

УДК 539.374

ОБ УЧЕТЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СМАЗКИ МЕЖДУ СООСНЫМИ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

А. С. Бегун^{*,**}, А. А. Буренин^{***}, С. Г. Жилин^{***}, Л. В. Ковтанюк^{*}

* Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, 690041 Владивосток, Россия

** Владивостокский государственный университет экономики и сервиса,
690014 Владивосток, Россия

*** Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН,
681005 Комсомольск-на-Амуре, Россия

E-mails: asustinova@mail.ru, burenin@iacp.dvo.ru, wer@mail.ru, lk@iacp.dvo.ru

Приведено решение краевой задачи о напряженно-деформированном состоянии узла трения, помещенного в зазор между жесткими вращающимися цилиндрами. Предполагается, что двухслойный несжимаемый материал такого узла обладает упругими, вязкими и пластическими свойствами и различными значениями упругих модулей, предела текучести и вязкости. Установлены условия возникновения вязкопластического течения, закономерности движения по деформируемой среде упругопластической границы и взаимодействия последней с контактной границей материалов. Приведены предельные значения параметров, характеризующих вращения, при которых демпфирующий слой узла трения пластически не деформируется. Рассчитаны поля скоростей и напряжений при ускорении течения в смазке и его замедлении.

Ключевые слова: упругость, вязкопластичность, большие деформации, узел трения, демпфирующий слой.

С целью уменьшения износа поверхностей трущихся деталей в зазор между их цилиндрическими поверхностями помещаются слой смазки и втулка, на которую передается основная часть усилий, возникающих вследствие вращения элементов сборки, особенно в процессе ускорения и замедления вращений. Материал втулки подбирается таким образом, чтобы он выполнял функцию увеличения длительной прочности вращающихся деталей и при этом обладал необходимыми демпфирующими свойствами, оставаясь достаточно износостойким.

Задача решается с учетом больших деформаций материалов со сложными реологическими свойствами. Построению математических моделей с учетом больших упругопластических деформаций посвящены работы [1–9]. Получено недостаточное количество решений краевых задач, моделирующих конкретные технологические процессы [10], причем эти задачи в основном являются одномерными [8, 11–14]. В настоящей работе также рассматривается одномерная задача, близкая к задачам, рассмотренным в [11, 12]. Отличие данной задачи заключается в том, что узел трения является двухслойным, т. е. состоит из слоя смазки и втулки, кроме того, в начале вращения допускается проскальзывание.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-00283), Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке молодых российских ученых (грант № МК-2879.2014.1) и Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания вузам на выполнение научно-исследовательской работы (код проекта 2014/292).

© Бегун А. С., Буренин А. А., Жилин С. Г., Ковтанюк Л. В., 2015

1. Исходные соотношения модели. Наличие упругих свойств материала смазки позволяет передавать на демпфирующую втулку усилия при разгоне и торможении вала. Деформации, возникающие в случае вязкопластического течения смазки, нельзя считать малыми, поэтому адекватной процессу является модель больших упругопластических деформаций. В качестве такой модели выберем математическую модель, предложенную в [7] и подробно описанную в [8]. Согласно этой модели кинематика среды в системе пространственных координат x_i переменных Эйлера задается соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - 0,5((\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj})), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij}^p - p_{ik}\varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj}, \\ d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} - 0,5e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j u_{i,j}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\ r_{ij} &= 0,5(v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij}(\varepsilon_{sk}, e_{lm}), \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u_i, v_i — компоненты векторов перемещений и скоростей.

Первые два равенства в (1.1) следует считать основными, поскольку они являются уравнениями изменения (переноса) компонент тензоров обратимых (упругих) e_{ij} и необратимых (пластических) p_{ij} деформаций, которые представляют собой составляющие полных d_{ij} деформаций Альманси. Последнее соотношение, являющееся следствием первых двух, задает разделение деформаций на обратимые и необратимые. Нелинейные слагаемые $z_{ij} = -z_{ji}$ для компонент тензора вращений r_{ij} в (1.1) не приводятся вследствие их громоздкости (в [8] они записаны полностью). Источник ε_{ij}^p в уравнении изменения p_{ij} отождествляется со скоростями пластических деформаций, при $\varepsilon_{ij}^p = 0$ компоненты p_{ij} изменяются так же, как и при жестких движениях среды. Следовательно, необратимые деформации неизменны при обратимом деформировании и разгрузке. Для выполнения данного требования было введено специальное определение объективной производной тензоров по времени. В (1.1) приведено выражение для этой объективной производной для компонент n_{ij} произвольного тензора. Заметим, что согласно последнему соотношению в (1.1) компонентами обратимых деформаций следовало бы считать $m_{ij} = e_{ij} - 0,5e_{ik}e_{kj}$. Выделение линейной части этого тензора обусловлено не только удобством записи уравнения изменения, но и возможностью получить в качестве следствия закона сохранения энергии аналог формулы Мурнагана [15]. Формула Мурнагана принимает наиболее простую форму при условии, что напряжения в среде полностью определяются величиной и распределением обратимых деформаций. Для этого достаточно считать, что упругий потенциал (плотность распределения свободной энергии) W является функцией лишь обратимых деформаций e_{ij} ($W = W(e_{ij})$). Определяющие соотношения запишем в следующем виде:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj} - 2d_{kj}), & p_{ij} \equiv 0, \\ -q\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}), & p_{ij} \neq 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$W = -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b - \mu)J_1 J_2 - \chi J_1^3,$$

$$J_k = \begin{cases} L_k, & p_{ij} \equiv 0, \\ I_k, & p_{ij} \neq 0, \end{cases} \quad L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik}d_{ki}, \quad I_1 = m_{kk}, \quad I_2 = m_{ik}m_{ki}.$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; p, q — неизвестные функции добавочного давления; μ — модуль сдвига; b, χ — упругие постоянные более высокого порядка. Материал считается изотропным, функция $W = W(I_1, I_2)$ представляется в виде степенного ряда с точностью до кубических членов, соответствующих упругим деформациям. Полагаем, что необратимые деформации накапливаются в материале, если напряжения достигают поверхности нагружения $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 0$.

