

К ПОСТРОЕНИЮ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОГО РЕЖИМА
ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

B. N. Nikolaevskiy

(Moskva)

Основные физические принципы теории движения жидкости в сжимаемых пластах впервые были сформулированы в качественном виде И. Н. Стрижковым [1]. И. Н. Стрижков указал на характерные черты процесса отбора жидкости из пласта, сдавленного горным давлением,— уменьшение пористости и проницаемости, частичная необратимость деформаций скелета среды.

В течение ряда лет большое число исследователей занимались проблемой построения такой гидродинамической теории движения жидкости в сжимаемых пластах, в которой с позиций механики сплошной среды были бы отражены указанные И. Н. Стрижковым факторы. Вначале была создана теория упругого режима фильтрации [2], которая учитывала зависимость пористости среды от давления в жидкости. Согласно этой теории для давления в потоке фильтрующейся жидкости выписывалось уравнение, аналогичное обычному уравнению теплопроводности. Затем рассмотрение эффекта необратимости деформаций скелета среды привело к построению теории упруго-пластического режима фильтрации [3].

Л. С. Лейбензон [4] обратил внимание на тот факт, что необходимо учитывать зависимость проницаемости пласта от давления, однако из-за отсутствия необходимых экспериментальных данных этой зависимостью при построении теорий упругого и упруго-пластического режимов пренебрегали [3, 5].

В. А. Флорин [6] при разработке теории консолидации грунтовой массы выписал уравнение, в котором проницаемость грунта рассматривалась как функция его пористости. Пористость, в свою очередь, изменялась под действием приложенной к грунту нагрузки. В последующих своих работах В. А. Флорин считал возможным пренебречь изменениями проницаемости; при этом его теория стала согласовываться с теорией упругого режима фильтрации [2, 7]. Изменения проницаемости грунта учитывались также в общих уравнениях консолидации грунтовой массы, приведенных в книге Н. М. Герсеванова и Д. Е. Польшина [8].

В последние годы было опубликовано несколько экспериментальных работ [9–13], в которых изучалось влияние величины внешнего давления на проницаемость осадочных горных пород. В связи с этим А. Е. Шайдеггер одну из своих статей [14] посвятил вопросу о правильной интерпретации получаемых путем лабораторных исследований зависимостей проницаемости образцов пород от внешней нагрузки.

Давно известны опытные данные, показывающие, что вязкости реальных капельных жидкостей и газов зависят от давления [15, 16]. Более того, на ряде примеров [17] была выявлена необходимость учета изменений вязкости и коэффициента сжимаемости реального газа при фильтрации его в пласте.

Так как теория упругого режима фильтрации положена в основу существующей методики разработки нефтяных и газовых месторождений, изучение эффекта изменений параметров среды и жидкости при изменениях давления в потоке имеет важное практическое значение.

Первоначально было предложено считать, что параметры пласта и жидкости — линейные функции давления, и был разработан соответствующий вариант описания упругого режима фильтрации [18]. Однако можно также предположить, что при малых изменениях давления указанные параметры — линейные функции давления, а при больших — связаны с давлением экспоненциальной зависимостью. Такое предположение является не только более общим, но и более удобным для расчетов. При этом оказывается, что давление в пласте удовлетворяет нелинейному параболическому уравнению.

В работе выводится это уравнение, показывается, что в случае фильтрации капельной жидкости оно может быть сведено к известному нелинейному уравнению политропической фильтрации идеального газа, выписываются основные уравнения фильтрации реального газа, а также смеси взаимонерасторимых жидкостей при упругом режиме. Изучается установившееся течение газированной жидкости в сжимаемом пласте.

Упруго-пластические явления играют существенную роль при фильтрации жидкости в горных породах, но в работе, ради простоты, они не рассматриваются. Поэтому полученные здесь результаты справедливы для таких процессов, когда или давление в фильтрующейся жидкости меняется монотонно во времени, или необратимостью деформаций скелета пористой среды можно пренебречь.

Автор весьма благодарен В. М. Егоровой за проведение вычислений и Н. В. Волженской за помощь при оформлении работы.

§ 1. Движение жидкости в пористой среде, слагающей пласты горных пород, описывается системой уравнений

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0, \quad u_i = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad \rho = \rho(p) \quad (1.1)$$

Здесь p — давление в жидкости, u_i — скорость фильтрации, ρ — плотность жидкости, μ — ее вязкость, m — пористость среды. Ограничимся изучением плоских течений, осредненных по мощности пласта h . Так как пористая среда большинства естественных пластов трансверсально (осесимметрично) изотропна, причем ось симметрии направлена по нормали к плоскости пласта, то проницаемость k вдоль любой i -й оси в этой плоскости одна и та же. (Если вблизи от рассматриваемой области пласта есть тектонические нарушения, то предположение об осесимметричной изотропии не будет оправдано.)

