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ СЕЙСМОТОМОГРАФИИ

О. Н. Белоусова<sup>1</sup>, С. М. Зеркаль<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт автоматизации и электрометрии СО РАН,  
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет,  
630008, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, 113*

*E-mail: onb@ngs.ru*

*zermal@ngs.ru*

Важным начальным этапом в сейсмотомографических исследованиях, использующих кинематические характеристики упругих волн, является оптимальный выбор референтного скоростного распределения, что соответствует основной известной составляющей функции скорости в условиях линеаризации. Приводится численный анализ особенностей определения параметров референтного скоростного распределения в зависимости от свойств используемой системы наблюдений.

*Ключевые слова:* вычислительная томография, обратная кинематическая задача, рефрагированные волны, функционал невязки, метод Ньютона, коэффициент преломления.

**Введение.** Кинематическая сейсмотомография является важным направлением в сейсмической томографии, отвечающим принципам классической (традиционной) вычислительной (компьютерной) томографии (ВТ), что её выделяет среди множества томографических модификаций, постоянно пополняющих нетрадиционную составляющую ВТ. Актуальность этого направления для геофизики определяется тем, что большинство сейсмических и сейсморазведочных исследований проводится с использованием кинематических характеристик сейсмических волн и представлений геометрической сейсмологии (по аналогии с геометрической оптикой) [1, 2]. Фундаментальную основу кинематической сейсмотомографии наряду с интегральным преобразованием Радона составляет обратная кинематическая задача (ОКЗ), которая представляет собой задачу интегральной геометрии, наполненную физическим смыслом и имеющую следующую математическую постановку:

В некоторой области пространства  $R^n$ ,  $n > 1$ , ограниченной заданной поверхностью, происходит волновой процесс, порождённый точечным источником колебаний, расположенным в точке  $x^0$ , и пусть известна функция  $\tau(x^0, x)$  для всевозможных  $x^0$  и  $x$ , принадлежащих поверхности, ограничивающей область. Требуется найти скорость передачи сигналов  $V(x)$  внутри данной области.

Эта постановка является математической идеализацией реальной физической ситуации, возникающей в сейсмоакустических исследованиях.

Основной математической моделью ОКЗ считается функционал Ферма, представляющий собой интегральное соотношение, связывающее скоростное распределение зондирующего сигнала в исследуемой среде, лучевую траекторию, соединяющую источник и приёмник этого сигнала, и время пробега соответствующей рефрагированной волны вдоль данного луча. Обратная кинематическая задача сейсмологии — одна из первых рассмотренных задач для дифференциальных уравнений с частными производными (уравнение эйконала):  $\nabla_x \tau(x^0, x)^2 = 1/V^2(x)$ , где  $\tau(x^0, x) = \int_{\Gamma(x^0, x)} dx/V(x)$  — время пробега сигнала

по лучу  $\Gamma(x^0, x)$ , соединяющему точки  $x^0$  и  $x$ .

До середины 60-х годов 20-го столетия научные исследования в области ОКЗ были направлены на случай одномерной скорости. Результат, полученный в [3] и относящийся к линеаризованной постановке в двумерном пространстве, стал началом систематического исследования многомерной обратной кинематической задачи. Однако рассматриваемые постановки ОКЗ оказались сильно некорректными, требующими для своего решения разработки специальных методов регуляризации, что, в свою очередь, выполнить математически сложно [4]. Проникновение метода вычислительной томографии в сейсмоку позволило рассмотреть трёхмерную ОКЗ в томографической постановке, отличающейся слабой математической некорректностью и снимающей переопределённость обратной задачи [5], и это дало возможность разработать эффективный алгоритм решения ОКЗ в линеаризованной постановке [5, 6]. Линеаризация скорости в данном случае выполнялась возле линейной функции глубины  $V_0$ , чьи постоянные обеспечивают её физический смысл. На практике  $V_0$  — референтное скоростное распределение, оптимальный выбор которого является ключевым моментом эффективности решения задачи. Преимущество такого выбора  $V_0$  состоит в том, что он соответствует росту скорости сейсмического сигнала с глубиной (ось  $z$  направлена вниз) часто по квазилинейному закону, и лучи  $\Gamma_0$  при этом суть дуги окружности, т. е. имеют аналитическое выражение.

