УДК 519.63

Экспериментальное исследование эффективности решения 2D краевых задач на подсетках квазиструктурированных прямоугольных сеток*

А.Н. Козырев[1], В.М. Свешников[1,2]

[1]Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

[2]Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mails: kozyrev_a@inbox.ru (Козырев А.Н.), victor@lapasrv.sscc.ru (Свешников В.М.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 3, Vol. 14, 2021.

Козырев А.Н., Свешников В.М. Экспериментальное исследование эффективности решения 2D краевых задач на подсетках квазиструктурированных прямоугольных сеток // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 3. — С. 277–288.

Проведено экспериментальное исследование эффективности решателей 2D краевых задач на подсетках квазиструктурированных прямоугольных сеток. Под решателем понимается метод решения и его программная реализация. Рассмотрено три решателя: один прямой — метод циклической редукции Бунемана и два итерационных: метод продольно–поперечных прогонок Писмана–Рэчфорда и метод последовательной верхней релаксации. Характерными особенностями проводимых исследований являются: 1) подсетки содержат малое число узлов, а именно: 8×8, 16×16, 32×32, 64×64; 2) эффективность оценивается не только для одиночных расчетов, но и преимущественно для серий расчетов, в каждой из которых проводится несколько повторов решения задачи с различными граничными условиями на одной и той же подсетке. На основе серийных расчетов предложен комбинированный метод и даны рекомендации по использованию решателей.

DOI: 10.15372/SJNM20210304

Ключевые слова: *подсетки квазиструктурированных сеток, решатели краевых задач, итерационные методы, прямые методы, экспериментальные исследования.*

Kozyrev A.N., Sveshnikov V.M. Experimental study of the efficiency of solving 2D boundary value problems on subgrids of quasistructured rectangular grids // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 3. — P. 277–288.

An experimental study of the solvers efficiency of 2D boundary value problems on subgrids of quasistructured rectangular grids was carried out. A solver is understood as a solution method and its software implementation. Three solvers are considered: one direct solver — the Buneman cyclic reduction method and two iterative ones: the Peaceman–Rachford method and the method of successive over relaxation. Characteristic features of the studies are: 1) the subgrids contain a small number of nodes, namely 8×8, 16×16, 32×32, 64×64; 2) the efficiency is estimated not only for single calculations, but also mainly for series of calculations, in each of which several repetitions of solving the problem with different boundary conditions on the same subgrid are carried out. Based on serial calculations, a combined method is proposed, and recommendations on the use of solvers are given.

Keywords: *subgrids of quasistructured grids, solvers of boundary value problems, iterative methods, direct methods, experimental studies.*

*Работа выполнена в рамках бюджетного проекта ИВМиМГ СО РАН № 0315-2019-0008.

1. Введение

Квазиструктурированные сетки, предложенные в работе [1], являются компромиссным вариантом по простоте и эффективности применения между структурированными равномерными и неструктурированными сетками. Действительно, структурированные сетки просты в использовании, но требуют введения большого числа лишних узлов, которые необходимы лишь для поддержания структурированности, что не влияет на точность вычислений, а может существенно увеличить время расчета. Неструктурированные сетки, способов построения которых велико (см., например, [2, 3]), адаптивны к решению краевой задачи (именно это свойство является причиной их широкого использования), но требуют хранения большого объема вспомогательной информации, взаимодействие с которой увеличивает время работы численных алгоритмов. Решение 2D краевых задач в настоящей работе ищется на квазиструктурированных сетках методом декомпозиции расчетной области на подобласти, сопрягаемые без пересечения. Метод декомпозиции рассматривался, например, в работах [4–7]. Основой данного метода является проведение итерационного процесса по подобластям (назовем его внешним), на каждом шаге которого решаются краевые подзадачи на подсетках, что составляет преимущественное время решения всей задачи. Поэтому необходимо проведение исследований по решению краевых подзадач на подсетках. Этим исследованиям способствует то обстоятельство, что квазиструктурированные сетки предлагается строить из подсеток ограниченного вида, которые можно назвать кирпичиками. Преимущества такого построения заключаются в том, что эффективность решателей на подсетках-кирпичиках можно изучить заранее и при решении конкретных задач использовать эти результаты для выбора конкретного эффективного решателя. При решении задач в сложных областях исходная квазиструктурированная сетка подвергается локальной модификации [1], что приводит к нарушению прямоугольных шаблонов вблизи сложной границы. Таких нерегулярных шаблонов вдоль границы значительно меньше, чем регулярных шаблонов в основной области. Поэтому необходимо в первую очередь изучить работу решателей на регулярных подсетках, чему посвящена настоящая работа. Рассмотрено три решателя [8, 9]: метод последовательной верхней релаксации (ПВР), метод продольно–поперечных прогонок Писмана–Рэчфорда (ППП) и метод циклической редукции Бунемана (ЦР). Первые два метода — итерационные, а третий — прямой. Выбор данных методов обусловлен следующими соображениями. ППП дает рекордно малое число итераций для достижения заданной точности. ПВР — наиболее простой метод, требующий минимальное число действий на одну итерацию и в то же время при оптимальном итерационном параметре имеющий сравнительно высокую скорость сходимости. ЦР по порядку требует то же число действий, что и быстрое преобразование Фурье, но в отличие от него не использует спектральные свойства матрицы сеточных уравнений. Проведено экспериментальное исследование эффективности данных решателей и даны рекомендации по их применению.

