УДК 532.526
DOI: 10.15372/PMTF202315289

ВОЗБУЖДЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ СТРУКТУР ВНЕШНИМИ ВИХРЕВЫМИ И ТЕПЛОВЫМИ ВОЛНАМИ

С. А. Гапонов

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия
E-mail: gaponov@itam.nsc.ru

Исследуются продольные структуры, создаваемые внешними вихревыми и тепловыми волнами в дозвуковых и сверхзвуковых пограничных слоях. Особое внимание уделено постановке граничных условий на внешней границе пограничного слоя. Установлено, что возмущения продольной скорости внутри пограничного слоя могут превышать амплитуду внешней вихревой волны в несколько раз. С увеличением числа Маха эффективность возбуждения уменьшается. Показано, что влияние тепловых внешних волн на структуру потока в пограничном слое значительно слабее влияния вихревой структуры потока.

Ключевые слова: пограничный слой, продольные структуры, сверхзвуковой поток, ламинарно-турбулентный переход

Введение. В данной работе исследуется переход ламинарного течения в турбулентное в пограничном слое на плоской пластине. Переход пограничного слоя из ламинарного состояния в турбулентное обычно классифицируется как естественный или обходной переход.

Естественный переход является доминирующим при низком уровне турбулентности во внешнем потоке. Взаимодействие внешних возмущений с пограничным слоем или малые возмущения, налагаемые непосредственно внутри пограничного слоя, порождают характерные нестационарные колебания, которые усиливаются на достаточно больших расстояниях от передней кромки пластины. При достижении больших амплитуд происходит нелинейное взаимодействие, которое завершается переходом ламинарного пограничного слоя в турбулентное состояние.

Обходной переход происходит при высоких уровнях возмущений свободного потока и характеризуется образованием стационарных продольных структур. Продольные структуры могут наблюдаться как в результате нелинейного взаимодействия косых волн, обычно в области неустойчивости [1], так и в области устойчивости вследствие линейного взаимодействия внешнего турбулентного потока с пограничным слоем.

Первые исследования [2] течения в пограничном слое при наличии внешнего турбулентного потока показали, что в пограничном слое вблизи передней кромки пластины наблюдаются низкочастотные осцилляции. Эти исследования были продолжены в работе [3], в которой также описаны полосчатые структуры. Позднее эти структуры, показанные на рис. 1, взятом из работы [4], были названы модами Клебанова.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 22-19-00666).

Рис. 1. Визуализация полосчатых структур в пограничных слоях, порожденных внешним турбулентным течением [4]

Первые теоретические исследования малых двумерных стационарных возмущений в несжимаемом пограничном слое на плоской пластине, проведенные в работах [5–7], показали, что возмущения параметров потока в пограничном слое затухают по степенному закону.

Показатели степени затухания являются собственными числами сформулированной задачи на собственные значения.

Интерес к исследованию продольных структур во многом определен работой [1], в которой они были обнаружены экспериментально. Как отмечено выше, их природа может быть обусловлена как нелинейным взаимодействием возмущений, так и линейным взаимодействием внешнего турбулентного потока с пограничным слоем.

Взаимодействие внешнего турбулентного потока с дозвуковым пограничным слоем на плоской пластине исследовалось экспериментально в [3, 8, 9] и других работах, обзор которых приведен в [4]. Во всех этих работах отмечено, что в результате взаимодействия внешнего турбулентного потока с дозвуковым пограничным слоем в устойчивой относительно малых возмущений области наблюдаются продольные структуры. Профиль продольной скорости возмущений, возбуждаемых внешним турбулентным потоком, по крайней мере, в низкочастотном диапазоне, имеет колоколообразную форму [9], максимум скорости находится на расстоянии от стенки $y^*/\delta \approx 2{,}5$ ($\delta = \sqrt{\nu_\infty x^*/u_\infty}$; x^* — расстояние от передней кромки пластины; y^* — расстояние до стенки; u_∞, ν_∞ — скорость и кинематическая вязкость газа в набегающем потоке).

Впервые взаимодействие внешнего продольного вихря с дозвуковым пограничным слоем теоретически исследовано в работе [10]. Установлено, что под действием периодического в боковом направлении внешнего течения амплитуда волнообразной продольной структуры в пограничном слое обратно пропорциональна его периоду и линейно увеличивается вниз по течению. Полученная зависимость совпадает с зависимостью амплитуды возмущения от толщины пограничного слоя, приведенной в [7]. Зависимость амплитуды возмущения продольной скорости от нормальной координаты в работе [10] была аналогична соответствующей зависимости, полученной в работах [5, 6].

Следует отметить, что теория [10] применима только в случае достаточно больших периодов внешней завихренности. Более точные результаты получены в работе [11] с использованием параболизованных уравнений устойчивости. В отличие от зависимостей, приведенных в [10], зависимости амплитуды продольной скорости от продольной координаты и периода волны, полученные в данной работе, являются немонотонными.

