УДК 622.831:542.834

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ ПРИ МЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ ГОРНЫХ ПОРОД В ОБЛАСТИ МАКСИМАЛЬНОГО УПЛОТНЕНИЯ

А. С. Вознесенский, К. Б. Устинов*, В. Л. Шкуратник

Московский государственный горный университет, 119991 Москва
* Институт проблем механики РАН, 119526 Москва
E-mails: ftkp@mail.ru, ustinov@ipmnet.ru

Обосновывается теоретическая модель изменения активности акустической эмиссии в геоматериале при его механическом непрерывном и ступенчатом нагружении. На основе указанной модели анализируются экспериментально установленные закономерности эмиссии в области максимального уплотнения образцов горных пород при различной скорости их механического нагружения.

Ключевые слова: активность акустической эмиссии, теоретическая модель, разрушение горных пород, ступенчатое нагружение, линейно возрастающее нагружение.

Введение. Механическое нагружение горных пород сопровождается двумя взаимосвязанными и происходящими одновременно процессами: образованием новых дефектов сплошности и уплотнением, вызванным закрытием трещин. На разных стадиях деформирования преобладает один из указанных процессов. Для практики геоконтроля, в частности, для оценки длительной прочности и прогноза разрушения большое значение имеет установление стадии, на которой наблюдается переход от преобладающего уплотнения геоматериала к его разуплотнению. Область такого перехода принято называть областью максимального уплотнения. Ее идентификация возможна по двум акустоэмиссионным эффектам, наиболее четко проявляющимся в пластичных горных породах и угле [1, 2]. Первый из этих эффектов состоит в том, что при непрерывном увеличении нагрузки на образец минимальная активность акустической эмиссии (ААЭ) наблюдается в момент максимального уплотнения геоматериала. Второй эффект проявляется при ступенчатом нагружении образца и заключается в следующем. На каждой ступени нагружения величина ААЭ после кратковременного возрастания затухает по экспоненте в соответствии с зависимостью

$$E_i(t) = a_0 + a_1 \exp(-t/a_2), \qquad (1)$$

где a_0, a_1, a_2 — параметры, характеризующие соответственно установившееся значение ААЭ, скачок ААЭ после нагружения на очередной i-й ступени, время затухания ААЭ до установившегося значения. При этом состоянию максимального уплотнения соответствует минимальное значение параметра a_2.

Для правильной интерпретации результатов акустоэмиссионных наблюдений, получаемых в том числе и в натурных условиях, необходима разработка теоретической модели, объясняющей названные выше эффекты. В данной работе рассмотрен один из возможных

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-05-64885-а) и фонда “Ведущие научные школы России” (грант № НШ-1467.2003.5).

вариантов такой модели, в основу которой положена концепция о статистической природе индивидуального акта разрушения, сопровождаемого акустической эмиссией. При этом предполагается, что материал (горная порода) обладает спектром параметров, определяющих процесс разрушения.

1. Статистическая модель. Для объяснения акустоэмиссионных эффектов, возникающих при деформировании геоматериалов, широко используются модели, основанные на термоактивационных механизмах разрушения [3–5]. Согласно концепции, изложенной в [4, 5], процесс разрушения определяется последовательным разрывом индивидуальных связей соответствующих структурных элементов. Если $P = P(\sigma)$ — вероятность акта разрушения индивидуальной связи под действием напряжения σ, а ω — собственная частота колебаний структурных элементов, соединяемых этой связью, то непрерывно будут возникать ω ситуаций, когда связь разрушается. Вероятность разрушения в течение времени dt составляет $P\omega\,dt$, вероятность того, что в течение времени t разрыва не произойдет, равна $(1-P)^{\omega t}$. Если N_0 — исходное число нагруженных связей, то число связей, сохранившихся по истечении времени t, составляет $N_0(1-P)^{\omega t}$, а число связей, разрушенных в интервале времени от t до $t+dt$, равно [4]

$$dN = N_0(1-P)^{\omega t} P\omega\,dt. \tag{2}$$

Отношение числа разрушенных к моменту t связей к их исходному числу (относительная накопленная поврежденность) составляет $1-(1-P)^{\omega t}$. Зависимость (2) справедлива для процессов разрушения на различных масштабных уровнях с характерным временем $1/\omega$.