2. Постановка задачи

Пусть требуется найти функцию $\bar{u}$, являющуюся решением краевой задачи:

$$L\bar{u}(T) = g_1(T),\ T \in G, \tag{1}$$

$$l\bar{u}(T) = g_2(T),\ \ T \in \Gamma, \tag{2}$$

где G — расчетная область, Γ — ее граница ($G \cup \Gamma = \bar{G}$), L — эллиптический дифференциальный оператор, l — оператор граничных условий, g_1, g_2 — заданные функции, T —

текущая точка с координатами (x, y). Рассматриваются граничные условия Дирихле и Неймана, причем последние ставятся на прямых, параллельных координатным осям.

Построим в $\bar{G}$ прямоугольную равномерную макросетку Ω_H, которая разбивает $\bar{G}$ на подобласти $\bar{G}_{H,n}$, $n = 1, 2, \ldots, N_H$, где N_H — число подобластей. Если граница области имеет сложную конфигурацию, что характерно для расчета практических устройств, то при этом возникают подобласти следующих типов: 1) внутренние или регулярные, целиком лежащие в области G, 2) граничные, которые, помимо точек G, содержат куски границы Γ, 3) внешние, целиком лежащие вне области. Внешние подобласти исключаются из расчетов. Во внутренних и граничных подобластях, которые мы назовем счетными, проводятся расчеты (более подробно см. [1]). Для этого в каждой счетной подобласти строится своя равномерная прямоугольная подсетка $\Omega_{h,r}$, $r = 1, 2, \ldots, N_r$, где N_r — число счетных подобластей. В подсетках различаются следующие типы узлов: 1) внутренние или регулярные, лежащие в области G и не имеющие в качестве соседа ни одного внешнего узла, 2) граничные, лежащие на границе, 3) внешние, лежащие вне области $\bar{G}$. Граничные узлы, в свою очередь, делятся на два типа: 1) узлы, лежащие на границе с условием Дирихле, 2) узлы, лежащие на границе с условием Неймана. По аналогии с подобластями вводятся счетные узлы, которыми являются внутренние и граничные узлы второго типа.

Объединение подсеток $\Omega_{h,r}$ образует итоговую квазиструктурированную сетку

$$\Omega = \bigcup_{r=1}^{N_r} \Omega_{h,r}. \tag{3}$$

Предметом исследований настоящей статьи будет решение краевых подзадач в подобласти $\bar{G}_h$ на подсетке $\bar{\Omega}_h$ (индексы n, r мы опускаем). Отметим только, что, согласно работе [7], в регулярных подобластях ставятся граничные условия Дирихле, а в граничных подобластях — условия Дирихле на границе сопряжения с регулярными подобластями и исходные граничные условия (2) на кусках границы Γ.

Пусть L_h — оператор, аппроксимирующий оператор L в подобласти G_h на подсетке Ω_h. Если G_h — регулярная подобласть, то в ней решается краевая подзадача:

$$L_h u(T) = g_1(T), \quad T \in \Omega_h, \tag{4}$$

$$u(T) = v(T), \quad T \in \gamma. \tag{5}$$

Здесь введены обозначения: u — приближенное значение функции $\bar{u}$, γ — граница рассматриваемой регулярной подобласти, v — известная функция, полученная на очередном шаге внешнего итерационного процесса.