Первое из уравнений (1.1) представляет собой уравнение непрерывности, второе — закон Дарси. Процесс движения жидкости в пористой среде предполагается изотермическим (из-за наличия большого числа теплоотводящих поверхностей); поэтому система (1.1) замкнута, если только m , k , μ — постоянные величины.

Если же пористая среда сжимаема и находится под действием внешней нагрузки, то $m = m(p, \sigma_{ij})$, $k = k(p, \sigma_{ij})$, где σ_{ij} — компоненты тензора истинных напряжений в скелете среды.

Обычно роль внешней нагрузки играет горное давление, представляющее тензором суммарных напряжений T_{ij} . Суммарные напряжения распределяются между жидкостью и скелетом среды следующим образом:

$$T_{ij} = p + \sigma_{ij}^f, \quad \sigma_{ij}^f = (1 - m) \sigma_{ij} - (1 - m) p \delta_{ij} \quad (1.2)$$

Здесь σ_{ij}^f — тензор фиктивных напряжений в скелете среды [3], δ_{ij} — единичный тензор.

Если компоненты тензора суммарных напряжений T_{ij} постоянные величины, то в силу соотношений (1.2) изменения давления в жидкости влечут за собой равные, но противоположные по закону изменения фиктивных напряжений [3]

$$d\sigma_{ij}^f = -\delta_{ij} dp \quad (1.3)$$

При этом фиктивные напряжения будут функциями давления в жидкости, т. е.

$$m = m(p, \sigma_{ij}^f(p)) = m(p), \quad k = k(p, \sigma_{ij}^f(p)) = k(p) \quad (1.4)$$

В работе [18] было принято, что между относительным изменением проницаемости среды и изменением давления при постоянной внешней нагрузке реализуется линейная связь

$$\frac{dk}{k(p_0)} = a_k dp \quad (1.5)$$

Здесь p_0 — некоторое фиксированное значение давления. В статье относительное изменение проницаемости определяется как отношение приращения проницаемости к текущему значению проницаемости, т. е.

вместо соотношения (1.5) принимается в качестве исходного соотношение

$$\frac{dk}{k(p)} = a_k dp, \quad a_k = \frac{1}{k(p)} \frac{dk}{dp} = \text{const} \quad (1.6)$$

Отсюда следует, что проницаемость пласта связана с давлением в жидкости экспоненциальной зависимостью, т. е.

$$k(p) = k_0 \exp [a_k (p - p_0)], \quad k_0 = k(p_0) \quad (1.7)$$

Аналогичные соотношения принимаются и для других параметров среды и жидкости — для пористости $m(p)$, плотности $\rho(p)$ и вязкости $\mu(p)$ реальных капельных жидкостей

$$\begin{aligned} m &= m_0 e^{a_m(p-p_0)}, & \rho &= \rho_0 e^{a_\rho(p-p_0)}, & \mu &= \mu_0 e^{a_\mu(p-p_0)} \\ a_m &= \frac{1}{m(p)} \frac{dm}{dp}, & a_\rho &= \frac{1}{\rho(p)} \frac{d\rho}{dp}, & a_\mu &= \frac{1}{\mu(p)} \frac{d\mu}{dp} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Соотношения (1.7) — (1.8), где a_k, a_m, a_ρ, a_μ — постоянные величины, хорошо подтверждаются экспериментальными данными [9—13, 15, 16].

В случае фильтрации реальных газов уравнение состояния записывается в виде

$$\rho = \frac{P}{RTz(p)}, \quad RT = \text{const} \quad (1.9)$$

где $z(p)$ — коэффициент сжимаемости. Для вязкости η газа и параметра z также на значительных участках изменений давления справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0 \exp [a_\eta(p - p_0)], & z &= z_0 \exp [a_z(p - p_0)] \\ a_\eta &= \frac{1}{\eta(p)} \frac{d\eta}{dp}, & a_z &= \frac{1}{z(p)} \frac{dz}{dp} \end{aligned} \quad (1.10)$$

§ 2. Система уравнений (1.1) в случае плоского потока сводится к уравнению

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{k\rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \quad (2.1)$$

где $i = 1, 2$ — номер осей, расположенных в плоскости пласта; суммирование производится по индексу i .

Рассмотрим сначала движение малосжимаемой жидкости при упругих деформациях пористой среды пласта.