Предположим, что активность акустической эмиссии E, представляющая собой количество актов дискретной акустической эмиссии в единицу времени, пропорциональна скорости разрушения связей. Тогда согласно (2) получаем выражение

$$E = \frac{dN}{dt} = N_0(1-P)^{\omega t} P\omega,$$

которое справедливо при постоянном напряжении.

Ступенчатое возрастание напряжений. Рассмотрим процесс ступенчатого изменения нагрузки со временем. Пусть в интервале времени от t_0 до t_1 действует напряжение $\sigma(t_0)$, а начиная с момента времени t_1 до текущего момента времени t на образец действует напряжение $\sigma(t_1)$. Тогда вероятность единичного акта разрушения в текущий момент времени составляет

$$dN = N_0[1-P(\sigma(t_0))]^{\omega(t_1-t_0)}[1-P(\sigma(t_1))]^{\omega(t-t_1)} P(\sigma(t_1))\omega\,dt,$$

при этом

$$E(t) = N_0[1-P(\sigma(t_0))]^{\omega(t_1-t_0)}[1-P(\sigma(t_1))]^{\omega(t-t_1)} P(\sigma(t_1))\omega, \qquad t > t_1. \tag{3}$$

Если с момента начала эксперимента образец испытал M скачков напряжения, продолжительность каждого из которых равна Δt, то согласно правилу вычисления условной вероятности вероятность единичного акта разрушения в текущий момент времени составляет

$$dN = N_0 \prod_{m=1}^{M} [1-P(\sigma(t_m))]^{\omega\Delta t} P(\sigma(t_M))\omega\,dt, \tag{4}$$

при этом

$$E(t) = N_0 \prod_{m=1}^{M} [1-P(\sigma(t_m))]^{\omega\Delta t} P(\sigma(t_M))\omega, \qquad t > t_M. \tag{5}$$

Непрерывное нагружение. Найдем предел выражения (5) при $\Delta t \to 0$, что соответствует непрерывному процессу нагружения. Для этого левую и правую части соотношения (5) разделим на $N_0 P(\sigma(t_M))\omega$ и прологарифмируем его. В результате получим

$$\ln \frac{E(t)}{N_0 \omega P(\sigma(t_M))} = \omega \Delta t \sum_{m=1}^{M} \ln\left[1 - P(\sigma(t_m))\right] N_0, \qquad t > t_M.$$

При переходе к пределу $\Delta t \to 0$ суммирование заменим интегрированием:

$$\ln \frac{E(t)}{N_0 \omega P(\sigma(t))} = \omega \int_0^t \ln\left[1 - P(\sigma(\tau))\right] d\tau.$$

Тогда зависимость ААЭ от времени определяется по формуле

$$E(t) = N_0 \omega P(\sigma(t)) \exp\left[\omega \int_0^t \ln\left[1 - P(\sigma(\tau))\right] d\tau\right]. \tag{6}$$

Обычно при выводе подобных формул используется свойство малости выражения $1 - [1 - P(\sigma(t_m))]^{\omega \Delta t}$. Учитывая данное свойство, правую часть формулы (4) можно разложить по соответствующему малому параметру и, оставляя лишь главные члены, записать в виде

$$E(t) = N_0 \left[1 - \sum_{m=0}^{M} P(\sigma(t_m)) \omega \Delta t\right] P(\sigma(t_M))\omega, \qquad t > t_M.$$

Используя переход к пределу $\Delta t \to 0$, для непрерывной нагрузки получаем

$$E(t) = N_0 \omega P(\sigma(t)) \left[1 - \omega \int_0^t P(\sigma(\tau))\, d\tau\right]. \tag{7}$$

Результаты сравнения приближенного выражения (7) с более точным (6) показывают, что (7) справедливо при малых величинах относительной накопленной поврежденности, определяемой интегралами в правых частях выражений (6) и (7).