Возрастание скорости сейсмического сигнала с глубиной характерно для Земли в целом и обусловлено уплотнением геологических пород в направлении от её поверхности. Квазилинейное скоростное распределение часто встречается в глубоких осадочных бассейнах (Западная Сибирь, Прикаспийская низменность и т. п.), где располагаются месторождения углеводородов. В этой связи наряду с геолого-геофизическими традиционными методами (разведки, исследования, доразведки и эксплуатационного мониторинга) перспективным является развитие и использование сейсмотомографии, преимущества которой (дистанционность, высокая разрешающая способность, компьютерная технологичность) предоставляют возможности повысить эффективность решения уже известных задач, а также рассмотреть новые, более сложные задачи.

Решение ОКЗ в линеаризованной постановке предполагает, что  $V_0$  известно, а определению подлежит разность  $V - V_0 = V_1$  — малая (математически) величина по отношению к  $V_0$ . Референтное скоростное распределение необходимо уметь выделять из общей функции скорости  $V(x)$ . Обычно при решении практических задач это делается исходя из априорной информации об исследуемой среде, что требует оптимизации.

В [1] предложен автоматизированный выбор констант функции  $V_0$  с учётом условий эксперимента. Но математическая сложность решаемой задачи, связанная с возможной неоднозначностью в определении искомых констант, может потребовать в ряде случаев дополнительных исследований, которые и приводятся в данной работе.

**Численное исследование определения оптимальных параметров референтного скоростного распределения в условиях кинематической сейсмотомографии.** В соответствии с алгоритмом, приведённым в [5], будем рассматривать решение ОКЗ при следующей геометрии измерений: источник и приёмник располагаются на окружности единичного радиуса с центром в начале декартовых координат пространства  $R^3$ ,  $\bar{x} \in R^3$ ,  $\bar{x} = (x, y, z)$ , ось  $z$  направлена вниз. Система лучей  $\Gamma_0$ , натянутых на данную окружность, образует сферическую поверхность, на которой ведётся поиск  $V_1$ .

Далее рассматриваются численные эксперименты определения показателя преломления для сред, где функция  $n_0(z) = 1/V_0$  ( $V_0 = A + Bz$ ,  $A$  и  $B$  — положительные постоянные) в отличие от традиционной математической постановки не известна, а известно некоторое её начальное приближение, найденное из априорной информации о среде. В таком случае приходится решать более общую задачу. Зная для данной исследуемой среды результаты решения прямой задачи, представляющей собой физические измерения, необ-

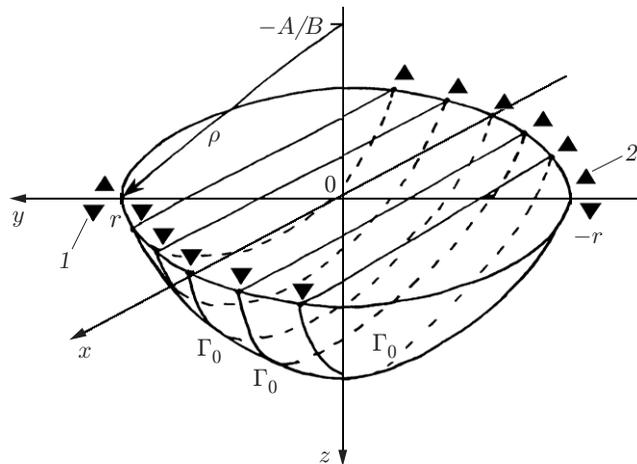


Рис. 1. Система наблюдений и поверхность, образованная лучами в случае линейной зависимости скорости рефрагированной волны от глубины (переменная  $z$ ) (1 — источники, 2 — приёмники сигнала)

ходимо аппроксимировать показатель преломления суммой  $n_0(z) + n_1(\bar{x})$ , причём, как было установлено, отношение  $n_1/n_0$  должно быть меньше 0,15.

Моделирование такой ситуации проводилось для среды, где

$$n(\bar{x}) = \sqrt{1 - z - 2 \cdot 10^{-4}(x + y) + 9 \cdot 10^{-2}|\bar{x}|^2}. \quad (1)$$

Использование в данном случае явной формулы для решения прямой кинематической задачи обеспечивает сравнительное быстродействие вычислений на ЭВМ [7].