В силу принципа максимума Мизеса [16] принимаем ассоциированный закон пластического течения $\varepsilon_{ij}^p = \lambda \partial f / \partial \sigma_{ij}$ ($\lambda > 0$). В качестве поверхности нагружения будем использовать условие пластичности Треска, обобщенное на случай деформирования с учетом вязких свойств среды при ее пластическом течении [17]:

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max |\varepsilon_k^p|. \quad (1.3)$$

Здесь $\sigma_i, \varepsilon_k^p$ — главные значения тензоров напряжений и скоростей необратимых деформаций; η — вязкость при пластическом течении.

2. Постановка задачи. Пусть зазор $r_0 \leq r \leq R$ между жесткими цилиндрическими поверхностями заполнен двухслойным деформируемым материалом. Слой смазки расположен в области $r_0 \leq r \leq r_1$, а втулка — в области $r_1 \leq r \leq R$. Механическим параметрам материала втулки соответствует индекс 1, механическим параметрам смазки — индекс 2. При вращающем усилии, приложенном к валу ($r = r_0$), сначала движение отсутствует, поскольку приложенное усилие уравнивается упругим откликом деформируемого материала при наличии сухого трения на граничных поверхностях:

$$|\sigma_{r\varphi}| - \gamma |\sigma_{rr}| \leq 0, \quad r = r_0, \quad r = R \quad (2.1)$$

(γ — коэффициент трения). Считаем, что угловая скорость вращения вала ω^+ растет пропорционально времени: $\omega^+ = \alpha t$ при $r = r_0$ и $\omega^+ = 0$ при $r = R$ (поверхность $r = R$ неподвижна). Для рассматриваемого одномерного случая из (1.1), (1.2) следуют зависимости

$$\begin{aligned} u_r &= r(1 - \cos \theta(r, t)), & u_\varphi &= r \sin \theta(r, t), \\ d_{r\varphi} &= 0,5g, & d_{rr} &= -0,5g^2, & g &= r \frac{\partial \theta}{\partial r}, & \omega &= \frac{\partial \theta}{\partial t} = \dot{\theta}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz} = -(p + 2\mu) - 0,5(b + \mu)g^2 = -s, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -s + \mu g^2, \quad \sigma_{r\varphi} = \mu g.$$

Подставляя соотношения (2.2) в уравнения равновесия (квазистатический случай) и интегрируя последние в каждом слое (в слое смазки и слое материала втулки) с учетом наличия жесткой спайки на граничных поверхностях $r = r_0$ и $r = R$ и условия непрерывности перемещений и напряжений на контактной поверхности $r = r_1$, получаем решение задачи:

— в области $r_1 \leq r \leq R$

$$\begin{aligned} \theta &= c(t)A(r), & \omega &= \dot{c}h(r), & \sigma_{r\varphi} &= cr^{-2}, & A(r) &= 0,5\mu_1^{-1}(R^{-2} - r^{-2}), \\ \sigma_{rr} &= \sigma_{zz} = 0,25c^2(\mu_2^{-1}(r_0^{-4} - r_1^{-4}) + \mu_1^{-1}(r_1^{-4} - r^{-4})) + \sigma_0, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 0,25c^2(\mu_2^{-1}(r_0^{-4} - 3r_1^{-4}) + \mu_1^{-1}(r_1^{-4} - 3r^{-4})) + \sigma_0, \\ e_{r\varphi} &= d_{r\varphi} = 0,5\mu_1^{-1}r^{-2}c(t), & e_{rr} &= -1,5e_{r\varphi}^2, & e_{\varphi\varphi} &= 0,5e_{r\varphi}^2; \end{aligned} \quad (2.3)$$

— в слое смазки $r_0 \leq r \leq r_1$

$$\begin{aligned} \theta &= cA_1(r), & \omega &= \dot{c}A_1(r), & \sigma_{r\varphi} &= cr^{-2}, \\ \sigma_{rr} = \sigma_{zz} &= 0,25c^2\mu_2^{-1}(r_0^{-4} - r^{-4}) + \sigma_0, & \sigma_{\varphi\varphi} &= 0,25c^2\mu_2^{-1}(r_0^{-4} - 3r^{-4}) + \sigma_0, \\ A_1(r) &= 0,5\mu_1^{-1}(R^{-2} - r_1^{-2}) + 0,5\mu_2^{-1}(r_1^{-2} - r^{-2}), & c(t) &= 0,5\alpha A_1^{-1}(r_0)t^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $\sigma_0 = \sigma_{rr}$ — задаваемое напряжение сжатия в узле трения при $r = r_0$. При дальнейшем увеличении угла поворота вала либо неравенство (2.1) обратится в равенство и начнется проскальзывание вала в слое смазки, либо возникнет вязкопластическое течение в этом слое. Рассмотрим более общий первый случай, полагая $\sigma_{r\varphi}(r_0, t_0) < -k_2$ (k_2 — предел текучести материала смазки). Момент t_0 начала проскальзывания определяется из (2.4) и равен $t = t_0 = (-2\alpha^{-2}\gamma_2\sigma_0r_0^2A_1(r_0))^{1/2}$. Начиная с этого момента времени крайнее условие (2.1) принимает вид

$$\sigma_{r\varphi} = \gamma|\sigma_{rr}| + \xi\omega^+, \quad r = r_0, \quad (2.5)$$

где ξ — постоянная вязкого трения. Решение (2.3), (2.4) остается справедливым и в том случае, если в нем в соответствии с (2.5) изменяется функция интегрирования $c(t)$:

$$c(t) = r_0^2 \left(\alpha\xi_2 t - \alpha\xi_2 r_0^2 A_1(r_0) + \gamma_2 \sigma_0 + \exp \frac{t_0 - t}{\xi_2 r_0^2 A_1(r_0)} [\alpha\xi_2 r_0^2 A_1(r_0) - \alpha\xi_2 t_0 - 2\gamma_2 \sigma_0] \right). \quad (2.6)$$

Решение (2.3), (2.4) с функцией $c(t)$, определенной согласно (2.6), справедливо до момента времени $t = t_1$ ($t_1 > t_0$). В этот момент напряженное состояние выходит на поверхность нагружения $\sigma_{r\varphi}(r_0, t_1) = -k_2$ ($\gamma_2\sigma_0 < k_2$) и в слое смазки возникает пластическое течение.

