ПМТФ, № 2, 1973

УДК 533.9

О ВАРИАЦИОННОМ ПОДХОДЕ К РАСЧЕТУ ИНДУКЦИОННОГО ВЫСОКОЧАСТОТНОГО РАЗРЯДА

М. О. Розовский

(Москва)

Обсуждается противоречащий экспериментам результат, полученный в [1]. Показывается, что причина противоречия заключается в неприменимости принципа минимума производства энтропии к термодинамическим системам, находящимся в переменном электромагнитном поле. Для стационарных режимов высокочастотного разряда формулируется вариационная задача, эквивалентная исходной системе уравнений. Приведено решение этой задачи в приближении «каналовой модели» разряда без учета и с учетом потерь на излучение.

Индукционный высокочастотный разряд высокого давления описывается системой дифференциальных уравнений Максвелла и теплопроводности (см. например, [2]). В [2-4] эта система уравнений непосредственно интегрировалась при определенных предположениях относительно геометрии разряда и характера теплоотвода. В [1, 5] были предприняты попытки расчета стационарных режимов высокочастотного разряда по методике, основанной на вариационном принципе минимума мощности, по аналогии с «каналовой моделью» столба дугового разряда [6]. В [5], однако, отсутствуют математические подробности примененного метода. Из результатов же [1] следует вывод о невозможности существования высокочастотного разряда с тонким скин-слоем, что противоречит экспериментальным фактам. Последнее обстоятельство было отмечено в [7]. Обсуждение этого противоречия в [8], как видно из дальнейшего, вопроса не разрешает. Поэтому представляет интерес выяснить причину противоречия, содержащегося в [1], и обсудить возможности вариационного подхода к расчету стационарных режимов индукционного высокочастотного разряда.

1. В [1] при расчете «каналовой модели» высокочастотного разряда был использован вариационный принцип минимума мощности: мощность P, диссипируемая в стационарном разряде, минимальна

$$\delta P = 0 \tag{1.1}$$

Основанием для применения условия (1.1) к высокочастотному разряду послужила связь этого соотношения с термодинамическим принципом минимума производства энтропии, якобы установленная в [9] для дугового разряда. Вопрос о существовании такой связи рассматривался в [10], где было показано, что никакого общего принципа минимума мощности дугового разряда не существует, хотя в некоторых случаях применение вариационного условия (1.1) может быть оправдано. В частности, это условие может быть использовано для построения каналовой модели столба дугового разряда. Если теперь допустить справедливость принципа минимума производства энтропии для высокочастотного разряда, то, рассуждая аналогично [10], можно, казалось бы, прийти к выводу о правомерности основанного на условии (1.1) расчета каналовой модели для высокочастотного разряда. Однако при этом необходимо учитывать следующее обстоятельство. Важным исходным соотношением при расчете каналовой модели разряда является условие суммарного энергетического баланса в разряде

$$P = N \tag{1.2}$$

где N — мощность потерь, обусловленных теплопроводностью.

Если справедливо условие (1.1), то из (1.2) следует:

$$\delta N = 0 \tag{1.3}$$

Можно показать [1], что для единицы длины канала

$$N = 2\pi\theta_0 (\ln R/r_0)^{-1} \tag{1.4}$$

где $\theta(T)$ — взаимнооднозначная функция теплопроводности рабочего газа

$$\theta(T) = \int_0^T \lambda(\tau)\, d\tau, \qquad \theta_0 = \theta(T_0) \tag{1.5}$$