Для вывода закона изменения ААЭ применительно к конкретному материалу необходимо задать характерную для этого материала зависимость вероятности акта разрушения от напряжения $P(\sigma)$. Данная модель описывает поведение материалов, в которых все элементы обладают одинаковыми прочностными характеристиками. Для реальных материалов (таких как горные породы), являющихся неоднородными, естественно предположить существование распределения слагающих элементов по их прочности. Разбив все элементы на K прочностных групп и предположив, что поведение каждой группы не зависит от поведения других групп, соотношение (6) можно записать в следующем виде:

$$E(t) = \sum_{k=1}^{K} N_k \omega_k P_k(\sigma(t)) \exp\left[\omega_k \int_0^t \ln\left[1 - P_k(\sigma(\tau))\right] d\tau\right]. \tag{8}$$

Осуществив предельный переход, соответствующий плавному распределению свойств, из (8) получим

$$E(t) = \int_0^{N_0} \omega(N) p(N, \sigma(t)) \exp\left[\omega(N) \int_0^t \ln\left[1 - p(N, \sigma(\tau))\right] d\tau\right] dN. \tag{9}$$

В качестве параметра, характеризующего прочность рассматриваемой группы элементов, примем характерное для этой группы разрушающее напряжение σ_0. Тогда

$$E(t) = \int\limits_0^{\sigma_{\max}} Q(\sigma_0)\omega(\sigma_0)P(\sigma_0,\sigma(t)) \exp\Big[\omega(\sigma_0)\int\limits_0^t \ln\left[1 - P(\sigma_0,\sigma(\tau))\right] d\tau\Big]\, d\sigma_0. \qquad (10)$$

Здесь функция $Q(\sigma) = dN/d\sigma$ характеризует плотность распределения элементов по их прочности. Верхний предел интегрирования в (10) можно положить равным бесконечности (при этом функция $Q(\sigma)$ должна быть равной нулю начиная с некоторого значения).

Пусть закон $P(\sigma)$ такой, что разрушения элемента не происходит, если приложенные напряжения не превышают некоторого значения. При этом верхний предел интегрирования в (10) можно положить равным действующему напряжению σ. Кроме того, для удобства вместо частоты ω введем характерное время разрушения $t_0 = 1/\omega$. Тогда

$$E(t) = \int\limits_0^{\sigma} \frac{Q(\sigma_0)}{t_0(\sigma_0)}\, P(\sigma_0,\sigma(t)) \exp\Big[\frac{1}{t_0(\sigma_0)}\int\limits_0^t \ln\left[1 - P(\sigma_0,\sigma(\tau))\right] d\tau\Big]\, d\sigma_0. \qquad (11)$$

Итак, в общем случае $E(t)$ является функционалом, зависящим от трех параметров: распределения прочности $Q(\sigma_0)$, спектра характерных времен разрушения $t_0(\sigma_0)$, спектра зависимостей вероятности акта разрушения от действующего напряжения $P(\sigma_0,\sigma(\tau))$.

2. Конкретизация зависимости вероятности разрушения от действующего напряжения. Рассмотрим случай, когда разрушения элемента не происходит, если приложенные напряжения не превышают некоторого значения σ_0, т. е. $P(\sigma_0) = 0$ (причем с ростом напряжения σ вероятность разрушения растет, приближаясь к единице). Существует бесконечное множество функций данного вида (например, интеграл от логнормального распределения, комбинация степеней и др.). Выбор функции определяется удобством и простотой получаемых выражений. С учетом этого выберем зависимость в виде

$$P(\sigma_0,\sigma(t)) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-a(\sigma_0)(\sigma(t) - \sigma_0)\right], & \sigma(t) > \sigma_0, \\ 0, & \sigma(t) < \sigma_0. \end{cases} \qquad (12)$$

Функция $a(\sigma)$ характеризует скорость нарастания вероятности разрушения с увеличением напряжений σ.