Формула (1) не содержит деления на линейную  $n_0(z)$  и малую нелинейную  $n_1(\bar{x})$  составляющие, однако вследствие того что  $0 \leq z < z_{\max}$  ( $z_{\max}$  — максимальное заглубление луча, т. е. точка поворота, вычисляемая как  $\rho - A/B$  в соответствии с рис. 1, причём  $A = 1$ ,  $B = 0,5$ ,  $|x|, |y| \leq 1$ ), формулу (1) можно переписать в следующем виде:

$$n(\bar{x}) = \sqrt{1 + \varphi(\bar{x})}, \quad \varphi(\bar{x}) \ll 1, \quad (2)$$

где  $\varphi(\bar{x}) = -z - 2 \cdot 10^{-4}(x + y) + 9 \cdot 10^{-2}|\bar{x}|^2$ .

**Замечание.** Поскольку максимальное заглубление луча  $z_{\max}$  и база наблюдения (расстояние между источником и приёмником зондирующего сигнала) находятся в прямой зависимости, то разность первого и последнего слагаемых в формуле для  $\varphi(\bar{x})$  будет обеспечивать выполнение неравенства  $\varphi(\bar{x}) \ll 1$ , так как в данном случае  $z_{\max} = 0,2$ , а  $|\bar{x}|^2 = 2$ .

Далее

$$V(\bar{x}) = \frac{1}{n(\bar{x})} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi(\bar{x})}} \approx 1 - \frac{\varphi(\bar{x})}{2} = 1 + 0,5z + V_1(\bar{x}), \quad (3)$$

здесь  $V_1(\bar{x}) = -(x + y) \cdot 10^{-4} + 4,5 \cdot 10^{-2}|\bar{x}|^2$ .

Таким образом, за начальное приближение для  $n_0(z) = (A + Bz)^{-1}$  можно взять  $\hat{n}_0 = (1 + 0,5z)^{-1}$ , условие (2) обеспечивает относительную малость  $n_1(\bar{x})$ . Теперь, вычислив для выбранного  $\hat{n}_0(z)$  значения  $T_0$  (времени пробега сигнала вдоль луча от источника до приёмника в референтной среде), можно построить  $T_1 = T - T_0$ , где  $T$  — времена пробега сигнала в исследуемой среде, и произвести решение обратной кинематической задачи по

разработанному алгоритму. На рис. 2 приведены сечения плоскостью  $y = 0$  точной функции  $n_1 = n - n_0$  и восстановленной функции  $n_1$ . Уровень случайного распределённого по нормальному закону шума, набрасываемого на значения  $T_1$ , составлял 1 % от локального значения  $T_1$ , аналогичное зашумление присутствует во всех последующих экспериментах. Отклонение  $Q$  восстановленной функции  $n_{1в}$  от точной (истинной)  $n_{1и}$  определялось по формуле

$$Q = \sqrt{\sum_{i,j} [n_{1в}x_i, y_j, z^* - n_{1и}x_i, y_j, z^*]^2 / \sum_{i,j} n_{1и}^2(x_i, y_j, z^*)}$$

( $z^* = z^*(x_i, y_j)$ ,  $i$  и  $j$  — текущие параметры сетки, в узлах которой вычисляются значения  $n_{1в}$ ) и составило в данном случае 28 %. Ошибка восстановления достаточно высока, однако, как видно из графиков, по восстановленной функции можно судить о поведении исходной.

Попытаемся улучшить полученное решение обратной задачи. С этой целью зафиксируем параметр  $A = 1$  и, варьируя параметр  $B$ , исследуем поведение решения обратной задачи в окрестности выбранного начального приближения. На рис. 2,  $a$ — $c$  приведены результаты решения обратной задачи. Ошибка восстановления составляет 32, 24 и 17 %. В случае  $B = 0,45$  ошибка почти в 2 раза превышает ошибку при  $B = 0,66$ , заметна явная тенденция улучшения решения обратной задачи с ростом параметра  $B$  в пределах значений от 0,45 до 0,66.