3. Вязкопластическое течение. При $t \geq t_1$ от поверхности вала $r = r_0$ движется упругопластическая граница $r = x_1(t)$. В областях $x_1(t) \leq r \leq r_1$ (область II) и $r_1 \leq r \leq R$ (область I) продолжается обратимое деформирование. Для этих областей справедливы зависимости (2.3), (2.4), но функция $c(t)$ в них определяется из новых краевых условий с учетом наличия вязкопластического течения в области $r_0 \leq r \leq x_1(t)$ (область III). Из (1.1) следуют кинематические соотношения

$$\begin{aligned} v_\varphi &= r \frac{\partial \theta}{\partial t}, & \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) = \frac{\partial d_{r\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{2} r \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial t}, \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \varepsilon_{r\varphi}^e + \varepsilon_{r\varphi}^p = \frac{\partial e_{r\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial t}, \\ \varepsilon_{rr}^p &= \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} + 2p_{r\varphi}(r_{\varphi r} + \varepsilon_{r\varphi}^p), & \varepsilon_{\varphi\varphi}^p &= \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} + 2p_{r\varphi}(r_{r\varphi} + \varepsilon_{r\varphi}^p), \\ \varepsilon_{rr}^p &= -\varepsilon_{\varphi\varphi}^p = -2\varepsilon_{r\varphi}^p e_{r\varphi}, & p_{\varphi\varphi} &= 2e_{r\varphi} p_{r\varphi}, & p_{rr} &= 2d_{r\varphi}(e_{r\varphi} - d_{r\varphi}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для компонент напряжений в области вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq x_1(t)$ из (1.2), (3.1) получаем

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz} = -(q + 2\mu) - 2(b + \mu)e_{r\varphi}^2 = -s_1(t), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -s_1(t) + 4\mu e_{r\varphi}^2, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\mu e_{r\varphi}.$$

В то же время, интегрируя уравнения равновесия, находим

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{m(t)}{r^2}, \quad e_{r\varphi} = \frac{m(t)}{2\mu r^2}.$$

Из условий непрерывности компонент напряжений на упругопластической границе $r = r_1(t)$ следует $m(t) = c(t)$, $s(t) = s_1(t)$, а из ассоциированного закона течения (1.2) с условием пластичности (1.3) — соотношения

$$\sigma_{r\varphi} = -k + \eta\varepsilon_{r\varphi}^p, \quad \lambda = -\varepsilon_{r\varphi}^p / (k - \eta\varepsilon_{r\varphi}^p). \quad (3.2)$$

В соответствии с зависимостями (3.2) определяется кинематика течения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^p &= G(\eta_2, k_2), & p_{r\varphi} &= G_1(\eta_2, k_2) + g(r), & G(\eta, k) &= \frac{1}{\eta} \left(k + \frac{c}{r^2} \right), \\ G_1(\eta, k) &= \int G(\eta, k) dt = \frac{1}{\eta} \left(kt + \frac{c_1}{r^2} \right), & c_1(t) &= \int c(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.3)$$

На упругопластической границе $r = x_1(t)$ скорости пластических деформаций равны нулю, поэтому $c(t) = -k_2 x_1^2(t)$. Для определения угловой скорости в области вязкопластического течения используем условие непрерывности этого параметра на поверхности $r = x_1(t)$. Тогда согласно кинематическим зависимостям (3.1), (3.5) для области течения III получаем

$$\omega^{\text{III}} = F(c, r, x_1) + \dot{c}A_1(r), \quad F(c, r, x_1) = \frac{2}{\eta_2} \left(k_2 \ln \frac{r}{x_1} + \frac{c}{2} \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right).$$

Для определения положения границы вязкопластической области с помощью граничного условия (2.1) на внутреннем цилиндре получаем уравнение

$$F(-k_2 x_1^2, r_0, x_1) - 2k_2 x_1 \dot{x}_1 A_1(r_0) = \alpha t + H(-k_2 x_1^2), \quad H(c) = \frac{c}{\xi_2 r_0^2} + \frac{\gamma_2 \sigma_0}{\xi_2}.$$

Из условия равенства нулю пластических деформаций на движущейся упругопластической границе находим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \tau'(\alpha\tau + H(-k_2 r^2) - F(-k_2 r^2, r_0, r)) &= -2k_2 x_1 A_1(r_0), \\ \eta_2 r g' + 2k_2 \tau + 2g &= 0, \quad g' = \frac{dg}{dr}, \quad \tau' = \frac{d\tau}{dr} \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \tau(r_0) &= t_1, \\ g(r_0) &= \frac{1}{\eta_2} \left(-k_2 t_1 - \frac{\alpha t_0^3}{6r_0^2 A_1(r_0)} - \frac{1}{2} \alpha \xi_2 (t_1^2 - t_0^2) + \gamma_2 \sigma_0 (t_1 - t_0) - \right. \\ &\quad \left. - \alpha \xi_2^3 r_0^4 A_1^2(r_0) + \alpha \xi_2 r_0^2 A_1(r_0) t_1 + 2\gamma_2 \xi_2 \sigma_0 r_0^2 A_1(r_0) - \right. \\ &\quad \left. - r_0^2 A_1(r_0) \exp \frac{t_0 - t_1}{\xi_2 r_0^2 A_1(r_0)} [\alpha \xi_2^2 t_0 - \alpha \xi_2^3 r_0^2 A_1(r_0) + 2\gamma_2 \xi_2 \sigma_0] \right). \end{aligned}$$