$\lambda(T)$ — теплопроводность, T_0 и r_0 — температура и радиус канала соответственно, R — радиус разрядной камеры

$$P = \pi I^2 n^2 r_0 F(\rho_0)(\sigma_0\delta_0)^{-1} \tag{1.6}$$

I — амплитуда тока в индукторе, n — число витков индуктора на единицу длины, $\sigma_0 = \sigma(\theta_0)$ — электропроводность, $\delta_0 = c\,(2\,\pi\sigma_0\omega)^{-1/2}$ — глубина скин-слоя, c — скорость света в вакууме, ω — круговая частота электромагнитного поля

$$F(\rho_0) = \sqrt{2}\,\frac{\operatorname{ber}(\rho_0)\operatorname{ber}'(\rho_0) + \operatorname{bei}(\rho_0)\operatorname{bei}'(\rho_0)}{\operatorname{ber}^2(\rho_0) + \operatorname{bei}^2(\rho_0)}$$

$$\rho_0 = \sqrt{2}\, r_0/\delta_0$$

Поскольку возможные значения r_0 и θ_0 должны удовлетворять (1.2), варьирование в (1.1) и в (1.3) должно производиться вдоль кривой $\theta_0(r_0)$, определяемой соотношением (1.2). Тогда из (1.4) следует, что для выполнения условия (1.3) небольшим отклонениям от истинного значения $\delta\theta_0 \gtrless 0$ должны соответствовать отклонения $\delta r_0 \lessgtr 0$. Это, однако, не всегда достижимо для мощности джоулевой диссипации, определяемой формулой (1.6). Действительно, при $\rho_0 \gg 1$ правая часть формулы (1.6) переходит в

$$P = \pi I^2 n^2 r_0 (\sigma_0\delta_0)^{-1} \sim r_0\sigma_0^{-1/2} \tag{1.7}$$

Отсюда следует, что для выполнения условия (1.1) при электропроводности $\sigma(\theta)$, всегда возрастающей с температурой, положительной вариации $\delta\theta$ должна соответствовать положительная же вариация δr_0 и наоборот, что противоречит (1.2) — (1.4). Именно это обстоятельство привело к противоречию в [1]. Поскольку условие (1.1), как показано в [10], вытекает из экстремальности производства энтропии, следует рассмотреть, в какой мере принцип минимума производства энтропии применим для описания высокочастотного разряда.

2. В неравновесной термодинамике [11] известен вариационный принцип минимума производства энтропии. Производство энтропии рассматривается как функционал, и ставится задача об отыскании экстремума этого функционала. При этом производство энтропии в стационарном состоянии некоторой термодинамической системы экстремально постольку, поскольку уравнениями Лагранжа — Эйлера для соответствующей вариационной задачи являются уравнения, полностью описывающие стационарный режим этой системы. В этом смысле принцип минимума производства энтропии

просто эквивалентен системе уравнений, описывающих стационарное состояние термодинамической системы. Если же в результате варьирования производства энтропии появляются уравнения, не полностью описывающие стационарный процесс (например, некоторые стационарные уравнения отсутствуют), то для таких термодинамических систем принцип минимума производства энтропии несправедлив.

В частности, в [9] показано, что при определенных предположениях для термодинамической системы, способной проводить электрический ток и находящейся в потенциальном электрическом поле (например, для дуги постоянного тока), в результате решения вариационной задачи об экстремуме производства энтропии возникают уравнение энергии Эленбааса — Геллера и стационарное уравнение сохранения заряда. Эти уравнения в совокупности с законом Ома, заложенным в термодинамику необратимых процессов в качестве феноменологического уравнения, полностью описывают как электродинамику, так и теплообмен стационарного состояния столба дуги постоянного тока. Поэтому для дугового разряда при некоторых условиях оказывается возможной вариационная трактовка стационарного режима, основанная на принципе минимума производства энтропии.

Легко показать, что при нахождении экстремума производства энтропии для термодинамической системы в переменном электромагнитном поле возникают те же уравнения, что и для дуги постоянного тока, и не появляется система уравнений Максвелла для сплошной среды, описывающая взаимодействие переменного электромагнитного поля с термодинамической системой. Поэтому для высокочастотного разряда принцип минимума производства энтропии несправедлив.

Теперь становится ясен смысл противоречия, возникающего в [1]. Грубо говоря, мощность диссипации определяется главным образом электродинамикой разряда, которая не вытекает из условия экстремума производства энтропии.