Теоретические и численные исследования генерации внешними волнами стационарных возмущений в дозвуковом пограничном слое были продолжены в работах [12–18].

В приближении параллельного невозмущенного течения взаимодействие внешнего турбулентного потока с пограничным слоем может быть описано с помощью непрерывного спектра задачи устойчивости. Впервые связь между непрерывным спектром и задачей о взаимодействии внешних (акустических) возмущений с параллельным потоком в пограничном слое была установлена в работе [19]. Возможность описания взаимодействия вихревых возмущений внешнего потока с пограничным слоем с помощью непрерывного спектра была подтверждена в работах [20, 21].

В данной работе проводится расчет амплитуды стационарных возмущений продольной скорости, возбуждаемых внутри пограничного слоя не только внешними вихревыми, но и тепловыми волнами при обтекании пластины с дозвуковой и сверхзвуковой скоростями.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассматривается линейная постановка. В качестве исходного невозмущенного потока принимается течение сжимаемого газа в пограничном слое на плоской пластине.

Следуя работе [22], возмущения в пограничном слое будем рассматривать в ортогональной безразмерной системе координат (ξ, ψ, z), связанной с поверхностями линий тока основного течения (ψ — функция тока, отнесенная к вязкости набегающего потока; ξ, z — продольная и боковая координаты, умноженные на единичное число Рейнольдса u_∞/ν_∞. Для пластины $\xi = x + O(\mathrm{Re}^{-2})$, где $\mathrm{Re} = \sqrt{x}$; x — безразмерное расстояние от передней кромки пластины. Газ полагается совершенным, с постоянным числом Прандтля Pr. Оценивая члены в уравнениях Навье — Стокса по целым степеням числа Рейнольдса и пренебрегая членами порядка Re^{-2} относительно главных членов линеаризованных уравнений Навье — Стокса для возмущений вида $\boldsymbol{Z}(x,\psi)\,\mathrm{e}^{i\alpha x + i\beta z - i\omega t}$, где $\boldsymbol{Z} = (\tilde{p}, \tilde{v}, \tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{h}, \tilde{\tau}_{12}, \tilde{\tau}_{23}, \tilde{q})$, можно получить безразмерные уравнения [22, 23]

$$
\begin{gathered}
\partial_2\tilde{v} = -(\partial_2 \ln\rho)\tilde{v} - [i\alpha - (\partial_1 \ln u) + \partial_1]\tilde{u} - i\beta\tilde{w} - u_c\tilde{\rho}/\rho - g_m u\,\partial_1\tilde{p} + u\,\partial_1(\tilde{T}/T),\\
\partial_2[\tilde{p} + 2\mu(i\alpha\tilde{u} + i\beta\tilde{w} - 2\tilde{e}_0/3)] = -\rho(h_1 u + d_t)\tilde{v} + i\alpha\tilde{\tau}_{12} + i\beta\tilde{\tau}_{23},\\
\partial_2\tilde{\tau}_{12} = (i\alpha + \partial_1)\tilde{p} + \rho(\partial_2 u)\tilde{v} + \rho(\partial_1 u + d_t)\tilde{u} + u(\partial_1 u)\tilde{\rho} - i\alpha\tilde{\tau}_{11} - i\beta\tilde{\tau}_{13},\\
\partial_2\tilde{u} = -(i\alpha + \partial_1)\tilde{v} - (\partial_2 u)\tilde{\mu}/\mu + \tilde{\tau}_{12}/\mu,\\
\partial_2\tilde{\tau}_{23} = i\beta\tilde{p} + \rho d_t\tilde{w} - i\alpha\tilde{\tau}_{13} - i\beta\tilde{\tau}_{33}, \qquad \partial_2\tilde{w} = -i\beta\tilde{v} + \tilde{\tau}_{23}/\mu,\\
\partial_2\tilde{q} = i\omega\tilde{p} + [\rho(\partial_2 H) - i\alpha\mu(\partial_2 u)]\tilde{v} + (\partial_1 H)(\rho\tilde{u} + u\tilde{\rho}) + \\
+ (\alpha^2 + \beta^2)\mu\tilde{h}/\Pr + \rho d_t\tilde{H} - u(i\alpha\tilde{\tau}_{11} + i\beta\tilde{\tau}_{13}),\\
\partial_2\tilde{h} = -\Pr(\partial_2 u)\tilde{u} - (\partial_2 h)\tilde{\mu}/\mu + \Pr(\tilde{q} - u\tilde{\tau}_{12})/\mu,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $\partial_1 = \partial/\partial\xi$; $\partial_2 = \rho u\,\partial/\partial\psi$; $d_t = u_c + u\,\partial_1$; $u_c = i\alpha u - i\omega$; $h_1 = -\partial_1 \ln(\rho u)$; $\tilde{\tau}_{11} = 2\mu(i\alpha\tilde{u} - \tilde{e}_0/3)$; $\tilde{\tau}_{13} = \mu(i\alpha\tilde{w} + i\beta\tilde{u})$; $\tilde{\tau}_{33} = 2\mu(i\beta\tilde{w} - \tilde{e}_0/3)$; $\tilde{e}_0 = -(\partial_2 \ln\rho)\tilde{v} - u_c\tilde{\rho}/\rho$; u — скорость; T — температура; ρ — плотность; p — давление; $H = h + u^2/2$ — полная энтальпия; μ — молекулярная вязкость; $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ — комплексные амплитуды продольной, нормальной к поверхности и трансверсальной составляющих возмущения скорости; $\tilde{\rho}/\rho = g_m\tilde{p} - \tilde{T}/T$; $\tilde{T} = g_{m1}\tilde{h}$; $\tilde{H} = \tilde{h} + u\tilde{u}$; $g_m = \gamma\,\mathrm{M}^2$; $g_{m1} = (\gamma - 1)\,\mathrm{M}^2$; $\gamma = c_p/c_V$ — отношение теплоемкостей; M — число Маха. Обезразмеривание проведено с помощью масштабов длины ν_∞/u_∞, времени ν_∞/u_∞^2, вязкости и функции тока μ_∞, скорости и ее возмущений u_∞, температуры T_∞, плотности ρ_∞, энтальпии u_∞^2, давления и возмущений вязкостных напряжений $\rho_\infty u_\infty^2$, теплового потока $\rho_\infty u_\infty^3$, удельной теплоемкости u_∞^2/T_∞ (индекс “∞” соответствует набегающему потоку).