Из решения данной системы определяем неизвестную функцию $g(r)$. В соответствии с (3.1), (3.3) запишем дифференциальное уравнение для $\theta(r, t)$ в области течения:

$$\frac{1}{2} r \frac{\partial \theta}{\partial r} = G_1(\eta_2, k_2) + \frac{c(t)}{2\mu_2 r^2} + g(r).$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\theta^{\text{II}}(r, t) = B(g(r)), \quad B(g(r)) = \frac{2}{\eta_2} \left(k_2 t \ln r - \frac{c_1(t)}{2r^2} \right) - \frac{c(t)}{2\mu_2 r^2} + \int \frac{2g(r)}{r} dr. \quad (3.4)$$

Неизвестная функция времени, появляющаяся после вычисления неопределенного интеграла в правой части последнего равенства, определяется условием непрерывности перемещений на упругопластической границе $r = x_1(t)$: $\theta^{\text{II}}(x_1, t) = \theta^{\text{I}}(x_1, t)$.

Если для достижения большого значения угловой скорости вращения вал разгоняется в течение длительного промежутка времени, то в некоторый момент времени $t = t^*$ весь слой смазки окажется в состоянии течения. Более того, в некоторый последующий

момент времени $t = t'_1$ ($t'_1 > t^*$) будет выполнено условие $\sigma_{r\varphi}(r_1, t'_1) = -k_1$, т. е. начнется необратимая деформация материала втулки, что приведет к ее износу.

В интервале времени с момента t^* до момента t'_1 функцию $c(t)$ можно определить из решения дифференциального уравнения

$$F(c, r_0, r_1) + \dot{c}A_1(r_0) = \alpha t + H(c), \quad c(t^*) = -k_2 r_1^2. \quad (3.5)$$

Из условия пластичности и соотношения (3.5) находим момент времени t'_1 . Для того чтобы течение имело место только в слое со смазкой, а основной материал деформировался упруго, угловая скорость жесткого цилиндра не должна превышать значение

$$\tilde{\omega} = F(-k_1 r_1^2, r_0, r_1) + \dot{c}(t'_1)A_1(r_0).$$

Если скорость вращения жесткого цилиндра больше этого значения, то в момент времени $t = t'_1$ в основном материале возникнет область вязкопластического течения $r_1 \leq r \leq x_2(t)$. В этом случае, интегрируя уравнения равновесия и используя условия непрерывности перемещений и скоростей на поверхностях $r = x_2(t)$ и $r = r_1$, получаем

— в области $x_2(t) \leq r \leq R$ (область I)

$$\theta^I = cA(r), \quad \omega^I = \dot{c}A(r); \quad (3.6)$$

— в области $r_1 \leq r \leq x_2(t)$ (область II)

$$(\varepsilon_{r\varphi}^p)^{II} = G(\eta_1, k_1), \quad p_{r\varphi}^{II} = G_1(\eta_1, k_1) + h(r),$$

$$\omega^{II} = F_1(c, r, x_2) + \dot{c}(t)A(r), \quad F_1(c, r, x_2) = \frac{2}{\eta_2} \left(k_1 \ln \frac{r}{x_2} + \frac{c}{2} \left(\frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right),$$

$$\tau'(\alpha\tau + H(r) - F_2(-k_1 r^2, r_0, r)) = -2k_1 r A_1(r_0), \quad \eta_1 r h' + 2k_1 \tau + 2h = 0,$$

$$F_2(-k_1 r^2, r_0, r) = F(-k_1 r^2, r_0, r_1) - F_1(-k_1 r^2, r_1, r);$$

$$c = -k_1 x_2^2, \quad \theta^{II} = B_1(h(r)), \quad B_1(h(r)) = \frac{2}{\eta_1} \left(k_1 t \ln r - \frac{c_1(t)}{2r^2} \right) - \frac{c(t)}{2\mu_1 r^2} + \int \frac{2h(r)}{r} dr; \quad (3.7)$$

— в области $r_0 \leq r \leq r_1$ (область III)

$$(\varepsilon_{r\varphi}^p)^{III} = G(\eta_2, k_2), \quad p_{r\varphi}^{III} = G_1(\eta_2, k_2) + g(r),$$

$$\omega^{III} = F_2(c, r, x_2) + \dot{c}(t)A_1(r), \quad \theta^{III} = B_1(g(r)).$$

При вычислении неизвестных интегрирования следует учитывать, что $h(r_1) = g(r_1)$, $\tau(r_1) = t'_1$, $\theta^{II}(x_2, t) = \theta^I(x_2, t)$, $\theta^{III}(r_1, t) = \theta^{II}(r_1, t)$. Положение упругопластической границы $x_2(t)$ определяется уравнением

$$F_2(-k_1 x_2^2, r_0, x_2) - 2k_1 x_2 \dot{x}_2 A_1(r_0) = \alpha t + H(-k_1 x_2^2).$$

Пусть начиная с момента времени $t = t_2$ ($x_2(t_2) < R$) скорость вращения цилиндрической поверхности $r = R$ становится постоянной. При этом область деформирования разбивается на четыре области: в области $x_3(t) \leq r \leq R$ (область I) происходит обратимое деформирование, в областях $x_2(t_2) \leq r \leq x_3(t)$ (область II), $r_1 \leq r \leq x_2(t_2)$ (область III) и $r_0 \leq r \leq r_1$ (область IV) имеет место вязкопластическое течение, а пластические деформации рассчитываются по разным соотношениям. Для области I справедливы зависимости (3.6), в которые вместо функции $c(t)$ следует подставить ее текущее значение $c(t) = -k_1 x_2^2$.