На подсетке Ω_h оператор L_h определим как

$$\begin{gathered}(L_h u)_{i,j} = -a^1_{i,j} u_{i-1,j} - a^2_{i,j} u_{i,j-1} - a^3_{i,j} u_{i+1,j} - a^4_{i,j} u_{i,j+1} + a^0_{i,j} u_{i,j},\\ i = 1, 2, \ldots, I, \quad j = 1, 2, \ldots, J,\end{gathered} \tag{6}$$

где $a^m_{i,j}$, $m = 0, 1, \ldots, 4$, — известные величины, I, J — числа узлов разностной сетки по координатам x, y соответственно, $\{u_{i,j}\} = u$. Учитывая граничные условия в (6), получим систему линейных алгебраических уравнений, которую запишем в матричном виде:

$$Au = f, \tag{7}$$

где A — квадратная матрица порядка $I \times J$, а u и $f = \{f_{i,j}\}$ — искомый и заданный векторы. Нашей задачей будет экспериментальное исследование решателей системы (7). При этом учитываются характерные особенности расчета на квазиструктурированных сетках: 1) сравнительно малое число узлов в подсетках, 2) малое число видов подсеток. Отметим, что, несмотря на малое число узлов в подсетках, результирующая сетка может иметь большое число узлов. Например, если макросетка Ω_H имеет параметры 32×32, то результирующая сетка Ω будет содержать число узлов, показанное в таблице 1.

Таблица 1. Число узлов в квазиструктурированной сетке Ω при различном числе узлов в подсетках Ω_h

Ω_h	8×8	16×16	32×32	64×64
Ω	65536	262144	1048576	4194304

Исследования проводятся для двух вариантов: 1) одиночный расчет в подобласти, 2) серия расчетов в одной и той же подобласти. Второй вариант обусловлен тем, что в практических задачах расчет каждой подобласти проводится многократно с изменением граничных условий. Например, при решении самосогласованных задач сильноточной электроники в режиме оптимизации (именно этот режим наиболее интересен для приложений), когда имеют место следующие средние значения параметров: 1) число шагов оптимизации — 100, 2) число итераций по нелинейности — 100, 3) число итераций по подобласти — 100, будем иметь 1 000 000 повторов расчета одной и той же подобласти, а всего при макросетке 32×32 — миллиард расчетов подобластей. Из последнего следует актуальность проведения настоящих исследований.

Рассматривается три решателя. Первый — итерационный метод последовательной верхней релаксации с оптимальным параметром релаксации (ПВР). Его достоинства следующие: 1) простота в реализации, 2) широкая область применения. Недостатком является сравнительно большое число итераций, что особенно заметно на сетках с большим числом узлов. Второй — метод продольно-поперечных прогонок Писмана–Рэчфорда (ППП) с оптимальным набором итерационных параметров. Его основное достоинство — уникально малое число итераций, имеющее логарифмическую зависимость от шага подсетки. Недостаток — узкая область применения (строгие условия на матрицу A). Третий — прямой метод циклической редукции Бунемана. Его достоинством является сравнительно широкая область применения, в частности применим для решения осесимметричных задач в двумерной постановке в цилиндрических координатах.

2.1. Метод последовательной верхней релаксации

Метод последовательной верхней релаксации реализуется по формулам:

$$\hat{u}_{i,j}^{n+1} = (f_{i,j} + a_{i,j}^1 u_{i-1,j}^{n+1} + a_{i,j}^2 u_{i,j-1}^{n+1} + a_{i,j}^3 u_{i+1,j}^n + a_{i,j}^4 u_{i,j+1}^n)/a_{i,j}^0,$$
$$u_{i,j}^{n+1} = \omega \hat{u}_{i,j}^{n+1} + (1-\omega) u_{i,j}^n,$$

где $1 \le \omega < 2$ — заданный итерационный параметр, $n = 0, 1, \ldots$ — номер итерации. Оптимальное значение ω_0 выражается через спектральный радиус ρ_Z матрицы перехода в методе Зейделя ($\omega = 1$) как

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho_Z}}.$$

Для вычисления ρ_Z, например, в работе [9] предлагается итерационный алгоритм:

$$\rho_Z^n = \frac{\|u^n - u^{n-1}\|}{\|u^{n-1} - u^{n-2}\|}, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Но, как показали численные эксперименты, при увеличении числа узлов подсетки данный алгоритм дает ошибку в вычислении ω_0, что увеличивает число итераций. В связи с этим, учитывая, что изучаются свойства подсеток-кирпичиков, из которых будут собираться квазиструктурированные сетки, оптимальное значение ω_0 уточнялось экспериментально.