3. Для корректного вариационного описания стационарного высокочастотного разряда нужно построить некоторый функционал, из условия экстремальности которого следовали бы уравнения, полностью описывающие стационарный режим разряда. Поскольку не удается построить функционал, экстремальность которого была бы эквивалентна полной системе уравнений Максвелла и теплопроводности, нужно отделить электродинамическую часть задачи от энергетической. Тогда вариационный подход к проблеме оказывается возможным.

Рассмотрим функционал

$$V[\theta] = \int_0^R \left[\left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 - |E^*(r)|^2 \int_0^{\theta(r)} \sigma(\theta)\, d\theta \right] r\,dr \tag{3.1}$$

и пусть $E^*(r)$ — истинное (неварьируемое) распределение комплексной амплитуды напряженности электрического поля, которое устанавливается в стационарном режиме высокочастотного разряда. Будем искать экстремум этого функционала

$$\delta V = 0 \tag{3.2}$$

Условие (3.2) эквивалентно уравнению Лагранжа — Эйлера

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta}{dr} \right) + \frac{1}{2} \sigma(\theta) |E^*(r)|^2 = 0 \tag{3.3}$$

с граничными условиями

$$\frac{d\theta}{dr} \delta\theta = 0 \tag{3.4}$$

при $r = 0,\ r = R$.

Уравнение (3.3) представляет собой уравнение энергетического баланса для стационарного цилиндрического высокочастотного разряда высокого давления при условии, что теплоотвод осуществляется лишь радиальной теплопроводностью. Граничные условия (3.4) тоже соответствуют рассматриваемому случаю при условии, что стенки разрядной камеры поддерживаются при постоянной температуре, которую без ограничения общности можно положить равной нулю.

Итак, поскольку экстремум функционала (3.1) при фиксированном распределении $E^*(r)$ осуществляет истинное стационарное распределение температуры, оно может быть найдено прямыми методами вариационного исчисления непосредственно из (3.2).

Покажем, как применить предложенный вариационный принцип для описания каналовой модели высокочастотного разряда.

В каналовой модели разряда рассматриваются радиальные распределения температуры и электропроводности вида

$$\theta(r) = \begin{cases} \theta_0, & 0 < r < r_0 \\ \theta_0 (\ln R/r)(\ln R/r_0)^{-1}, & r_0 < r < R \end{cases}$$

$$\sigma(r) = \begin{cases} \sigma_0, & 0 < r < r_0 \\ 0, & r_0 < r < R \end{cases} \tag{3.5}$$

Распределения (3.5) соответствуют наличию цилиндрического электропроводящего канала радиуса r_0 с постоянной температурой θ_0, окруженного кольцевой зоной ($r_0 < r < R$), которая осуществляет теплоотвод из канала.

Подставив (3.5) в (3.1), получим

$$V(r_0, \theta_0) = \theta_0^2 (\ln R/r_0)^{-1} - \left(\int_0^{\theta_0} \sigma(\theta)\, d\theta\right)\left(\int_0^{r_0} |E^*(r)|^2\, r dr\right) \tag{3.6}$$

Таким образом, в приближении каналовой модели точный функционал $V[\theta]$ представлен в виде функции двух переменных — r_0 и θ_0. Условие (3.2) теперь равносильно тому, что

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \theta_0}\right|_{\substack{\theta_0=\theta_0^* \\ r_0=r_0^*}} = 0, \qquad \left.\frac{\partial V}{\partial r_0}\right|_{\substack{r_0=r_0^* \\ \theta_0=\theta_0^*}} = 0 \tag{3.7}$$

где θ_0^* и r_0^* — истинные каналовые параметры разряда, которые подлежат определению из (3.7). Заметим, что при указанном способе варьирования не требуется, чтобы варьируемые параметры θ_0 и r_0 были связаны друг с другом условием (1.2), что явилось непосредственной причиной противоречия в [1].