В областях вязкопластического течения распределение угловых скоростей имеет вид

$$\omega^{II} = \omega^{III} = F_1(c(t), r, x_3) + \dot{c}A(r), \quad \omega^{IV} = F_2(c(t), r, x_3) + \dot{c}A_1(r).$$

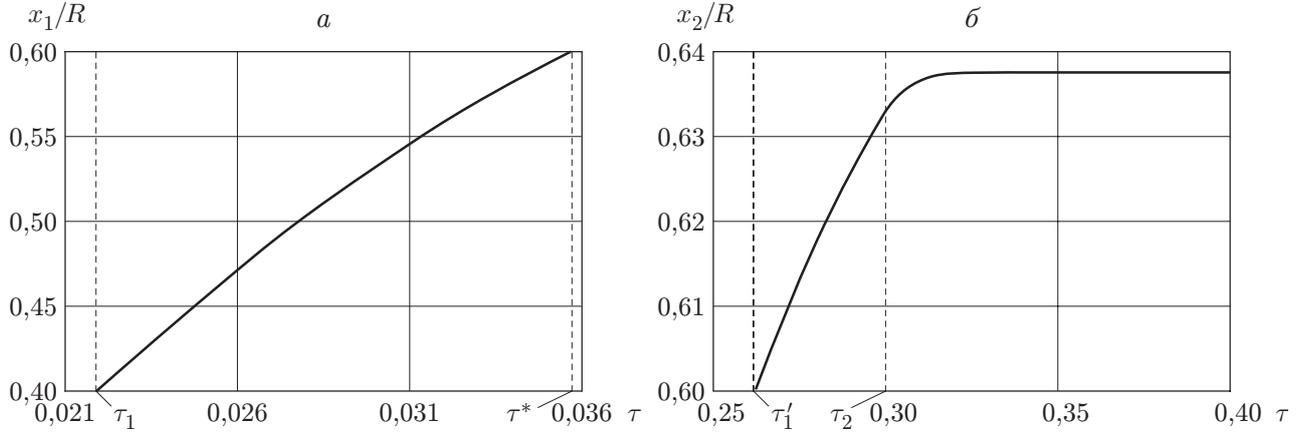


Рис. 1. Зависимость положения границы области вязкопластического течения в слое смазки (а) и демпфирующем слое (б) от времени

Положение движущейся упругопластической границы задается решением следующего из условия непрерывности скоростей при $r = x_3(t)$ дифференциального уравнения

$$F_2(-k_1 x_3^2, r_0, x_3) - 2k_1 x_3 \dot{x}_3 A_1(r_0) = \alpha t_2 + H(-k_1 x_3^2)$$

при начальном условии $x_3(t_2) = x_2(t_2)$.

Кинематика в областях течения II–IV определяется решением системы уравнений

$$\begin{aligned} p_{r\varphi}^{IV} &= G_1(\eta_2, k_2) + g(r), & p_{r\varphi}^{III} &= G_1(\eta_1, k_1) + h(r), & p_{r\varphi}^{II} &= G_1(\eta_1, k_1) + l(r), \\ \eta_1 r l' + 2k_1 \tau + 2l &= 0, & \tau'(\alpha t_2 + H(-k_1 r^2) - F(-k_1 r^2, r_0, r)) &= -2k_1 r A_1(r_0), \\ g(x_2) &= l(x_2), & \tau(r_1) &= t_2, & \theta^{II} &= B_1(l(r)), & \theta^{III} &= B_1(h(r)), & \theta^{IV} &= B(g(r)), \\ \theta^{II}(x_3, t) &= \theta^I(x_3, t), & \theta^{III}(x_2, t) &= \theta^{II}(x_2, t), & \theta^{IV}(r_1, t) &= \theta^{III}(r_1, t). \end{aligned}$$

На рис. 1 показана зависимость положения границы области вязкопластического течения в слое смазки и основном материале от времени при следующих значениях безразмерных параметров задачи: $r_0/R = 0,4$, $r_1/R = 0,6$, $\sqrt{\alpha} \eta_1/\mu_1 = 0,001$, $\sqrt{\alpha} \eta_2/\mu_2 = 0,01886$, $k_1/\mu_1 = 0,00165$, $k_2/\mu_2 = 0,0007$.

При ускоренном вращении граничной поверхности область течения увеличивается, при вращении с постоянной скоростью координата упругопластической границы $r = x_3(t)$ асимптотически приближается к предельному значению и далее область течения не развивается. Момент времени $t = t_*$, в который завершается развитие области течения, соответствует моменту обращения в нуль производной функции $r = x_3(t)$ по времени.

4. Торможение и разгрузка. В процессе торможения начиная с момента времени $t = t_*$ угловая скорость внутреннего цилиндра уменьшается по закону

$$\omega^+|_{r=r_0} = \alpha t_2 - \beta(t - t_*), \quad \theta^+|_{r=r_0} = \alpha t_2 t - \frac{\alpha t_2^2}{2} - \frac{\beta}{2}(t - t_*)^2.$$

В этом случае в областях $r_0 \leq r \leq r_1$ (область V), $r_1 \leq r \leq x_2$ (область IV) и $x_2 \leq r \leq x'_3$ (область III) имеет место вязкопластическое течение, в области $x'_3 \leq r \leq x_3$ (область II) пластические деформации не меняются, в области $x_3 \leq r \leq R$ (область I) происходит обратимое деформирование. Для упругой области I справедливы зависимости (3.6), для области с неизменяющимися пластическими деформациями (область II) получаем

$$\varepsilon_{r\varphi}^p = 0, \quad p_{r\varphi} = y(r), \quad \omega^{II} = \dot{c}A(r), \quad c(t) = -k_1 x_3^2, \quad (4.1)$$