2.2. Метод продольно-поперечных прогонок Писмана–Рэчфорда

Метод продольно-поперечных прогонок Писмана–Рэчфорда для решения системы (7) формально представляет собой алгебраическую задачу, состоящую в вычислении последовательности векторов

$$\begin{aligned} u^{n+1/2} &= u^n - \tau_n^1 (A_x u^{n+1/2} + A_y u^n - f), \\ u^{n+1} &= u^{n+1/2} - \tau_n^2 (A_x u^{n+1/2} + A_y u^{n+1} - f), \end{aligned} \tag{8}$$

где $n = 0, 1, \ldots$ — номер итерации, τ_n^1, τ_n^2 — итерационные параметры, A_x и A_y — трехдиагональные матрицы, определяемые как

$$\begin{aligned} &A_x + A_y = A, \\ &(A_x u)_{i,j} = -a_{i,j}^1 u_{i-1,j} - a_{i,j}^3 u_{i+1,j} + a_{i,j}^{0,x} u_{i,j}, \\ &(A_y u)_{i,j} = -a_{i,j}^2 u_{i,j-1} - a_{i,j}^4 u_{i,j+1} + a_{i,j}^{0,y} u_{i,j}. \end{aligned} \tag{9}$$

Каждая n-я итерация (8), (9) выполняется за два полушага. На первом полушаге решается J “одномерных” систем порядка I:

$$\big(E + \tau_n^1 A_x\big) u^{n+1/2} = f^x, \tag{10}$$

а на втором — I “одномерных” систем порядка J:

$$\big(E + \tau_n^2 A_y\big) u^{n+1} = f^y. \tag{11}$$

Здесь и далее E — единичная матрица, а правые части $f^x = \{f_{i,j}^x\}$, $f^y = \{f_{i,j}^y\}$ вычисляются как

$$\begin{aligned} f_{i,j}^x &= u_{i,j}^n + \tau_n^1 \big(f_{i,j} + a_{i,j}^2 u_{i,j-1}^n + a_{i,j}^4 u_{i,j+1}^n - a_{i,j}^{0,y} u_{i,j}^n\big), \\ f_{i,j}^y &= u_{i,j}^{n+1/2} + \tau_n^2 \big(f_{i,j} + a_{i,j}^1 u_{i-1,j}^{n+1/2} + a_{i,j}^3 u_{i+1,j}^{n+1/2} - a_{i,j}^{0,x} u_{i,j}^{n+1/2}\big). \end{aligned}$$

Если A_x, A_y — симметричные, положительно определенные и перестановочные матрицы, то есть

$$\begin{gathered} A_x^* = A_x, \quad A_y^* = A_y, \\ \lambda_x E \le A_x \le \Lambda_x E, \quad \lambda_y E \le A_y \le \Lambda_y E, \; \lambda_x, \lambda_y, \Lambda_x, \Lambda_y > 0, \\ A_x A_y = A_y A_x, \end{gathered}$$

где символ $*$ означает транспонирование, λ_x, λ_y, Λ_x, Λ_y — границы спектра матриц A_x, A_y, то существует оптимальный набор параметров, при котором число итераций N_{it}, необходимых для достижения заданной точности ε, выражается как

$$N_{\text{it}} \approx \frac{1}{\pi^2} \ln \frac{4}{\varepsilon} \ln \frac{4}{\xi}.$$

Здесь

$$\xi = \frac{1-t}{1+t}, \quad t = \sqrt{\frac{(\Lambda_x - \lambda_x)(\Lambda_y - \lambda_y)}{(\Lambda_x + \lambda_x)(\Lambda_y + \lambda_y)}}.$$

Оптимальные итерационные параметры в методе (8), (9) вычисляются как

$$\tau_n^1 = \frac{q\omega_n + r}{1 + p\omega_n}, \quad \tau_n^2 = \frac{q\omega_n - r}{1 - p\omega_n},$$

где

$$p = \frac{\chi - t}{\chi + t}, \quad \chi = \frac{(\Lambda_x - \lambda_x)\Lambda_y}{(\Lambda_y - \lambda_y)\Lambda_x}, \quad r = \frac{\Lambda_x - \Lambda_y + (\Lambda_x + \Lambda_y)p}{2\Lambda_x\Lambda_y}, \quad q = r + \frac{1-p}{\Lambda_x},$$

$$\omega_n = \frac{(1+2\theta)(1+\theta^\sigma)}{2\theta^{\sigma/2}(1+\theta^{1-\sigma}+\theta^{1+\sigma})}, \quad \theta = \frac{1}{16}\xi^2\left(1+\frac{1}{2}\xi^2\right), \quad \sigma = \frac{2n-1}{2N_{\text{it}}}, \quad n = 1, 2, \ldots, N_{\text{it}}.$$

2.3. Метод циклической редукции Бунемана

Метод циклической редукции является прямым методом. Он асимптотически требует такого же объема вычислений, как и метод быстрого преобразования Фурье, но не требует знания собственных чисел и собственных векторов исходной матрицы. Будем предполагать, что в направлении редукции система (7) удовлетворяет всем необходимым требованиям для реализации данного метода, а именно представима в виде

$$-u_{j-1} + Du_j - u_{j+1} = f_j, \quad j = 1, 2, \ldots, J,$$

где u_j — векторы порядка I, содержащие значения искомой функции на j-й линии $y = y_j$, $u_0 = u_{J+1} = 0$, D — трехдиагональная матрица того же порядка. Предполагается, что $J = 2^k - 1$, где k — целое число.