Подставив (12) в (11), получим выражение для произвольной зависимости нагрузки от времени. (Наличие в полученном выражении двойного интеграла осложняет его непосредственное использование.)

Для введенной зависимости рассмотрим два случая нагружения: ступенчатое и нагружение с постоянной скоростью.

Ступенчатое нагружение. Рассмотрим случай, когда образец выдерживается под нагрузкой σ_0 значительное время t_1, а затем задается мгновенное приращение нагрузки $d\sigma$. Для того чтобы определить зависимость $E(t - t_1)$, используем промежуточное выражение (3). Подобно (9)–(11) проинтегрируем его по всему спектру прочностей элементов:

$$E(t) = \int\limits_0^{\sigma} \frac{Q(\sigma')}{t_0(\sigma')}\, [1 - P(\sigma_0)]^{t_1/t_0(\sigma_0)} [1 - P(\sigma')]^{(t-t_1)/t_0(\sigma')} P(\sigma')\, d\sigma', \qquad t > t_1 \qquad (13)$$

(σ' — переменная интегрирования).

Если образец выдерживается под напряжением σ_0 достаточно долго ($t_1 \gg t_0(\sigma_0)$), то можно предположить, что практически все элементы с начальной прочностью, меньшей σ_0, разрушатся. Тогда выражение (13) упростится следующим образом:

$$E(t) = \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{Q(\sigma')}{t_0(\sigma')} \left[1 - P(\sigma')\right]^{(t-t_1)/t_0(\sigma')} P(\sigma')\, d\sigma', \qquad t > t_1. \tag{14}$$

Подставив (12) в (14), получим соотношение

$$E(t) = \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{Q(\sigma')}{t_0(\sigma')} \exp\Big(- a(\sigma_0)(\sigma' - \sigma_0)\, \frac{t - t_1}{t_0(\sigma')}\Big) \big\{1 - \exp\left[-a(\sigma_0)(\sigma' - \sigma_0)\right]\big\}\, d\sigma', \qquad t > t_1.$$

В случае достаточно плавного изменения функций $Q(\sigma)$, $t_0(\sigma)$ и $a(\sigma)$ их можно считать постоянными на интервале интегрирования. Кроме того, для удобства сдвинем отсчет времени, так что приращение напряжения осуществляется в начальный момент $t = 0$:

$$E(t) = \frac{Q(\sigma)}{t_0(\sigma)} \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \exp\Big(- a(\sigma_0)(\sigma' - \sigma_0)\, \frac{t}{t_0(\sigma')}\Big) \big\{1 - \exp\left[-a(\sigma)(\sigma' - \sigma)\right]\big\}\, d\sigma', \quad t > t_1. \tag{15}$$

Интегрирование в (15) может быть выполнено в аналитическом виде, а окончательный результат записан следующим образом:

$$E(t) = \frac{Q}{a}\Big(\frac{\exp\left[-a(\sigma - \sigma_0)(1 + t/t_0)\right]}{t + t_0} - \frac{\exp\left[-a(\sigma - \sigma_0)t/t_0\right]}{t} + \frac{t_0}{t(t + t_0)}\Big), \quad t > t_1. \tag{16}$$