В этом случае уравнение (2.1) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp [\beta(p - p_0)] = \frac{k_0}{\mu_0 m_0} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\exp [\alpha(p - p_0)] \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \quad (2.2)$$

где p_0 — начальное (при $t = 0$) пластовое давление; k_0, m_0, μ_0 — параметры, определенные при этом давлении

$$\alpha = a_k + a_\rho - a_\mu, \quad \beta = a_m + a_\rho$$

Уравнение можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = D^2 \frac{\partial^2 \Phi^\gamma}{\partial x_i \partial x_i} \quad (\Phi = \exp [\beta(p - p_0)], \quad \gamma = \frac{\alpha}{\beta}, \quad D^2 = \frac{k_0}{\mu_0 m_0 \alpha}) \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) будет нелинейным параболическим уравнением. При значении $\gamma = 1$ уравнение (2.3) переходит в обычное уравнение теплопроводности. Этот частный случай изучался В. А. Флориным [8], а также в теории фильтрации «сверхсжимаемой» жидкости [19]. В общем слу-

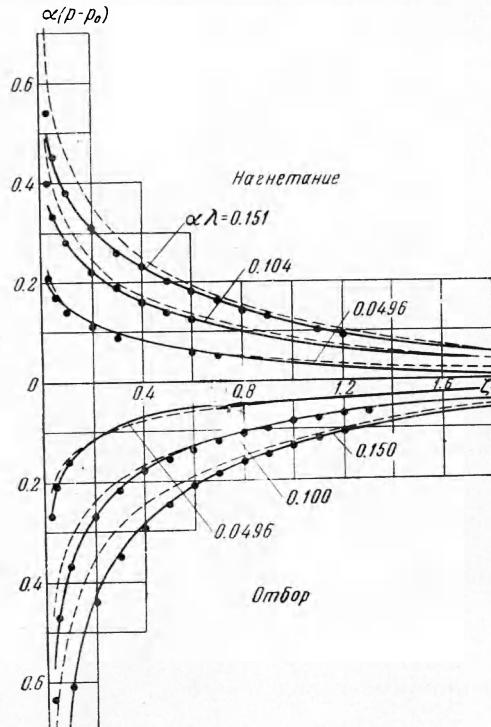
чае при $\gamma \neq 1$ уравнение (2.3) тождественно уравнению политропической фильтрации идеального газа, если рассматривать φ как давление в газе. Поэтому для построения решений, представляющих практический интерес, можно воспользоваться исследованиями Л. С. Лейбензона [4] и других авторов. В частности, для случая движения жидкости в сжимаемых пластах можно пересчитать автомодельные решения уравнения (2.3), изученные Г. И. Баренблаттом.

Приведем здесь решение наиболее интересной задачи — задачи об осесимметричном течении жидкости при следующих начальных и граничных условиях:

$$p(r, t=0) = p_0, \quad p(r=\infty, t) = p_0 \quad (2.4)$$

$$\left[r e^{\alpha(p-p_0)} \frac{\partial p}{\partial r} \right]_{r=r_c} \approx \left[r e^{\alpha(p-p_0)} \frac{\partial p}{\partial r} \right]_{r \rightarrow 0} = - \frac{G \mu_0}{2 \pi k_0 h \rho_0} = - \lambda \quad (2.5)$$

где G — массовый дебит скважины, r_c — ее радиус. При этом уравнение (2.3) примет вид



Фиг. 1

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial r} \quad (2.6)$$

Условия (2.4) и (2.5) сводятся к следующим: (2.7)

$$\varphi(\infty, t) = 1, \quad \varphi(r, 0) = 1$$

$$r \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial r} = - \alpha \lambda \quad \text{при } r \rightarrow 0$$

Решение уравнения (2.6) при условиях (2.7) будет автомодельным — подстановка Больцмана

$$\zeta = \frac{r}{D \sqrt{t}} \quad (2.8)$$

сводит задачу к решению обыкновенного дифференциального уравнения: (2.9)

$$\frac{d^2 \varphi^\gamma}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d\varphi^\gamma}{d\zeta} = - \frac{\zeta}{2} \frac{d\varphi}{d\zeta}$$

при условиях

$$\varphi(\zeta) = 1 \quad \text{при } \zeta \rightarrow \infty \quad (2.10)$$

$$\zeta \frac{d\varphi^\gamma}{d\zeta} = - \alpha \lambda \quad \text{при } \zeta \rightarrow 0$$