Редукция состоит из прямого хода и обратного хода. Прямой ход заключается в решении трехдиагональных систем:

$$D^\nu(b_j^{\nu+1} - b_j^\nu) = b_{j-2^\nu}^\nu + b_{j+2^\nu}^\nu + d_j^\nu, \tag{12}$$

где

$$d_j^{\nu+1} = d_{j-2^\nu}^\nu + d_{j+2^\nu}^\nu - 2b_j^{\nu+1}, \quad j = i2^\nu, \quad i = 1, 2, \ldots, 2^{k-\nu} - 1,$$

$$b_j^0 = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, 2^{k+1}, \qquad d_j^0 = f_j, \quad j = 1, \ldots, 2^{k+1} - 1.$$

Здесь b_j^ν, d_j^ν — вспомогательные векторы, $\nu = 1, 2, \ldots, k$ — номер шага прямого хода редукции.

Трехдиагональная матрица D^ν является произведением трехдиагональных матриц:

$$D^\nu = \prod_{j=1}^{2^\nu} \left(D + \cos\frac{(2j-1)\pi}{2^{\nu+1}} E\right).$$

Обратный ход циклической редукции заключается в проведении вычислений по формуле

$$D^\nu \varphi_j^\nu = u_{j-2^\nu}^\nu + u_{j+2^\nu}^\nu + d_j^\nu, \tag{13}$$

$$\nu = k-1, \ldots, 1, \; j = i2^\nu, \; i = 1, 2, \ldots, 2^{k+1-\nu}, \; u_0 = u_{2^{k+1}} = 0,$$

где φ_j^ν — вспомогательные векторы такие, что искомое решение вычисляется по формуле

$$u_j = b_j^k + \varphi_j^k.$$

Решение систем (12), (13) также, как решение “одномерных” систем (10), (11), проводится методом прогонки.

3. Экспериментальные исследования методов

Цель проводимых численных экспериментов — определить среди рассматриваемых наиболее быстрый решатель в подобластях на подсетках с малым числом узлов и условия его применения.

Для этого рассматривалась одна регулярная подобласть, представляющая собой единичный квадрат, в котором решалась задача

$$\Delta_h u = 0, \quad u\,|_\gamma = 1. \tag{14}$$

Здесь Δ_h — обычная пятиточечая аппроксимация оператора Лапласа на квадратной сетке. Аппроксимации проводились на сетках Ω_h следующих размерностей: 8×8, 16×16, 32×32, 64×64. Предполагается, что именно эти сетки играют роль подсеток-кирпичиков при построении квазиструктурированной сетки. Поводом этому послужило решение практической задачи в области со сложной разномасштабной геометрией [10], в которой для построения квазиструктурированной сетки достаточно было данных подсеток-кирпичиков. Начальное приближение было нулевым. Итерации прекращаются при выполнении критерия [9]:

$$\|u^{n+1} - u^n\|_\infty < \varepsilon, \tag{15}$$

где ε — заданная малая величина, которую мы полагаем равной $\varepsilon = 10^{-5}$. Данный критерий, как указано в монографии [9], применим к быстросходящимся методам, к которым относятся рассматриваемые нами методы. Достоинство критерия (15) состоит в том, что он требует минимального количества арифметических действий для своей реализации. Экспериментально проверялось, что сходимость итерационного процесса с точностью ε дает такую же точность решения алгебраической системы (7).

Расчеты выполнялись на персональном компьютере с процессором Core2 Quad CPU Q9400 с частотой 2.66GHz.

Численные эксперименты проводились в двух режимах: 1) одиночный расчет, 2) расчет серии задач с различными граничными условиями.

3.1. Одиночные расчеты

Под одиночным расчетом понимается решение задачи (14) на сетке Ω_h. Для исключения ошибок определения времени расчета вычислялось среднее время T в секундах за $N_{\mathrm{rep}} \geq 10$ повторов решения одной и той же задачи на одной и той же сетке ($T = T_\Sigma/N_{\mathrm{rep}}$, где T_Σ — суммарное время).

В таблице 2 даны времена вычислений T в секундах и число итераций N_{it} для одиночных расчетов по методам: ЦР — циклической редукции, ПВР — последовательной верхней релаксации, ППП — продольно-поперечных прогонок. Кроме того, для метода ПВР приводится оптимальное значение параметра релаксации ω_0.