для областей вязкопластического течения (области III–V) имеем соотношения

$$\begin{aligned}\omega^{\text{III}} = \omega^{\text{IV}} &= F_1(c, r, x'_3) + \dot{c}A(r), & \omega^{\text{V}} &= F_2(c, r, x'_3) + \dot{c}A_1(r), \\ (\varepsilon_{r\varphi}^p)^{\text{III}} = (\varepsilon_{r\varphi}^p)^{\text{IV}} &= G(\eta_1, k_1), & (\varepsilon_{r\varphi}^p)^{\text{V}} &= G(\eta_2, k_2), & p_{r\varphi}^{\text{III}} &= G_1(\eta_1, k_1) + l(r), \\ p_{r\varphi}^{\text{IV}} &= G_1(\eta_1, k_1) + h(r), & p_{r\varphi}^{\text{V}} &= G_1(\eta_2, k_2) + g(r).\end{aligned}$$

Положение неизвестной движущейся границы $x'_3(t)$ определяется из решения уравнения

$$\alpha t_2 - \beta(t - t_*) + H(-k_1 x_3'^2) = F(c, r_0, r_1) + F_1(c, r_1, x'_3) + \dot{c}A_1(r_0). \quad (4.2)$$

Для определения угла поворота в областях II–V и неизвестной функции $y(r)$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}y'r\eta_1 + 2k_1\tau + 2 &= 0, & y(r_3) &= h(r_3), \\ \tau'(\alpha t_2 - \beta(\tau - t_*) + H(-k_1 r^2) - F_2(-k_1 r^2, r_0, r)) + 2k_1 r A_1(r_0) &= 0, & \tau(r_2) &= t_*, \\ \theta^{\text{II}} = B_2(\mu_1, y(r)), & B_2(\mu_1, y(r)) &= -\frac{c(t)}{2\mu_1 r^2} + \int \frac{2y(r)}{r} dr, \\ \theta^{\text{II}}(r_2, t) = \theta^{\text{I}}(r_2, t), & \theta^{\text{III}}(r_3, t) = \theta^{\text{II}}(r_3, t), & \theta^{\text{IV}}(r_1, t) = \theta^{\text{III}}(r_1, t),\end{aligned}$$

где угол θ^{III} равен углу θ^{II} в (3.7), а угол θ^{IV} с — углу θ в (3.4).

Граница $x'_3(t)$ движется по направлению к внутреннему жесткому цилиндру $r = r_1$ и в момент времени $t = t_3$ достигает поверхности $r = x_2$. Начиная с этого момента область деформирования разбивается на пять областей: область обратимого деформирования $x_3 \leq r \leq R$ (область I), области с неизменяющимися пластическими деформациями $x_2(t) \leq r \leq x_3$ (область II) и $x'_2 \leq r \leq x_2$ (область III) и области, в которых продолжается вязкопластическое течение: $r_1 \leq r \leq x'_2$ (область IV) и $r_0 \leq r \leq r_1$ (область V). В этом случае функция $x'_2(t)$ определяется из решения уравнения (4.2), в котором $x'_3(t)$ следует заменить на $x'_2(t)$. Для области обратимого деформирования (область I) и области с неизменяющимися пластическими деформациями (область II) справедливы соотношения (3.6), (4.1) соответственно. Для областей III–V имеем

$$\begin{aligned}\omega^{\text{III}} = \dot{c}A(r), & \omega^{\text{IV}} = F_1(c, r, x'_2) + \dot{c}A(r), & \omega^{\text{V}} &= F_2(c, r, x'_2) + \dot{c}A_1(r), \\ (\varepsilon_{r\varphi}^p)^{\text{III}} = 0, & (\varepsilon_{r\varphi}^p)^{\text{IV}} = G(\eta_1, k_1), & (\varepsilon_{r\varphi}^p)^{\text{V}} &= G(\eta_2, k_2), \\ p_{r\varphi}^{\text{III}} = q(r), & p_{r\varphi}^{\text{IV}} = G_1(\eta_1, k_1) + h(r), & p_{r\varphi}^{\text{V}} &= G_1(\eta_2, k_2) + g(r).\end{aligned}$$

Угол поворота в областях II–V получаем из системы уравнений

$$\begin{aligned}q'r\eta_1 + 2k_1\tau + 2q &= 0, \\ \tau'(\alpha t_2 - \beta(\tau - t_*) + H(-k_1 r^2) - F_2(-k_1 r^2, r_0, r)) + 2k_1 r A_1(r_0) &= 0, \\ \theta^{\text{III}} = B_2(\mu_1, q(r)), & \theta^{\text{III}}(x_2, t) = \theta^{\text{II}}(x_2, t), \\ \theta^{\text{IV}}(x'_2, t) = \theta^{\text{III}}(x'_2, t), & \theta^{\text{V}}(r_1, t) = \theta^{\text{IV}}(r_1, t).\end{aligned}$$

В момент времени $t = t_4$ граница $x'_2(t)$ достигает поверхности $r = r_1$ и напряжения уменьшаются по абсолютной величине, но области вязкопластического течения при этом не изменяются. В момент времени $t = t_5$ от внешней поверхности слоя $r = r_0$ начинает двигаться новая неизвестная граница $x'_1(t)$, разделяющая область вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq x'_1$ (область V) и область $x'_1 \leq r \leq r_1$ (область IV), в которой пластические деформации не изменяются. Для демпфирующего слоя $r_1 \leq r \leq R$ справедливы зависимости, приведенные выше. Для областей IV, V получаем

$$(\varepsilon_{r\varphi}^p)^{\text{IV}} = 0, \quad p_{r\varphi}^{\text{IV}} = v(r), \quad \omega^{\text{IV}} = \dot{c}A_1(r),$$

$$\begin{aligned} \omega^V &= F(c, r, x'_1) + \dot{c}A_1(r), \quad (\varepsilon_{r\varphi}^p)^V = G(\eta_2, k_2), \quad p_{r\varphi}^V = G_1(\eta_2, k_2) + g(r), \\ v'r\eta_2 + 2k_2\tau + 2v &= 0, \quad v(x'_1) = g(x'_1), \\ \tau'(\alpha t_2 - \beta(\tau - t_*) + H(-k_2r^2) - F(-k_2r^2, r_0, r) + 2k_1rA_1(r_0)) &= 0, \quad \tau(r_1) = t_5, \\ \theta^{IV} &= B_2(\mu_2, v(r)), \quad \theta^V(x'_1, t) = \theta^V(x'_1, t). \end{aligned}$$