Из выражений (15), (16) следует, что затухание сигнала не является строго экспоненциальным и характеризуется целым спектром времен затухания. Этим, в частности, можно объяснить наблюдаемое в экспериментах замедление затухания сигнала со временем. Однако если приращение напряжения $\Delta\sigma = \sigma - \sigma_0$ достаточно мало, то в первом приближении интеграл (15) можно вычислить по формуле трапеции

$$E(t) \approx \Delta\sigma (E(\sigma) + E(\sigma_0))/2 = a_1(\sigma, \Delta\sigma) \exp\left[-t/a_2(\sigma, \Delta\sigma)\right], \qquad t > t_1,$$

где

$$a_1(\sigma, \Delta\sigma) = \Delta\sigma\, \frac{Q(\sigma)}{t_0(\sigma)}\, \frac{1 - \exp\left[-a(\sigma)\Delta\sigma\right]}{2} = \Delta\sigma\, \frac{Q(\sigma)P(\sigma)}{2t_0(\sigma)}, \qquad a_2(\sigma, \Delta\sigma) = \frac{t_0(\sigma)}{a(\sigma)\Delta\sigma}. \tag{17}$$

В ходе экспериментов величина $\Delta\sigma$ обычно постоянна, а параметры (17) модели измеряются.

Нагружение с постоянной скоростью. Рассмотрим случай, когда образец нагружается с постоянной скоростью

$$\sigma(t) = bt$$

(b — постоянный коэффициент). Подставляя данное выражение в (12), а (12) в (11), получаем выражение, в котором внутренний интеграл может быть вычислен аналитически. В результате имеем

$$E(t) = \int\limits_{0}^{\sigma} \frac{Q(\sigma_0)}{t_0(\sigma_0)} \left[1 - \exp\left(-a(\sigma_0)(\sigma - \sigma_0)\right)\right] \exp\Big(- \frac{a(\sigma_0)}{2bt_0(\sigma_0)}\, (\sigma - \sigma_0)^2\Big)\, d\sigma_0.$$

В ряде случаев, например когда увеличение нагрузки осуществляется с постоянной скоростью, целесообразно записать зависимость ААЭ от напряжения, а не от времени:

$$E(\sigma) \equiv \frac{dN}{d\sigma} = \frac{dN}{dt}\,\frac{dt}{d\sigma} = \frac{E(t)}{b} =$$

$$= \frac{1}{b}\int\limits_0^\sigma \frac{Q(\sigma_0)}{t_0(\sigma_0)}\,[1-\exp\,(-a(\sigma_0)(\sigma-\sigma_0))]\exp\Big(-\frac{a(\sigma_0)}{2bt_0(\sigma_0)}\,(\sigma-\sigma_0)^2\Big)\,d\sigma_0. \qquad (18)$$

Используя приведенные выше обозначения и результаты, формулу (18) можно записать в виде

$$E(\sigma) = \frac{2}{b}\int\limits_0^\sigma a_1(\sigma_0)\exp\Big(-\frac{(\sigma-\sigma_0)^2}{2ba_2(\sigma_0)}\Big)\,d\sigma_0.$$

3. Пример расчета. Проведем расчет ААЭ при непрерывно увеличивающейся нагрузке, используя функцию $a_2(\sigma)$, полученную на основе данных лабораторных испытаний образцов угля при ступенчатом нагружении с боковым давлением 10 МПа.

Пусть два образца нагружаются с постоянной скоростью $\sigma(t) = bt$ ($b = 1$). Для первого из них (модельный образец) параметры зависимости (1) постоянны: $a_1 = 50$, $a_2 = 10$, для второго (реальный угольный образец) эти параметры зависят от напряжения следующим образом:

$$a_1 = 147 - 9{,}246\sigma + 0{,}166\sigma^2 + 0{,}000\,498\sigma^3; \qquad (19)$$

$$a_2 = 7{,}626 + 0{,}496\sigma - 0{,}0378\sigma^2 + 0{,}000\,573\sigma^3. \qquad (20)$$

Зависимости (19), (20), полученные путем аппроксимации соответствующих экспериментальных данных полиномами третьей степени, представлены на рис. 1,*а*,*б* соответственно.