Из данной таблицы видно, что в одиночном расчете наиболее быстрым методом является ЦР. Несмотря на большее по сравнению с ППП число итераций (от 2.5 до 10), ПВР опережает ППП на сетке 8×8, сравнивается с ним на сетке 16×16 и проигрывает ему приблизительно в 2 и в 3 раза соответственно на сетках 32×32, 64×64. Объяснение преимуществу ПВР состоит в том, что данный метод прост и допускает эффективную реализацию, а также в меньшем числе действий на одну итерацию.

Таблица 2. Времена вычислений T, число итераций N_{it} и оптимальное значение ω_0 для одиночных расчетов

Ω_h		8×8	16×16	32×32	64×64
T	ЦР	2.5×10^{-6}	1.25×10^{-5}	5.6×10^{-5}	2.55×10^{-4}
	ПВР	4.85×10^{-6}	5.5×10^{-5}	4.52×10^{-4}	3.74×10^{-3}
	ППП	6.87×10^{-6}	4.5×10^{-5}	2.31×10^{-4}	1.2×10^{-3}
N_{it}	ПВР	18	38	71	136
	ППП	7	9	11	13
ω_0	ПВР	1.46	1.68	1.83	1.91

3.2. Серии расчетов

Целью данных расчетов является выяснение сравнительных характеристик изучаемых методов при большом числе повторов решения краевой задачи с различными граничными условиями.

Для этого рассматривалась последовательность задач

$$\Delta_h u_k = 0, \quad u_k \,|_\gamma = S_k,$$

где S_k — сумма k членов убывающей геометрической прогрессии ($q < 1$):

$$S_k = 1 - q^k, \quad k = 1, 2, \ldots, K,$$

причем $S_k \to 1$. Число K таково, что $1 - S_k < 10^{-5}$. При решении k–й задачи в итерационных методах в качестве начального приближения берется решение $k-1$ задачи. Было выполнено 6 серий расчетов с различными параметрами геометрической прогрессии, показанными в табл. 3, где N_{s} — номер серии.

Таблица 3. Параметры геометрической прогрессии

N_{s}	1	2	3	4	5	6
q	0.85	0.9	0.95	0.975	0.9875	0.9975
K	71	110	225	455	916	4600

В таблице 4 для наглядности приведены коэффициенты, представляющие собой величины отношений

$$Q_{\text{ЦР}} = \frac{T_{\text{ЦР}}}{T_{\text{ПВР}}}, \qquad Q_{\text{ППП}} = \frac{T_{\text{ППП}}}{T_{\text{ПВР}}},$$

где T_M — время расчета серии по методу M=ЦР, ППП, ПВР. Таким образом, при $Q_M > 1$ ПВР обгоняет метод M.

Из данной таблицы видно, что ПВР обгоняет ППП на сетках 8×8, 16×16, на сетке 32×32 приблизительно сравнивается с ним, а на сетке 64×64 уступает ППП приблизительно в 2 раза. ЦР показывает приблизительно то же время, что и ПВР на сетке 8×8, а на более густых сетках обгоняет ПВР. Проигрыш ПВР уменьшается с увеличением номера серии, т. е. с увеличением числа повторов.

Последний факт наводит на мысль проводить на первых этапах серии расчет циклической редукцией, а затем включать итерационный метод. Такой подход получил название комбинированного метода.

Расчет ЦР проводился до тех пор, пока $1 - S_k < 10^{-2}$, а затем окончательно работал итерационный метод. Ответ на вопрос, какой метод брать ППП или ПВР, дан в табл. 5, в которой приведен коэффициент $Q_{\text{ППП–ПВР}} = \frac{T_{\text{ЦР–ППП}}}{T_{\text{ЦР–ПВР}}}$.

Таблица 4. Коэффициенты $Q_{\text{ППП}}$ (верхние числа) и $Q_{\text{ЦР}}$ (нижние числа) в каждой серии

N_s \ Ω_h	8×8	16×16	32×32	64×64
1	1.98 0.80	1.40 0.44	0.76 0.24	0.45 0.13
2	2.00 0.83	1.43 0.48	0.79 0.26	0.46 0.14
3	2.05 0.95	1.51 0.53	0.82 0.29	0.49 0.17
4	2.11 1.06	1.60 0.63	0.87 0.34	0.51 0.19
5	2.18 1.19	1.71 0.73	0.93 0.40	0.54 0.22
6	2.36 1.65	2.11 1.16	1.18 0.66	0.68 0.38

Таблица 5. Коэффициенты $Q_{\text{ППП}-\text{ПВР}}$

N_s \ Ω_h	8×8	16×16	32×32	64×64
1	1.80	1.69	1.12	0.72
2	1.75	1.70	1.19	0.78
3	1.69	1.72	1.27	0.87
4	1.61	1.71	1.32	0.95
5	1.57	1.68	1.35	1.03
6	1.29	1.36	1.21	1.05

Из данной таблицы видно, что лидирует ПВР почти во всех случаях, за исключением 3 расчетов на сетке 64×64 в сериях с малым числом повторов, в которых ППП незначительно опережает ПВР. Поэтому в качестве метода доитерирования в комбинированном подходе был выбран ПВР.