Значения $\lambda > 0$ соответствуют при $d > 0$ нагнетанию жидкости в пласт, $\lambda < 0$ — отбору жидкости из пласта. В работе [20] приведены интегральные кривые уравнения (2.9), соответствующие случаю $\gamma = 2$ и условиям (2.10). Воспользовавшись этими данными, можно построить (фиг. 1, сплошные линии) графики зависимости величины $\alpha(p_0 - p)$ от переменной. Сопоставление с этими графиками решения этой же задачи в рамках существующей линейной ($\alpha = 0$) теории упругого режима фильтрации капельной жидкости [2], изображенного на фиг. 1 пунктирными линиями и рассчитанного по формуле

$$2\beta(p_0 - p) = \lambda \beta Ei[-r^2 / (4\alpha t)] \quad (2.11)$$

показывает, что чем больше значение $|\alpha \lambda|$, тем существеннее условие $\alpha \neq 0$.

Заметим, что при проведении расчетов были использованы соотношения

$$\alpha = 2\beta, \quad r / (2V\bar{x}t) = \zeta / 2V2, \quad \chi = k_0 / (\mu_0 m_0 \beta)$$

Приведенные на фиг. 1 кривые распределения давления, соответствующие нелинейной теории, позволяют выбрать наилучший метод линеаризации уравнения (2.6), необходимый для построения приближенных решений неавтомодельных задач.

Наиболее эффективными методами линеаризации уравнений типа (2.6) будут методы, при которых стационарные решения линеаризованного и нелинейного уравнений совпадают.

Стационарное распределение давления определяется формулой

$$\lambda = \frac{G\mu_0}{2\pi k_0 \rho_0 h} = \frac{\exp[\alpha(p - p_0)] - \exp[\alpha(p_c - p_0)]}{\alpha \ln(r/r_c)} \quad (2.12)$$

где $p = p_c$ при $r = r_c$. Если на контуре питания ($r = r_k$) давление p равно величине p_0 , то (2.12) переходит в формулу для дебита скважины

$$G = \frac{2\pi k_0 \rho_0 h}{\mu_0 \ln(r_k/r_c)} \frac{1 - \exp[\alpha(p_c - p_0)]}{\alpha} \quad (2.13)$$

Эта формула представляет собой аналог формулы Дюпюи. Из соотношений (2.12) и (2.13) видно, что согласно нелинейной теории упругий режим фильтрации сказывается и в стационарном случае. Формулу (2.13) можно записать также в безразмерном виде

$$y = \frac{G}{K\Delta p} = \frac{1 - \exp(-\alpha\Delta p)}{\alpha\Delta p} \quad \left(\Delta p = p_0 - p_c, K = \frac{2\pi k_0 \rho_0 h}{\mu_0 \ln(r_k/r_c)} \right) \quad (2.14)$$

Здесь K — коэффициент продуктивности скважины. Величина $K\Delta p$ равна дебиту скважины, определенному по формуле Дюпюи, поэтому величина y показывает расхождение в определении дебитов по общепринятой линейной и нелинейной теориям. Заметим, что соотношение (2.14) справедливо и в случае плоского одномерного потока — притока к дренажной галерее.

Измеренные на реальных скважинах индикаторные кривые, т. е. графики $G(\Delta p)$, подтверждают зависимости (2.13). Их расшифровка позволяет определять значение параметра α .

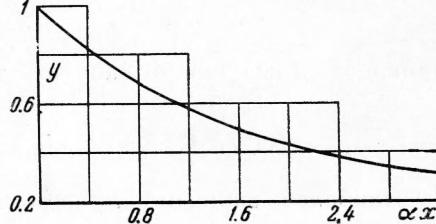
Ведем теперь функцию $u = \varphi^\gamma$. Тогда уравнение (2.6) примет вид

$$\frac{1}{\gamma} u^{(1-\gamma)/\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} = D^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.15)$$

При линеаризации по Л. С. Лейбензону надо в коэффициенте перед производной в левой части уравнения положить $p = p_0$, т. е. $u = 1$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.16)$$

Уравнение (2.16) будет обычным уравнением пьезопроводности, причем величина $\kappa = k_0 / (\mu_0 m_0 \beta)$ совпадает с используемым значением коэффициента пьезопроводности в линейной теории упругого режима фильтрации [2,5]. Таким образом, для получения решений уравнения (2.16) необходимо во все решения, рассчитанные по теории упругого режима, подставить вместо давления p величину $u = \exp[\alpha(p - p_0)]$, а вместо



Фиг. 2

объемного дебита Q — величину $G \alpha p_0^{-1}$ в соответствии с соотношением (2.5). Например, распределение давления в бесконечном пласте в момент времени t после начала работы скважины малого радиуса будет удовлетворять соотношению

$$1 - \exp[\alpha(p - p_0)] = -\frac{\alpha \lambda}{2} \operatorname{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\pi t}\right) \quad (2.17)$$

Результаты расчетов по формуле (2.17) приведены на фиг. 1 черными точками. Видно, что решение линеаризованного уравнения хорошо приближает точное автомодельное решение.