В новых переменных $\mathrm{Re} = \sqrt{x}$, $dY = df/u$, $f = \psi/\mathrm{Re}$ имеем

$$\partial_1 \tilde{a} = (\partial \tilde{a} + f_1 \tilde{a}')/\mathrm{Re}, \qquad \partial_2 \tilde{a} = \rho \tilde{a}'/\mathrm{Re},$$

где $\partial = 0{,}5\,\partial/\partial\,\mathrm{Re}$; штрих обозначает производную по Y; $f_1 = -f/(2\,\mathrm{Re}\,u)$. Уравнения, полученные на основе оценок для критического слоя [22], имеют вид

$$\begin{gathered}
\tilde{v}' = -g_m u T\,\partial \tilde{p} + \rho T'\,\tilde{v} - T(f_0 u' + \partial)\tilde{u} - \tilde{u}_w - i_c T \tilde{r} - (f_2 \rho T' - u\,\partial)\tilde{T} - f_1 T \tilde{u}' + f_2 \tilde{T}',\\
\tilde{p}' = -(i_c + r_h u)\tilde{v} + i_x \tilde{\tau}_{12} + i_z \tilde{\tau}_{23} - 2\mu_r \tilde{u}_w',\\
\tilde{\tau}_{12}' = (i_x + T\,\partial)\tilde{p} + \rho u' \tilde{v} + (i_c + f_1 u' + u\,\partial)\tilde{u} + f_2 u' \tilde{r} - \tilde{i}_T + f_2 \tilde{u}',\\
\tilde{u}' = -i_x \tilde{v} - u' \mu_t \tilde{T} + \tilde{\tau}_{12}/\mu_r,\\
\tilde{\tau}_{23}' = i_z \tilde{p} + (i_c - \mu_a + u\,\partial)\tilde{w} - i_z \mu_r \tilde{u}_w + f_2 \tilde{w}', \qquad \tilde{w}' = -i_z \tilde{v} + \tilde{\tau}_{23}/\mu_r,\\
\tilde{q}' = i\omega R T \tilde{p} + \rho H' \tilde{v} + (i_c u + f_1 H' + f_2 u' + u^2\,\partial)\,\tilde{u} +\\
+ (i_c - \mu_a/\Pr + u\,\partial)\tilde{h} + f_2 H' \tilde{r} - u\tilde{i}_t + f_2 u \tilde{u}' + f_2 \tilde{h}',\\
\tilde{h}' = -\Pr u' \tilde{u} - h' \mu_t \tilde{T} + \Pr(\tilde{q} - u \tilde{\tau}_{12})/\mu_r.
\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $\tilde{u}_w = i_x \tilde{u} + i_z \tilde{w}$; $\tilde{i}_t = i_x \mu_r \tilde{u}_w + \mu_a \tilde{u}$; $\mu_a = (i_x^2 + i_z^2)\mu_r$; $i_c = \mathrm{Re}\,u_c = i\,\mathrm{Re}\,(u\alpha - \omega)$; $\tilde{p} = \tilde{\pi} - 2\mu(i\alpha\tilde{u} + i\beta\tilde{w} - 2\tilde{e}_0/3)$; $\tilde{r} = \tilde{\rho}/\rho = g_m \tilde{p} - \rho\tilde{T}$; $i_x = i\alpha\,\mathrm{Re}\,T$; $i_z = i\beta\,\mathrm{Re}\,T$; $r_h = \mathrm{Re}\,h_1 = f_0 u' + f_1 \rho T'$; $f_0 = -f_1/u$; $f_2 = f_1 u$; $\mu_r = \mu\rho/\mathrm{Re}$; $\mu_t = d\ln\mu/dT$.