В таблице 6 дан коэффициент $Q_{\text{ЦР–ПВР}} = \frac{T_{\text{ЦР–ЦР}}}{T_{\text{ЦР–ПВР}}}$.

Таблица 6. Коэффициенты $Q_{\text{ЦР}-\text{ПВР}}$

N_s \ Ω_h	8×8	16×16	32×32	64×64
1	1.22	0.95	0.62	0.38
2	1.27	1.01	0.70	0.42
3	1.39	1.15	0.84	0.58
4	1.52	1.35	1.02	0.73
5	1.67	1.56	1.25	0.94
6	1.90	1.89	1.77	1.66

Из данной таблицы следует преимущество комбинированного метода: 1) на сетках с малым числом узлов (8×8, 16×16) для всех серий, 2) на всех сетках с большим числом повторов (5, 6 серии). Незначительное отставание комбинированного метода наблюдается на сетках 32×32, 64×64 с малым числом повторов.

3.3. Сложная тестовая задача

Данные расчеты повторялись для следующей более сложной тестовой задачи. В цилиндрическом конденсаторе, ограниченном двумя концентрическими окружностями с радиусами $R_1 = 0.1$ и $R_2 = 1$ с заданными на них потенциалами $\varphi(R_1) = 1$, $\varphi(R_2) = 2$, требуется рассчитать электрическое поле, т. е. найти решение задачи

$$\Delta_h \varphi = 0, \quad \varphi\,|_\gamma = g. \tag{16}$$

Здесь $g = g(x, y)$ — заданная функция. Ее аналитическое решение —

$$\varphi(r) = \ln \frac{rR_2}{R_1^2} \Big/ \ln \frac{R_2}{R_1}, \tag{17}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Численное решение данной задачи проводилось в двумерной постановке в декартовых координатах. Рассматриваемая задача решалась не во всей области, а бралась квадратная вырезка из области $R = \{(x, y) : x \in (0,3; 0,7), y \in (0; 0,4)\}$. Граничные условия ставились согласно формуле (17).

В таблице 7 приведены времена расчетов T, число итераций N_{it} и оптимальное значение ω_0, а в табл. 8 — коэффициенты $Q_{\text{ЦР–ПВР}}$ для рассматриваемой задачи.

Таблица 7. Времена вычислений T, число итераций N_{it} и оптимальное значение ω_0 для одиночных расчетов сложной задачи

Ω_h		8×8	16×16	32×32	64×64
T	ЦР	2.5×10^{-6}	1.25×10^{-5}	5.6×10^{-5}	2.55×10^{-4}
	ПВР	5.31×10^{-6}	5.5×10^{-5}	4.67×10^{-4}	3.84×10^{-3}
	ППП	6.87×10^{-6}	4.5×10^{-5}	2.31×10^{-4}	1.2×10^{-3}
N_{it}	ПВР	20	38	77	141
	ППП	7	9	11	13
ω_0	ПВР	1.46	1.68	1.83	1.91

Таблица 8. Коэффициенты $Q_{\text{ЦР–ПВР}}$ для сложной задачи

N_{s} \ Ω_h	8×8	16×16	32×32	64×64
1	1.06	0.80	0.51	0.31
2	1.12	0.87	0.58	0.34
3	1.24	0.99	0.71	0.45
4	1.37	1.20	0.86	0.58
5	1.50	1.41	1.06	0.74
6	1.76	1.74	1.58	1.39

Из данных таблиц видно, что выводы, сделанные для задачи (14), справедливы и для задачи (16).

Резюмируя, скажем: из проведенных экспериментов следует, что при решении сложных нелинейных задач на квазиструктурированных сетках для проведения расчетов в регулярных подобластях можно рекомендовать комбинированный метод ЦР–ПВР.