Соответственно, формула Маскета [19] для распределения давления в бесконечном пласте при работе кольцевого стока радиуса r_1 с дебитом G имеет вид

$$1 - e^{\alpha(p - p_0)} = \frac{\alpha \mu_0}{4 \pi k_0 \rho_0 h} \int_0^t \frac{G(\tau)}{t - \tau} \exp\left(\frac{r_1^2 - r^2}{4\pi(t - \tau)}\right) I_0\left(\frac{r_1^2}{2\pi(t - \tau)}\right) d\tau \quad (2.18)$$

В заключение отметим, что параметр α может быть и положительным и отрицательным, а его отношение к параметру β может быть самым различным. Судя по экспериментальным данным [9–13, 15, 16], можно ожидать, что порядок величины γ будет до 10 и более. В связи с этим представляет интерес исследовать уравнение (2.15) при больших величинах γ .

§ 3. В случае фильтрации реальных газов уравнение (2.1) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{mp}{z(p)} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{kp}{\eta z} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \quad (3.1)$$

Воспользовавшись соотношениями (1.8), (1.10) уравнение (3.1) можно записать

$$\frac{\partial}{\partial t} (pe^{\beta(p - p_0)}) = \frac{k_0}{\eta_0 m_0} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(pe^{\alpha(p - p_0)} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \quad \begin{cases} \alpha = a_k - a_z - a_n \\ \beta = a_m - a_z \end{cases} \quad (3.2)$$

Так как имеют место соотношения

$$(p - p_0) e^{\alpha(p - p_0)} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p - p_0}{\alpha} e^{\alpha(p - p_0)} - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha(p - p_0)} \right) \quad (3.3)$$

$$p_0 e^{\alpha(p - p_0)} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_0}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} e^{\alpha(p - p_0)} \quad (3.4)$$

уравнение (3.1) можно записать также в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (pe^{\beta(p - p_0)}) = \frac{k_0}{\eta_0 m_0} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \left(\frac{\alpha p - 1}{\alpha^2} e^{\alpha(p - p_0)} \right) \quad (3.5)$$

Наиболее важным для практики будут решения этого уравнения в осесимметричном случае

$$\frac{\partial}{\partial t} (pe^{\beta(p - p_0)}) = \frac{k_0}{\eta_0 m_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\alpha p - 1}{\alpha^2} e^{\alpha(p - p_0)} \right) \quad (3.6)$$

при начальных и граничных условиях

$$p(r, t = 0) = p_0, \quad p(r = \infty, t) = p_0, \quad p(r = r_c, t) = p_c \quad (3.7)$$

или вместо последнего условия из (3.7)

$$\left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\alpha p - 1}{\alpha^2} e^{\alpha(p - p_0)} \right) \right]_{r \rightarrow 0} = -\frac{G \eta_0 z_0 R T}{2 \pi k_0 h} = -\lambda \quad (3.8)$$

Здесь G — массовый расход газа через скважину (при $r \rightarrow 0$). Первые из условий (3.7) и (3.8) соответствуют автомодельным решениям урав-

нения (3.6), т. е. подстановка Больцмана (2.8) сводит задачу к построению интегральных кривых уравнения

$$\frac{d}{d\xi} \xi \frac{d}{d\xi} ((\alpha p - 1) e^{\alpha(p-p_0)}) = - \frac{\xi^2}{2} \frac{d}{d\xi} (\alpha p e^{\beta(p-p_0)}) \quad (3.9)$$

если

$$p(\xi = \infty) = p_0, \quad \left[\xi \frac{d}{d\xi} (\alpha p - 1) e^{\alpha(p-p_0)} \right]_{\xi \rightarrow 0} = -\alpha^2 \lambda \quad (3.10)$$

Дебит скважины при стационарном притоке газа определяется соответственно по формуле

$$G = \frac{2\pi k_0 h}{z_0 \eta_0 R T} \frac{(\alpha p_0 - 1) - (\alpha p_c - 1) \exp[\alpha(p_c - p_0)]}{\alpha^2 \ln(r_k / r_c)} \quad (3.11)$$

если $p = p_0$ при $r = r_k$. Параметр α можно определить по индикаторным кривым скважин.