Положение границы $x'_1(t)$ определяется решением дифференциального уравнения

$$\alpha t_2 - \beta(t - t_*) + H(-k_2x_1'^2) = F(c, r_0, x'_1) + \dot{c}A_1(r_0).$$

В зависимости от свойств материала граница $x'_1(t)$ достигает поверхности $r = r_0$ либо до момента времени, в который жесткий цилиндр останавливается, либо после него. В рассматриваемом случае скорость внутреннего жесткого цилиндра ω_{r_0} становится равной нулю до того момента, когда координата границы $x'_1(t)$ станет равной $r = r_0$ (до момента времени $t_5 = \alpha t_2 / \beta + t_*$). Начиная с момента времени t_5 уравнения равновесия необходимо проинтегрировать в каждой из рассматриваемых областей: области обратимого деформирования $x_3 \leq r \leq R$ (область I), областях с неизменяющимися пластическими деформациями $x_2 \leq r \leq x_3$ (область II), $r_1 \leq r \leq x_3$ (область III), $x'_1(t_5) \leq r \leq r_1$ (область IV), $x'_1(t) \leq r \leq x'_1(t_5)$ (область V) и области вязкопластического течения $r_0 \leq r \leq x'_1(t)$ (область VI). Для областей I–IV справедливы соотношения, приведенные выше. Для областей V, VI с помощью условий непрерывности перемещений, скоростей, деформаций и напряжений находим

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{r\varphi}^p)^V &= 0, \quad p_{r\varphi}^V = b(r), \quad \omega^V = \dot{c}A_1(r), \quad (\varepsilon_{r\varphi}^p)^{VI} = G(\eta_2, k_2), \\ \omega^{VI} &= F(c, r, x'_1) + \dot{c}A_1(r), \quad p_{r\varphi}^{VI} = G_1(\eta_2, k_2) + g(r), \\ b'r\eta_2 + 2k_2\tau + 2b &= 0, \quad \tau'(H(-k_2r^2) - F(-k_2r^2, r_0, r) - 2k_1rA_1(r_0)), \\ b(x'_1) &= q(x'_1), \quad \tau(x'_1(t_5)) = t_5, \quad \theta^V = B_2(\mu_2, b(r)), \\ \theta^V(x'_1(t_5), t) &= \theta^{IV}(x'_1(t_5), t), \quad \theta^{VI}(x'_1, t) = \theta^V(x'_1, t). \end{aligned}$$

В данном случае для определения координаты движущейся границы $x'_1(t)$ следует использовать уравнение

$$F(kx_1'^2, x'_1, r_0) - 2k_2x_1'\dot{x}'_1A_1(r_0) + H(-k_2x_1') = 0.$$

На рис. 2 приведены зависимости $x'_1(t)$ и $x'_2(t)$ при торможении.

В момент времени $t = t_6$ граница $x'_1(t)$ достигает внутренней жесткой поверхности $r = r_0$ и пластические деформации прекращают изменяться во всей области деформирования. Далее напряжения уменьшаются по абсолютной величине, до тех пор пока на внутренней поверхности $r = r_0$ не будет выполняться условие прилипания (момент времени $t = t_7$). В этом случае неизвестную функцию $c(t)$ можно найти из решения дифференциального уравнения

$$\dot{c}A_1(r_0) + \frac{c}{r_0^2\xi_2} = \frac{\gamma_2\sigma_0}{\xi_2}, \quad c(t_6) = -k_2r_0^2,$$

интегрируя которое получаем

$$c(t) = r_0^2 \left(\gamma_2\sigma_0 - (k_2 + \gamma_2\sigma_0) \exp \frac{t_6 - t}{\xi_2 A_1(r_0) r_0^2} \right). \quad (4.3)$$

При определении параметров напряженно-деформированного состояния в областях I–IV функцию $c(t)$ нужно заменить функцией $c(t)$ из (4.3).

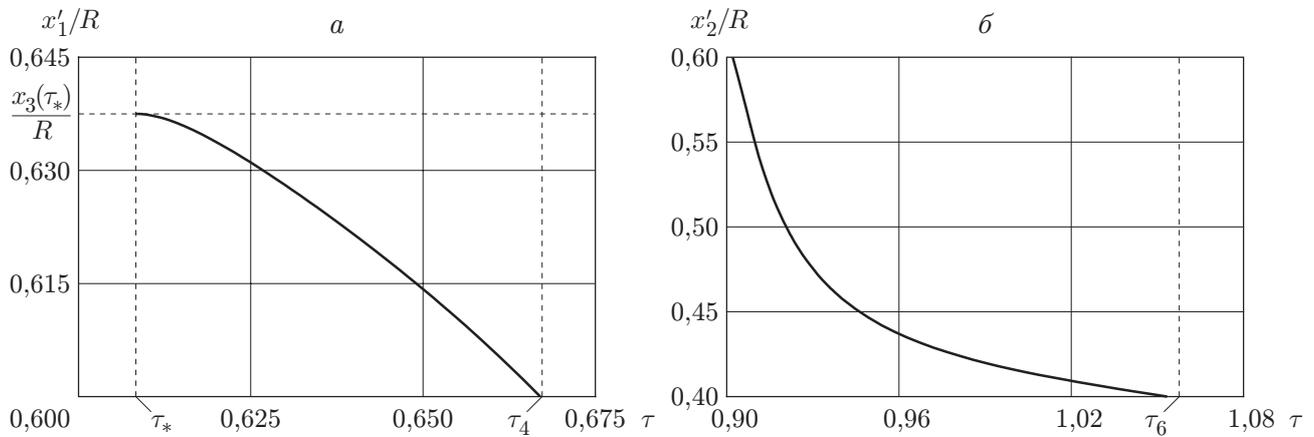


Рис. 2. Зависимость положения границы области вязкопластического течения при торможении в демпфирующем слое (а) и слое смазки (б) от времени