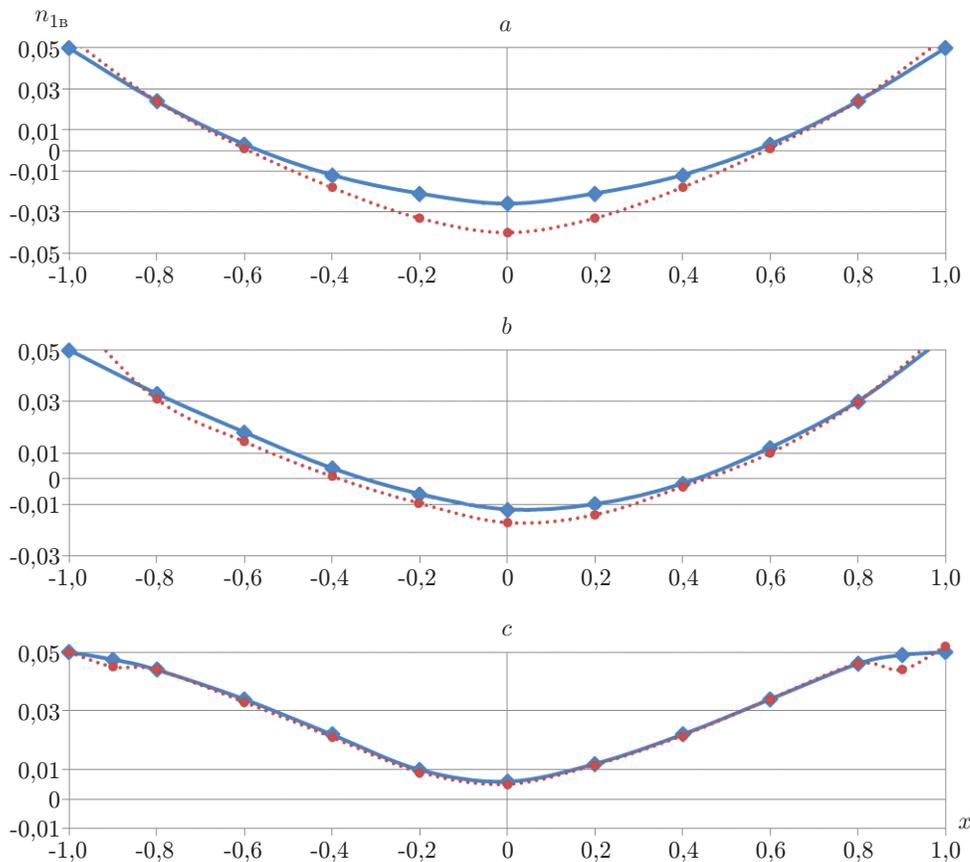


Рис. 2. Результаты решения ОКЗ при эмпирическом подборе констант  $A$  и  $B$ :  $a$  —  $n_0 = (1 + 0,45z)^{-1}$ ,  $b$  —  $n_0 = (1 + 0,555z)^{-1}$ ,  $c$  —  $n_0 = (1 + 0,66z)^{-1}$  (сплошные кривые — точное решение, пунктирные — результат численного решения ОКЗ)

Пусть в полупространстве  $z > 0$  показатель преломления выражается формулой (1). В точке с координатами  $(0, 0, z_s)$  находится источник сейсмических волн, система наблюдения представляет собой регулярную сетку на поверхности  $z = 0$ :  $\{x_i = x_0 + (i - 1)dx, y_j = y_0 + (j - 1)dy, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M\}$ . Исходя из ограничений, связанных с видом показателя преломления (1), будем считать, что система наблюдения лимитирована кубом  $\{0 < z < 1, |x| < 1, |y| < 1\}$ . В дальнейшем полагаем  $x, y$  малыми.

Найдём линейный профиль скорости звука как функцию глубины  $V(z) = A + Bz$ , минимизирующую среднеквадратичную невязку

$$F(A, B) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\tau_{ij} - \tau_{ij}(A, B))^2.$$

Здесь  $\tau_{ij}$  — время прихода рефрагированной волны от источника сейсмических волн в точку регистрации с координатами  $(x_i, y_j)$  для среды с показателем преломления (2);  $\tau_{ij}(A, B)$  — время распространения сигнала для среды с показателем преломления

$$n_0(z) = (A + Bz)^{-1}. \quad (4)$$

Для  $\tau_{ij}$  явные формулы в квадратурах разложены в работе [7].

Выражение для  $\tau_{ij}(A, B)$  имеет вид

$$\tau_{ij}(A, B) = \tau(\bar{x}_s, \bar{x}_r) = \frac{1}{B \left[ \operatorname{arcth} \left( \frac{r+2C}{2R} \right) + \operatorname{arcth} \left( \frac{r-2C}{2R} \right) \right]},$$

где  $r = \sqrt{(x_s - x_r)^2 + (y_s - y_r)^2}$ ;  $R = \sqrt{S^2 + C^2}$ ;  $C = (S + 0,5dz)/r$ ;  $S = A/B + z$ ;  $dz = z_r - z_s$ ;  $(x_s, y_s, z_s)$  и  $(x_r, y_r, z_r)$  — координаты источника и приёмника соответственно.