§ 4. Рассмотрим теперь движение смеси капельных взаимонерасторимых жидкостей в пласте, сложенном из сжимаемой пористой среды. В этом случае уравнения движения будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial s m \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} &= 0, & \mathbf{u} &= -\frac{k(p)}{\mu_1(p)} f_1(s, p) \operatorname{grad} p \\ \frac{\partial(1-s)m\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0, & \mathbf{v} &= -\frac{k(p)}{\mu_2(p)} f_2(s, p) \operatorname{grad} p \end{aligned} \quad (4.1)$$

где \mathbf{u}, \mathbf{v} — скорости фильтрации, а μ_1, μ_2 — вязкости, соответственно, первой и второй жидкости (например, воды и нефти); s — насыщенность (относительный объем) порового пространства первой жидкостью, $f_1(s, p), f_2(s, p)$ — фазовые проницаемости. В уравнениях (4.3) и (4.4), ради простоты, пренебрегается различием в давлениях в фазах (т. е. пренебрегается капиллярным давлением), а также различием в их плотностях.

Изменения величины давления в смеси жидкостей вызывают не только изменение абсолютной проницаемости, но согласно опытам Уилсона [21, 13] изменяют в некоторой степени и форму кривых фазовых проницаемостей, т. е. $f_i = f_i(s, p)$.

Если воспользоваться изложенными выше представлениями о характере изменения параметров k, μ_i, ρ , то система уравнений (4.1) сводится в одномерном плоском случае к двум уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t} (s e^{\beta(p-p_0)}) = D_1^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(f_1(s, p) \frac{\partial}{\partial x} e^{\alpha_1(p-p_0)} \right) \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1-s) e^{\beta(p-p_0)}) = D_2^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(f_2(s, p) \frac{\partial}{\partial x} e^{\alpha_2(p-p_0)} \right) \quad (4.3)$$

где D_i^2, β, α_i определяются, как и в § 2, но включают в себя, соответственно, величину $\mu_i(p)$.

Заметим, что задача о нагнетании воды через галерею в насыщенный нефтью полубесконечный пласт будет автомодельной. В самом деле, подстановка $\xi = x/\sqrt{t}$ приводит систему (4.2) — (4.3) к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$D_1^2 \frac{d}{d\xi} \left(f_1(s, p) \frac{d}{d\xi} e^{\alpha_1(p-p_0)} \right) = -\frac{\xi}{2} \frac{d}{d\xi} (s e^{\beta(p-p_0)}) \quad (4.4)$$

$$D_2^2 \frac{d}{d\xi} \left(f_2(s, p) \frac{d}{d\xi} e^{\alpha_2(p-p_0)} \right) = -\frac{\xi}{2} \frac{d}{d\xi} ((1-s) e^{\beta(p-p_0)}) \quad (4.5)$$

а соответствующие начальные и граничные условия сводятся к условиям (4.6), причем вместо первого из условий (4.6) может быть также задано условие постоянного расхода жидкости в сечении $x = 0$ (т. е. при $\zeta = 0$)

$$p = p_0, \quad s = s_0 \quad (\zeta = \infty), \quad p = p_1, \quad s = s_1 \quad (\zeta = 0) \quad (4.6)$$

Особый интерес представляет задача о движении газированной жидкости в сжимаемом пласте. Установившееся движение газированной жидкости в несжимаемой среде было рассмотрено С. А. Христиановичем [22]. В дальнейшем Л. А. Зиновьева показала [23], что метод работы [22] позволяет учитывать такие свойства реальной жидкости и растворенного в ней газа, как зависимость объемного коэффициента (плотности) и вязкости жидкости [15, 16] от давления, равно как и отклонение растворимости газа от линейного закона.

Установившееся движение газированной жидкости описывается решениями системы уравнений в правой части (4.1), а также уравнений неразрывности для жидкости и газа

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{div} \left(\frac{\nabla p}{RTz(p)} + S(p) \rho \mathbf{u} \right) = 0 \quad (4.7)$$

Здесь $S(p)$ — коэффициент в уравнении Генри [15], равный массе газа, растворяющегося в единице объема жидкости при повышении давления на одну атмосферу, ρ — плотность жидкости. Первый член во втором из уравнений (4.7) определяет массовую скорость газа, находящегося в свободном состоянии, а второй член — массовую скорость газа, растворенного в жидкости. При давлении p , равном или большем некоторого давления насыщенности p_+ , весь газ в поровом пространстве оказывается растворенным в жидкости, т. е. при $p \geq p_+$ имеют место следующие соотношения:

$$s = 1, \quad f_1(s, p) = 1, \quad f_2(s, p) = 0, \quad \mathbf{v} = 0 \quad (4.8)$$

Положим, что при $p \geq p_+$ имеет место равенство $S(p) = 1/p$. Это значит, что при любых давлениях выше p_+ количество газа, растворенное в жидкости, остается постоянным. При таком доопределении функции $S(p)$ уравнение (4.7) остается справедливым при всех значениях p .