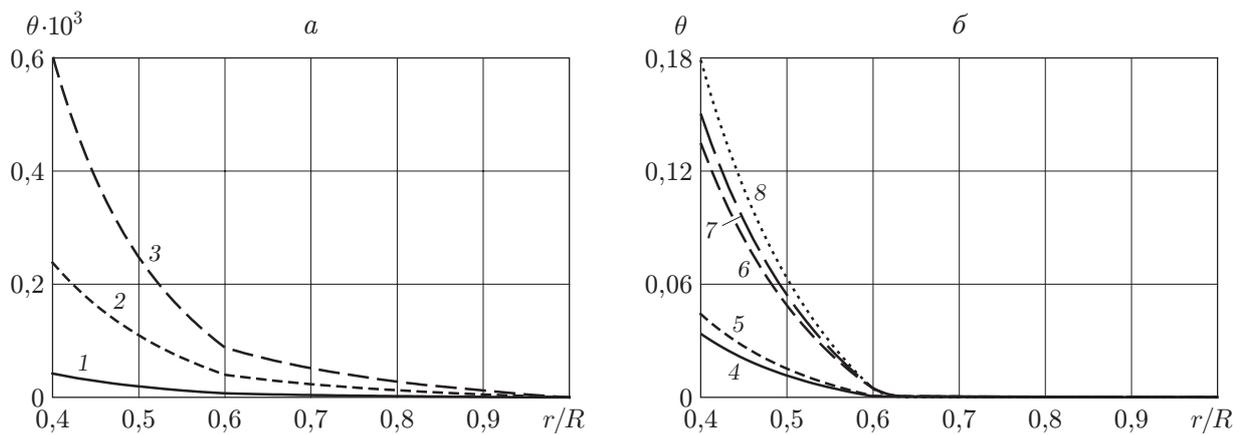


Рис. 3. Зависимость угла поворота от радиуса при ускорении (а) и замедлении (б) вязкопластического течения:

1 — момент t_0 начала проскальзывания на поверхности $r = r_0$; 2 — момент t_1 начала пластического течения в слое смазки; 3 — момент времени t^* , когда граница $x_1(t)$ достигает поверхности $r = r_1$; 4 — момент t'_1 начала пластического течения в демпфирующем слое; 5 — момент времени t_2 , когда скорость поворота становится постоянной; 6 — момент t_* начала торможения; 7 — момент времени t_4 , когда граница $x'_2(t)$ достигает поверхности $r = r_1$; 8 — момент времени t_5 , когда скорость внутреннего цилиндра становится равной нулю

Начиная с момента времени $t = t_7$ напряжения, деформации и перемещения не изменяются. Для осуществления дальнейшей разгрузки жесткий цилиндр необходимо поворачивать в противоположном направлении. В конечный момент разгрузки $t = t_8$ напряжение $\sigma_{r\varphi} = 0$, следовательно, и $c(t) = 0$ во всей области деформирования.

На рис. 3 показана зависимость угла поворота от радиуса r в различные моменты времени.

Заключение. В работе с использованием теории больших упруговязкопластических деформаций получено решение последовательности краевых задач о деформировании двухслойного узла трения с учетом проскальзывания на границах контакта материалов с жесткими стенками. Рассмотрены условия возникновения, развития, торможения и разгрузки

вязкопластического течения как в слое смазки, так и в демпфирующем слое. Указаны предельные параметры, при которых демпфирующий слой узла трения пластически не деформируется.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В.** Об одной простой модели для упруго-пластической среды при конечных деформациях // Докл. АН. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
2. **Буренин А. А.** Большие необратимые деформации и упругое последствие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. Владивосток: Дальнаука, 2013.
3. **Быковцев Г. И., Шитиков А. В.** Конечные деформации упругопластических сред // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, № 1. С. 59–62.
4. **Кондауров В. И.** Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями // ПМТФ. 1982. № 4. С. 133–139.
5. **Левитас В. И.** Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987.
6. **Мясников В. П.** Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
7. **Поздеев А. А.** Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения / А. А. Поздеев, П. В. Трусов, Ю. И. Няшин. М.: Наука, 1986.
8. **Роговой А. А.** Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 5. С. 138–149.
9. **Heng Xiao, Bruhns O. T., Meyers A.** Thermodynamic laws and consistent Eulerian formulation of finite elastoplasticity with thermal effects // J. Mech. Phys. Solids. 2007. V. 55. P. 338–365.
10. **Lee E. N.** Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1969. V. 36, N 1. P. 1–6.
11. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Устинова А. С.** Об учете упругих свойств неньютоновского материала при его вискозиметрическом течении // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 2. С. 143–151.
12. **Буренин А. А., Устинова А. С.** Развитие и торможение винтового вязкопластического течения с расчетом упругого отклика после остановки течения и разгрузки // Успехи механики сплошных сред: К 70-летию акад. В. А. Левина: Сб. науч. тр. Владивосток: Дальнаука, 2009. С. 91–102.
13. **Ковтанюк Л. В., Матвеев В. П., Буренин А. А.** Течение упруговязкопластической среды по трубе в условиях изменяющегося перепада давления // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2013. № 1. С. 68–79.
14. **Панченко Г. Л.** О прямолинейном течении в упруговязкопластическом цилиндрическом слое в условиях одностороннего прилипания // Вычисл. механика сплошных сред. 2011. Т. 4, № 4. С. 86–96.
15. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
16. **Быковцев Г. И.** Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. Владивосток: Дальнаука, 1998.
17. **Знаменский В. А., Ивлев Д. Д.** Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение. 1963. № 6. С. 114–118.