При малых значениях  $\{|x|, |y|, |z|\} \sim \varepsilon \ll 1$  имеет место следующее разложение коэффициента преломления (1):

$$n(\bar{x}) \sim \frac{1}{1 + 0,5z} V(\bar{x}), \quad V(\bar{x}) = \frac{10^{-4}(x + y) - 4,5 \cdot 10^{-2}|x|^2}{(1 + 0,5z)^2} \sim 10^{-4}.$$

Естественно предположить, что  $V(z) = 1 + 0,5z$  будет искомым минимизирующим профилем сейсмического сигнала. Но при возрастании  $z$  существенное значение имеют нелинейные члены, увеличивающие невязку  $n(\bar{x}) - n_0(z)$ . Для контроля качества приближения  $n(\bar{x})$  показателем преломления  $n_0(z)$  будем вычислять невязку на трёхмерной сетке, построенной посредством сдвига сетки системы наблюдений по глубине с фиксированным шагом по нескольким слоям  $z_k = z_0 + (k - 1)dz, k = 1, \dots, K$ :

$$P(A, B) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^K \left( \frac{1}{A + Bz} - n(\bar{x}_{ijk}) \right)^2, \quad \bar{x}_{ijk} = (x_i, y_j, z_k).$$

Расчёты проводились со следующими значениями параметров задачи для одного источника и для набора источников:  $dx = dy = 10^{-3}$ ,  $dz = 5 \cdot 10^{-2}$ ,  $N = M = 35$ ,  $z_0 = 0$ ,  $K = 10$ ,  $dz = z_s/K$ .

В случае одного источника при  $dx = dy = 10^{-3}$  задача нахождения глобального минимума функционала  $F(A, B)$  оказалась плохо обусловленной, изолинии функционала близки к прямым с наклоном  $A/B \sim 0,23$  (рис. 3).

Существует целый набор  $A, B$ , доставляющий достаточно малые значения функционалу  $F(A, B)$  (табл. 1). Минимум  $P(A, B) = 1,459$  достигается при  $A = 0,985$ ,  $B = 0,723$ .

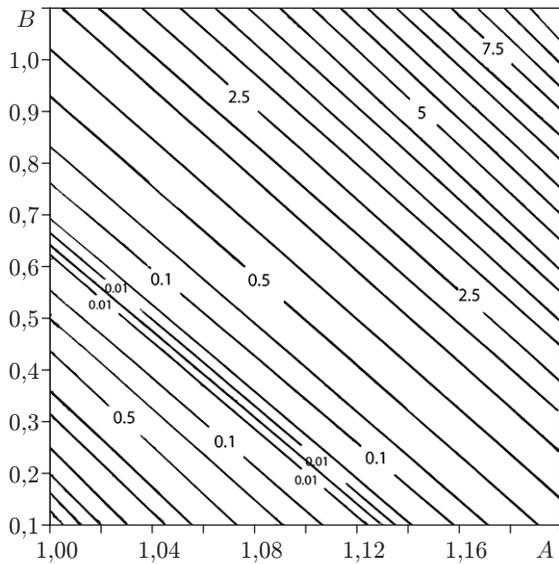


Рис. 3. Изолинии функционала  $F(A, B)$  для  $dx = dy = 10^{-3}$ ,  $z_s = 0,5$

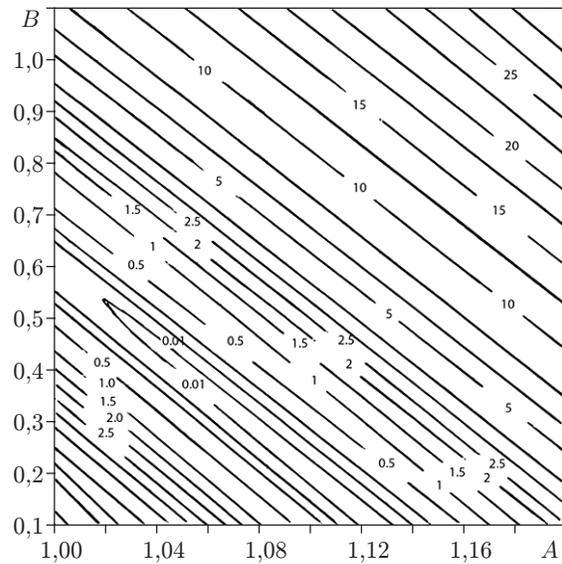


Рис. 4. Изолинии функционала  $F(A, B)$  для  $dx = dy = 5 \cdot 10^{-2}$ ,  $z_s = 0,5$