Уравнение (4.7) можно записать также следующим образом:

$$\operatorname{div} \left[\left(pS(p) + \frac{p}{RTz(p)} \frac{f_2(s, p)}{f_1(s, p)} \frac{\mu(p)}{\eta(p)} \right) \mathbf{u} \right] = 0 \quad (4.9)$$

Воспользуемся уравнением неразрывности для жидкости (4.7)

$$\rho \mathbf{u} \operatorname{grad} \left(\frac{pS(p)}{\rho} + \frac{p}{RTz(p)} \frac{f_2(s, p)}{f_1(s, p)} \frac{\mu(p)}{\eta(p)} \right) = 0 \quad (4.10)$$

Это означает, что величина

$$\Gamma = \frac{pS(p)}{\rho} + \frac{p}{RTz(p)\rho} \frac{f_2(s, p)}{f_1(s, p)} \frac{\mu(p)}{\eta(p)} \quad (4.11)$$

постоянна вдоль линий тока.

Если на какой-нибудь замкнутой кривой, ограничивающей рассматриваемую область пласта, величина p не изменяется (например, $p = p_+$), то $\Gamma = \text{const}$ в данной области. Внутри этой области соотношение $\Gamma = \text{const}$ связывает между собой насыщенность s и давление p .

Тогда массовую скорость жидкости можно представить

$$\rho \mathbf{u} = - \frac{k(p_+) \cdot (p_+)}{\mu(p_+)} e^{\alpha_j(p-p_+)} f_1[s(p), p] \operatorname{grad} p \quad (4.12)$$

$$\alpha_j = \alpha_1 \quad \text{при } p > p_+, \quad \alpha_j = \alpha_2 \quad \text{при } p < p_+$$

Различные значения параметра α справа и слева от точки $p = p_+$ отражают тот факт, что свойства жидкости (скорости изменения вязко-

сти и плотности) резко меняются с началом выделения газа (например, [15]).

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(p) = \int_{p_+}^p \exp[\alpha_j(p - p_+)] f_1[s(p), p] dp \quad (4.13)$$

Тогда

$$\rho u = -\frac{k(p_+) \rho(p_+)}{\mu(p_+)} \operatorname{grad} \Phi \quad (4.14)$$

Подставляя (4.14) в первое из уравнений неразрывности (4.7), получим, что функция Φ удовлетворяет уравнению Лапласа во всей области пласта (при $p > p_+$ и $p \leq p_+$).

Формула для притока массы жидкости к скважине будет иметь вид

$$G = \frac{2\pi k(p_+) \rho(p_+) h}{\mu(p_+) \ln(r_k/r_c)} \int_{p_c}^{p_0} \exp[\alpha_j(p - p_+)] f_1[s(p), p] dp \quad (4.15)$$

где снова G — дебит жидкости из скважины, p_c , p_0 — давление на стенке скважины ($r = r_c$) и на контуре питания ($r = r_k$).

Вид функции $\Phi(p)$ надо определять в каждом конкретном случае (на каждом месторождении) по индикаторным кривым, т. е. по зависимости $G = G(p_0 - p_c)$, измеренным на скважинах.

§ 5. В заключение остановимся на доказательстве одного вспомогательного положения, которое было неявным образом использовано в § 1.

В соотношении (1.1), строго говоря, необходимо подставлять не величину пористости m , определенную как отношение объема пор ко всему объему среды, а просветность n — отношение той части площади сечения среды плоскостью, которая приходится на поровое пространство, ко всей плоскости (т. е. просветность является пористостью, замеренной по плоским сечениям).

Если среда анизотропна, то может показаться, что величина n зависит от ориентации плоского сечения, на котором она замерена, в пространстве. Однако можно доказать, что $n = m$ во всякой однородной пористой среде (для изотропной среды это сразу следует из свойства изотропии).

Введем случайную функцию $\lambda(x_1, x_2, x_3)$, которая равна единице, если точка $M(x_1, x_2, x_3)$ принадлежит поровому пространству среды, и нулю, если M точка скелета среды. Тогда среднее значение от $\lambda(M)$ по элементарному макрообъему ΔV равно

$$m = \lim_{b_i \rightarrow \infty} \frac{1}{8b_1 b_2 b_3} \int_{-b_1}^{b_1} \int_{-b_2}^{b_2} \int_{-b_3}^{b_3} \lambda(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (5.1)$$

Объем ΔV мал по сравнению с расстояниями между внешними границами среды, но бесконечно велик по сравнению с внутренним масштабом среды, что и объясняет необходимость предельного перехода в правой части выражения (5.1).