На рис. 2 приведена зависимость ААЭ от напряжения для реального угольного образца и модельного образца с постоянными свойствами. Из рис. 2 следует, что в рамках предложенной модели с учетом изменения ААЭ при ступенчатом нагружении можно рассчитать согласующийся с экспериментальными данными закон изменения ААЭ при непрерывном увеличении нагрузки.

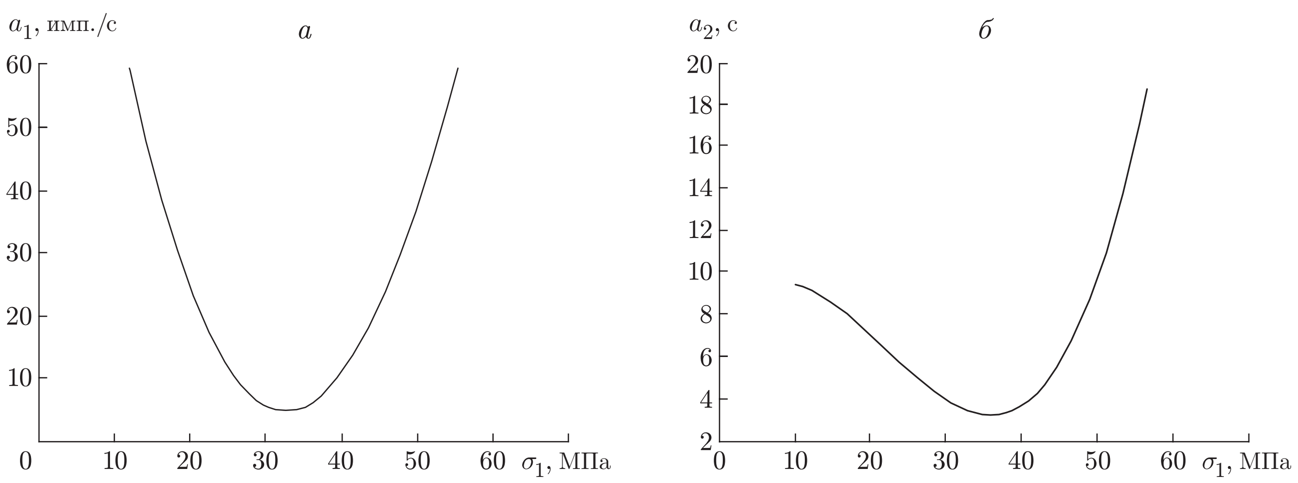

Рис. 1. Зависимости амплитуды ААЭ (*а*) и времени затухания (*б*) от осевой нагрузки