Таблица 1

Параметры минимизирующего функционала для  $dx = dy = 10^{-3}$ ,  $z_s = 0,5$

№ эксперимента	A	B	$F(A, B)$	$P(A, B)$	$\min(P(A, B))$
1	1,091	0,257	$0,274 \cdot 10^{-9}$	43,738	1,459
2	0,999	0,648	$0,10997 \cdot 10^{-8}$	2,517	1,459

Ситуация незначительно улучшается с увеличением шага сетки системы наблюдений, при  $dx = dy = 5 \cdot 10^{-2}$ ,  $z_s = 0,5$  изолинии  $F(A, B)$  имеют слабо выраженную эллиптическую структуру, позволяющую искать глобальный минимум (рис. 4). В данном случае минимум  $F(A, B) = 0,484 \cdot 10^{-3}$  фиксируется при  $A = 1,125$ ,  $B = 0,1073$ ,  $P(A, B) = 81,524$ . Минимум функционала  $P(A, B) = 4,874$  достигается при  $A = 0,9646$ ,  $B = 0,6626$ .

Таким образом, видно, что задача аппроксимации показателя преломления (1) показателем (4) посредством минимизации функционала  $F(A, B)$  для одного источника плохо обусловлена, решение либо не единственно, либо не удовлетворяет критерию малости функционала  $P(A, B)$ , характеризующего качество аппроксимации.

Более корректной задача становится при увеличении числа источников, расположенных на разной глубине.

Рассмотрим следующий набор источников, находящихся на одной вертикальной оси:  $\bar{r}_1 = (0, 0, 0,25)$ ,  $\bar{r}_2 = (0, 0, 0,4)$ ,  $\bar{r}_3 = (0, 0, 0,5)$ ,  $\bar{r}_4 = (0, 0, 0,6)$ ,  $\bar{r}_5 = (0, 0, 0,75)$ . Проведём три численных эксперимента: 1) для источников  $\bar{r}_1, \bar{r}_3$ ; 2) для источников  $\bar{r}_2, \bar{r}_3, \bar{r}_4$ ; 3) для источников  $\bar{r}_1, \bar{r}_3, \bar{r}_5$ . Соответствующие функционалы невязок времён прихода сигналов строятся как суммы функционалов  $F(A, B)$  для каждого источника, участвующего в эксперименте.

Картины изолиний для 1-го и 2-го экспериментов представлены на рис. 5, 6. В табл. 2 приведены результаты численных экспериментов;  $F_i$  — строка минимизации функционала невязок времён прихода  $i$ -го эксперимента,  $P_i$  — строка минимизации невязки показателя преломления.