Пусть величина просветности будет зависеть от ориентации плоскости в пространстве, например

$$n_1(x_1) = \lim_{b_i \rightarrow \infty} \frac{1}{4b_2 b_3} \int_{-b_2}^{b_2} \int_{-b_3}^{b_3} \lambda(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3 \quad (5.2)$$

В силу однородности среды $n_1(x_1) = n_1$ — вне зависимости от значения координаты x_1 . Выражение (5.1) может быть сведено к следующему

$$m = \lim_{b_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2b_1} \int_{-b_1}^{b_1} \left(\lim_{b_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{4b_2 b_3} \int_{-b_2}^{b_2} \int_{-b_3}^{b_3} \lambda(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3 \right) dx_1 \quad (5.3)$$

так как $\lambda(x_1, x_2, x_3)$ — ограниченная функция [24]. Отсюда

$$m = \lim_{b_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2b_1} \int_{-b_1}^{b_1} n_1 dx_1 = n_1 \quad (5.4)$$

Аналогичным образом можно получить, что $m = n_2$ и $m = n_3$. Поэтому

$$n_1 = n_2 = n_3 = m.$$

Поступила 8 VI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрижов И. Н., Ходанович И. Е. Добыча газа. Гостоптехиздат, 1946.
2. Щелкачев В. Н. Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде. ДАН СССР, 1946, т. 52, № 2.
3. Баренблatt Г. И., Крылов А. П. Об упруго-пластическом режиме фильтрации. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 2.
4. Лейбензон Л. С. Собр. тр. Т. II, М., Изд. АН СССР, 1953.
5. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. Гостоптехиздат, М., 1959.
6. Флорин В. А. Некоторые простейшие нелинейные задачи консолидации водонасыщенной земляной среды. Изв. АН СССР, ОТН, 1948, № 9.
7. Флорин В. А. Одномерная задача уплотнения сжимаемой пористой ползучей земляной среды. Изв. АН СССР, ОТН, 1953, № 6.
8. Герсанов Н. М., Полышин Д. Е. Теоретические основы механики грунтов. М., Стройиздат, 1948.
9. Fatt I., Davis D. H. Reduction in permeability with overburden pressure. Trans. AIMME, 1956, vol. 195.
10. Mc Hatchie A. S., Hemstock R. A. The effective compressibility of reservoir rock and its effects on permeability J. Petrol. Technology, June 1958.
11. Гудок Н. С., Кусаков М. М. Экспериментальное исследование влияния внешнего давления на проницаемость нефесодержащих пород. ДАН СССР, 1958, т. 119, вып. 2.
12. Кусаков М. М., Гудок Н. С. Влияние внешнего давления на фильтрационные свойства нефесодержащих пород. Нефт. хоз., 1958, № 6.
13. Шедеггер А. Е. Физика течения жидкости через пористые среды. Пер. с англ., М., Гостоптехиздат, 1960.
14. Scheidegger A. E. On the theory of flow of underground fluids in compressible strata. Canad. J. Physics. v. 37, № 3, 1959.
15. Котяков Ф. И. Основы физики нефтяного пласта. Гостехиздат, 1956.
16. Берчик Дж. Свойства пластовых жидкостей. Пер. с англ., М., Гостоптехиздат, 1960.
17. Лапук Б. Б. Теоретические основы разработки месторождений природных газов. Гостоптехиздат, 1948.
18. БайАкош, К. С. Баснин, В. Н. Николаевский. Об основных уравнениях фильтрации жидкости и газов в деформируемых пористых средах. ПМТФ, 1961, № 3.
19. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Пер. с англ., М., Гостоптехиздат, 1949.
20. Баренблatt Г. И., Трифонов Н. Л. О некоторых осесимметричных задачах неуставнившейся фильтрации жидкости и газа в пористой среде. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 1.
21. Wilson I. W. Determination of relative permeability under simulated reservoir conditions. AIChE Journ., March 1956.
22. Христианович С. А. О движении газированной жидкости в пористых породах. ПММ, 1941, т. V, вып. 2.
23. Зиновьева Л. А. Приближенный метод расчета притока газированной нефти к скважинам с учетом реальных свойств пластовых нефтеий. Тр. ВНИИ нефтегаз., М., Гостоптехиздат, 1954, вып. 6.
24. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том III, М.—Л., Физматгиз, 1960.