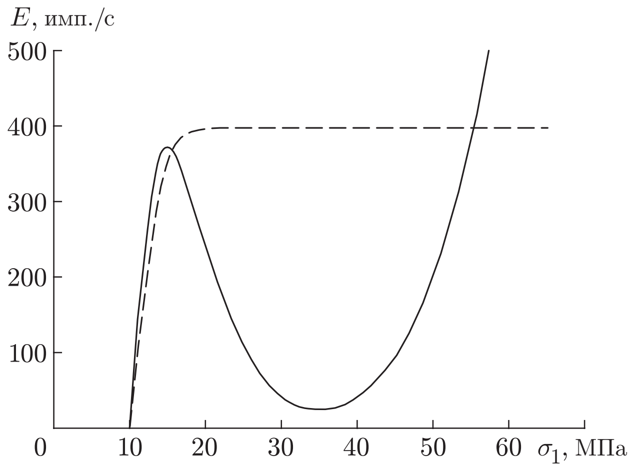

Рис. 2

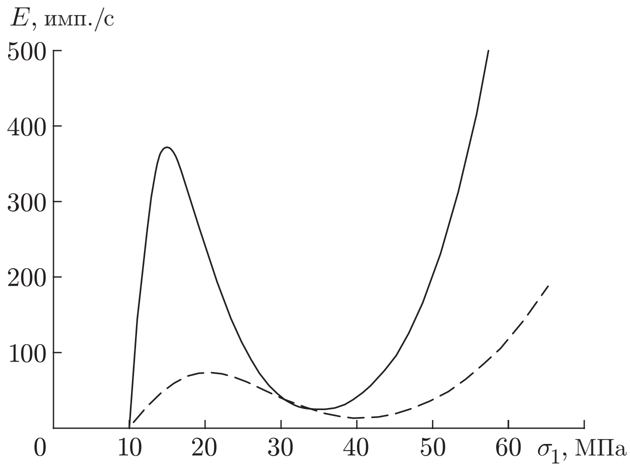

Рис. 3

Рис. 2. Зависимость ААЭ от осевого напряжения при линейном возрастании нагрузки:

сплошная линия — реальный угольный образец; штриховая линия — модельный образец с постоянными свойствами

Рис. 3. Зависимость ААЭ от осевого напряжения при скоростях возрастания нагрузки $b = 1$ (сплошная линия) и $b = 10$ (штриховая линия)

Помимо двух описанных выше акустоэмиссионных эффектов, проявляющихся при непрерывном и ступенчатом увеличении нагрузки, полученная модель позволяет объяснить еще один эффект, наблюдаемый в экспериментах. Этот эффект проявляется в особенностях изменения ААЭ при различных скоростях возрастания нагрузки (рис. 3): с увеличением скорости возрастания нагрузки в области максимального уплотнения отношение максимального значения ААЭ к ее минимальному значению уменьшается. Степень проявления этого эффекта определяется соотношением между временем, в течение которого увеличивающаяся нагрузка проходит стадию максимального уплотнения, и временем затухания ААЭ после приложения нагрузки на предыдущей стадии нагружения. При небольшой скорости нагружения, когда время прохождения стадии максимального уплотнения достаточно велико по сравнению с временем последействия процессов предшествующей стадии, минимум ААЭ четко выражен. При увеличенной по сравнению с первым случаем скорости нагружения время прохождения стадии максимального уплотнения становится сравнимым с временем последействия предшествующей стадии или меньшим. В результате проявляется маскирующее действие ААЭ, предшествующей максимальному уплотнению на стадии нагружения. В предельном случае такая "маскировка" может привести к исчезновению минимума ААЭ в состоянии максимального уплотнения.

Заключение. Разработанная теоретическая модель, основанная на положениях статистической теории прочности, позволяет объяснить аномалии акустической эмиссии, наблюдаемые при непрерывном и ступенчатом механическом нагружении горных пород в области максимального уплотнения, а также влияние на указанные аномалии скорости изменения нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вознесенский А. С., Тавостин М. Н., Демчишин Ю. В.** Эффект изменения времени затухания акустической эмиссии в состоянии максимального уплотнения каменной соли // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2002. № 1. С. 3–11.

2. **Вознесенский А. С., Тавостин М. Н., Гладкий А. Ю., Мизгин Г. Н.** Акустическая эмиссия при ступенчатом деформировании образцов угля // Физическая акустика. Распространение и дифракция волн. Геоакустика: Сб. тр. XV сессии Рос. акуст. о-ва. М.: ГЕОС, 2004. Т. 1. С. 287–290.
3. **Журков С. Н., Нарзуллаев Б. Н.** Временная зависимость прочности твердых тел // Журн. техн. физики. 1953. Т. 23. С. 1677–1689.
4. **Bueche F.** Tensile strength of plastics below the glass temperature // J. Appl. Phys. 1957. V. 28. P. 784–799.
5. **Bueche F.** Tensile strength of plastics: effects of flaws and chain relaxation // J. Appl. Phys. 1958. V. 29. P. 1231–1246.

Поступила в редакцию 27/IX 2005 г.