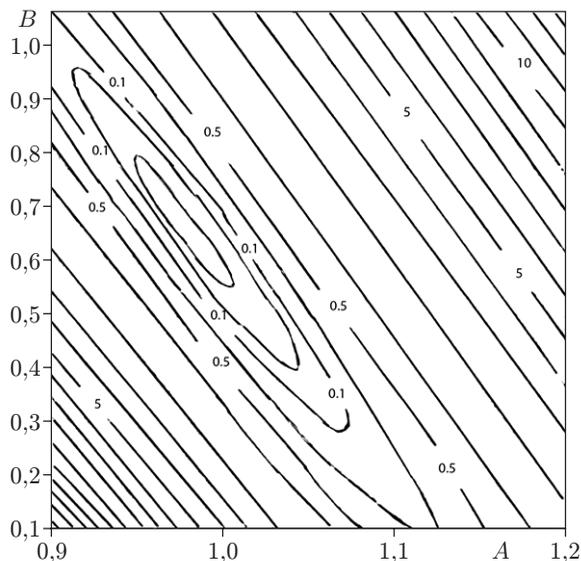


Рис. 5. Изолинии функционала  $F_1(A, B)$  для  $dx = dy = 10^{-3}$

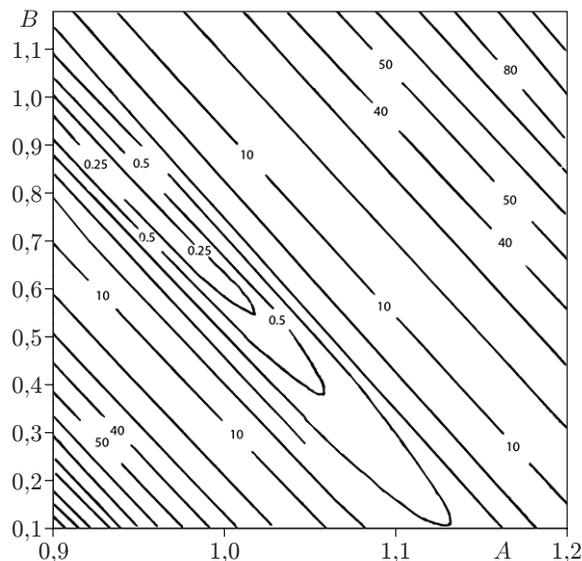


Рис. 6. Изолинии функционала  $F_2(A, B)$  для  $dx = dy = 5 \cdot 10^{-2}$

Таблица 2

**Результаты численных экспериментов с несколькими источниками**

$F, P$	$A$	$B$	$F$	$P$
$F_1$	0,979	0,738	$0,308 \cdot 10^{-5}$	1,579
$P_1$	0,985	0,723	$0,198 \cdot 10^{-4}$	1,459
$F_2$	0,956	0,777	0,1213	8,821
$P_2$	0,958	0,718	0,437	6,926
$F_3$	0,946	0,928	$0,2204 \cdot 10^{-3}$	12,963
$P_3$	0,963	0,905	1,215	11,853

Так как в эксперименте  $F_i$  главный вклад вносит самый заглублённый источник, то сетка по глубине в эксперименте  $P_i$  строится исходя из глубины этого источника. Минимизация функционалов осуществлялась методом Ньютона, начальное приближение выбиралось посредством сеточного перебора с уменьшением шага.

**Заключение.** Результаты тестовых расчётов показывают, что в случае нескольких источников есть качественное совпадение поведения минимумов функционалов  $F_i(A, B)$  и  $P_i(A, B)$ , что позволяет использовать коэффициент преломления  $n_0(z)$  как начальное приближение для восстановления  $n(\bar{x})$ . Качество восстановления ухудшается при увеличении глубины максимально заглублённого источника, когда возрастает влияние нелинейных членов в разложении  $\sqrt{1-z}$ , и при увеличении базы приёмников, когда возрастает влияние членов, зависящих от  $x, y$ .

Таким образом, при планировании и проведении сейсмоакустического зондирования Земли, океана, а в ряде случаев и атмосферы, применение томографического подхода в условиях линеаризации должно сопровождаться подготовительными исследованиями, направленными на оптимальное определение параметров референтного скоростного распределения в исследуемой среде. При этом необходимо рассматривать ситуацию нескольких разнозаглублённых источников.

Результаты данной работы могут быть обобщены и для оптической томографии, учитывающей рефракцию лучей в оптически плотных средах.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зеркаль С. М.** Томографическая диагностика скоростного распределения в сейсмических средах // Автометрия. 2008. **44**, № 1. С. 82–91.
2. **Гольдин С. В.** Обратные задачи лучевой сейсмической томографии // Геология и геофизика. 1997. **38**, № 5. С. 981–998.
3. **Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
4. **Воскобойников Ю. Е.** Оценивание оптимального параметра регуляризации итерационного вейвлет-алгоритма восстановления сигналов // Автометрия. 2013. **49**, № 2. С. 12–21.
5. **Зеркаль С. М.** Численное решение обратной трехмерной кинематической задачи сейсмоки в линеаризованной постановке // Геология и геофизика. 1988. № 11. С. 126–133.
6. **Зеркаль С. М.** Определение непрозрачных зон в Земле методом компьютерной томографии в кинематической постановке // ДАН СССР. 1991. **317**, № 1. С. 330–333.
7. **Лагунова К. Ф., Омельченко О. К.** Об одном способе определения близких землетрясений и явные формулы для луча и времени // Неклассические проблемы математической физики: Сб. науч. тр. /Под ред. М. М. Лаврентьева. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1981. С. 121–129.

*Поступила в редакцию 30 октября 2013 г.*

---