Из (3.6), (3.7) следует:

$$2\theta_0^* (\ln R/r_0^*)^{-1} - \sigma_0^* \int_0^{r_0^*} |E^*(r)|^2\, r dr = 0 \tag{3.8}$$

$$\theta_0^{*2} (r_0^* \ln^2 R/r_0^*)^{-1} - r_0^* \, |E^*(r_0^*)|^2 \int_0^{\theta_0^*} \sigma(\theta)\, d\theta = 0 \tag{3.9}$$

Если учесть, что

$$P = \int_0^{r_0^*} \sigma_0^* \frac{|E^*(r)|^2}{2}\, 2\pi r dr \tag{3.10}$$

то с помощью (1.4) соотношению (3.8) можно придать наглядную физическую интерпретацию — это условие интегрального баланса энергии разряда, аналогичное (1.2).

Соотношение (3.9) с помощью (3.8) и (3.10) может быть приведено к виду

$$\int\limits_0^{\theta_0^*} \sigma(\theta)\, d\theta = \frac{P^2}{4\pi^2 r_0^{*2} |E^*(r_0^*)|^2} \tag{3.11}$$

Для случая тонкого скин-слоя ($r_0^* \gg \delta_0^*$), для которого наиболее точно выполняются условия справедливости каналовой модели (в зоне разряда отсутствует объемное энерговыделение) квадрат напряженности электрического поля на границе канала дается формулой (см., например, [12]).

$$|E^*(r_0^*)|^2 = 2I^2 n^2 (\sigma_0^* \delta_0^*)^{-2} \tag{3.12}$$

Тогда, подставляя (1.7) и (3.12) в (3.11), получим

$$\int\limits_0^{\theta_0^*} \sigma(\theta)\, d\theta = {}^1/_2 \left(\frac{In}{2}\right)^2 \tag{3.13}$$

Соотношение (3.13) определяет температуру канала θ_0^* в зависимости от числа ампер-витков индуктора при известной функции $\sigma(\theta)$ и с точностью до множителя, равного двум, совпадает с точным интегралом, полученным в [3]. Если электропроводность зависит от температуры по больцмановскому закону $\sigma \sim \exp(-A / 2kT)$ и $A \gg 2kT$ (A — потенциал ионизации рабочего газа, k — постоянная Больцмана), то интеграл в (3.13) может быть приближенно вычислен (см. [13]). В результате решение, полученное вариационным методом, с логарифмической точностью совпадает с результатами работ [3,4], которые основаны на непосредственном интегрировании уравнений, описывающих стационарный режим разряда.

4. Описанный выше метод позволяет учесть влияние выхода излучения на параметры высокочастотного разряда. В приближении объемного излучения уравнение баланса энергии для стационарного режима высокочастотного разряда имеет вид [2]

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\theta}{dr}\right) + \frac{\sigma(\theta)\,|E^*(r)|^2}{2} - \Phi(\theta) = 0 \tag{4.1}$$

где $\Phi(\theta)$ — объемная плотность мощности потерь на излучение.

Легко проверить, что уравнение (4.1) представляет собой уравнение Лагранжа — Эйлера для вариационной задачи на экстремум функционала

$$U[\theta] = \int\limits_0^R \left[\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 - |E^*(r)|^2 \int\limits_0^{\theta(r)} \sigma(\theta)\, d\theta + 2\int\limits_0^{\theta(r)} \Phi(\theta)\, d\theta\right] r\, dr \tag{4.2}$$

где $E^*(r)$ по-прежнему не варьируется.

В силу резкой температурной зависимости $\Phi(\theta)$ выход излучения в основном происходит из канала. Поэтому естественно предположить, что

$$\Phi(\theta) = \begin{cases} \Phi(\theta_0) \equiv \Phi_0, & 0 < r < r_0 \\ 0, & r_0 < r < R \end{cases} \tag{4.3}$$

Воспользовавшись приближением (4.3) и применив процедуру, описанную в п.3, получим

$$U[r_0, \theta_0] = \theta_0^2 (\ln R/r_0)^{-1} - \left(\int\limits_0^{\theta_0} \sigma(\theta)\, d\theta\right)\left(\int\limits_0^{r_0} |E^*(r)|^2 r\, dr\right) + r_0^2 \int\limits_0^{\theta_0} \Phi(\theta)\, d\theta \tag{4.4}$$