4. Заключение

Проведено экспериментальное исследование решателей краевых задач на подсетках квазиструктурированных прямоугольных сеток. Необходимость в таких исследованиях возникла в связи с предложением составлять квазиструктурированную сетку из подсеток-кирпичиков вида 8×8, 16×16, 32×32, 64×64 (результирующая сетка при этом может содержать миллионы узлов). Характерной чертой данных сеток является малое число узлов в подсетках и большое число повторов решений на каждой подсетке. Было рассмотрено три решателя: один прямой — метод циклической редукции Бунемана и два итерационных: метод продольно-поперечных прогонок Писмана–Рэчфорда и метод последовательной верхней релаксации. Расчеты проводились в одиночном и серийном режимах (в последнем случае имитируя внешний сходящийся итерационный процесс). На основании проведенных численных экспериментов был предложен подход, согласно которому начальные этапы серии считаются ЦР, а затем включается итерационный метод. При большом числе повторов наиболее эффективным для этого оказался ПВР. Кроме того, к достоинствам метода ПВР относится то, что он требует наименьшее количество памяти для реализации.

Литература

1. **Козырев А.Н., Свешников В.М.** О построении двумерных локально-модифицированных квазиструктурированных сеток и решении на них краевых задач в областях с криволинейной границей // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. — 2017. — Т. 6, № 2. — С. 5–21.
2. **Liseikin V.D.** Grid Generation Methods. — Berlin: Springer-Verlag, 1999.
3. **Шокин Ю.И., Данаев Н.Т., Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю.** Лекции по разностным схемам на подвижных сетках. Часть 2. — Алматы: Изд-во КазНУ им. аль-Фараби, 2008.
4. **Василевский Ю.В., Ольшанский М.А.** Краткий курс по многосеточным методам и методам декомпозиции области. — М.: МГУ, 2007.
5. **Quarteroni A., Valli A.** Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. — Oxford: Clarendon Press, 1999.
6. **Dolean V., Jolivet P., and Nataf F.** An Introduction to Domain Decomposition Methods: Algorithms, Theory and Parallel Implementation. — Philadelphia, USA: SIAM, 2015.
7. **Свешников В.М.** Построение прямых и итерационных методов декомпозиции // Сиб. журн. индустр. матем. — 2009.— Т. 12, № 3. — С. 99–109.
8. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.
9. **Ильин В.П.** Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2001.
10. **Astrelin V.T., Vorobyov M.S., Kozyrev A.N., and Sveshnikov V.M.** Numerical simulation of the operation of a wide-aperture electron gun with a grid plasma emitter and beam extraction into the atmosphere // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2019. — Vol. 60, № 5. — P. 785–792.

Поступила в редакцию 30 января 2020 г.
После исправления 14 октября 2020 г.
Принята к печати 14 апреля 2021 г.

Литература в транслитерации

1. **Kozyrev A.N., Sveshnikov V.M.** O postroenii dvumernyh lokal'no-modifitsirovannyh kvazistrukturirovannyh setok i reshenii na nih kraevyh zadach v oblastyah s krivolineinoi granitsei

// Vestnik YUUrGU. Seriya: Vychislitel'naya matematika i informatika. — 2017. — T. 6, № 2. — S. 5–21.

2. **Liseikin V.D.** Grid Generation Methods. — Berlin: Springer-Verlag, 1999.
3. **Shokin Yu.I., Danaev N.T., Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu.** Lektsii po raznostnym skhemam na podvizhnyh setkah. Chast' 2. — Almaty: Izd-vo KazNU im. al'-Farabi, 2008.
4. **Vasilevskii Yu.V., Ol'shanskii M.A.** Kratkii kurs po mnogosetochnym metodam i metodam dekompozitsii oblasti. — M.: MGU, 2007.
5. **Quarteroni A., Valli A.** Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. — Oxford: Clarendon Press, 1999.
6. **Dolean V., Jolivet P., and Nataf F.** An Introduction to Domain Decomposition Methods: Algorithms, Theory and Parallel Implementation. — Philadelphia, USA: SIAM, 2015.
7. **Sveshnikov V.M.** Postroenie pryamyh i iteratsionnyh metodov dekompozitsii // Sib. zhurn. industr. matem. — 2009.— T. 12, № 3. — S. 99–109.
8. **Samarskii A.A.** Teoriya raznostnyh skhem. — M.: Nauka, 1977.
9. **Il'in V.P.** Metody konechnyh raznostei i konechnyh ob"emov dlya ellipticheskih uravnenii. — Novosibirsk: Izd-vo IVMiMG SO RAN, 2001.
10. **Astrelin V.T., Vorobyov M.S., Kozyrev A.N., and Sveshnikov V.M.** Numerical simulation of the operation of a wide-aperture electron gun with a grid plasma emitter and beam extraction into the atmosphere // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2019. — Vol. 60, № 5. — P. 785–792.