Систему уравнений (2) можно записать в матричном виде

$$\boldsymbol{Z}' = (A + D\,\partial)\boldsymbol{Z}, \tag{3}$$

где A, D — квадратные матрицы, зависящие от Re и Y.

В отсутствие внешних возмущений система уравнений (3) решается со следующими граничными условиями. Возмущения скоростей и температуры на поверхности и в бесконечности равны нулю:

$$z_2(0) = z_3(0) = z_4(0) = z_5(0) = 0,$$
$$z_2(\infty) = z_3(\infty) = z_4(\infty) = z_5(\infty) = 0.$$

При наличии внешних возмущений с учетом непрерывности спектра [19–21] решение при $Y \to \infty$ определяется внешней волной $\boldsymbol{Z}_\delta\,\mathrm{e}^{i(\alpha x + k(Y - Y_\delta) + \beta z - \omega t)}$ и отраженной волной $C_r \boldsymbol{Z}_{\delta r}\,\mathrm{e}^{i(\alpha x - k(Y - Y_\delta) + \beta z - \omega t)}$. Поэтому граничные условия принимают вид

$$\begin{gathered}
\tilde{v}(0) = \tilde{u}(0) = \tilde{w}(0) = \tilde{T}(0) = 0,\\
\boldsymbol{Z}\big|_{y \to \infty} = \boldsymbol{Z}_\delta\,\mathrm{e}^{i(\alpha x + k(y - y_\delta) + \beta z - \omega t)} + C_r \boldsymbol{Z}_{\delta r}\,\mathrm{e}^{i(\alpha x - k(y - y_\delta) + \beta z - \omega t)}.
\end{gathered} \tag{4}$$

2. Численная схема и граничные условия. С использованием аппроксимации $\partial\tilde{a}/\partial R \approx (\tilde{a} - \tilde{a}_0)/\Delta R$ ($\Delta R = R - R_0$ — шаг маршевой схемы; индекс “0” соответствует значениям, рассчитанным на предыдущем шаге) система (3) преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\boldsymbol{Z}' = A\boldsymbol{Z} + B(\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{Z}_0). \tag{5}$$

Общее решение системы (5) строится следующим образом. Предполагается, что в области вне пограничного слоя параметры основного течения постоянны. Поэтому справедлива система

$$\boldsymbol{Z}' = A_\infty \boldsymbol{Z},$$

решение которой представляет собой суперпозицию восьми фундаментальных решений $\boldsymbol{Z} = \sum_{m=1}^{8} C_m(x)\boldsymbol{Z}_{m\delta}\,\mathrm{e}^{\lambda_m Y}$. Согласно теории устойчивости параллельных течений, если имеется затухающее решение ($\mathrm{Real}\,(\lambda_k) < 0$), то имеется и нарастающее ($\lambda_j = -\lambda_k$). При наличии внешних возмущений, пропорциональных $\mathrm{e}^{i(\alpha\xi+ky+\beta z-\omega t)}$ при заданных реальных значениях k, β, ω и комплексном значении α, которое вычисляется из дисперсионного равенства, в области вне пограничного слоя имеется три затухающих фундаментальных решения и два ограниченных решения. Пусть затухающие решения на границе пограничного слоя представляют собой векторы $\boldsymbol{Z}_{1\delta}$, $\boldsymbol{Z}_{2\delta}$, $\boldsymbol{Z}_{3\delta}$. Одно из двух ограниченных незатухающих решений соответствует внешней завихренности и поэтому на границе пограничного слоя удовлетворяет равенству $\boldsymbol{Z}_{5\delta} = \boldsymbol{Z}_{\delta}$. Другое решение по аналогии со случаем взаимодействия акустических волн с пограничным слоем [19] описывает отраженную завихренность, соответствующее ему фундаментальное решение на границе пограничного слоя имеет вид

$$\boldsymbol{Z}_{4\delta}(\alpha,k,\beta,\omega) = \boldsymbol{Z}_{\delta r}(\alpha,k,\beta,\omega) = \boldsymbol{Z}_{\delta}(\alpha,-k,\beta,\omega).$$

Внутри пограничного слоя решения $\boldsymbol{Z}_m(Y)$ ($m = 1,\ldots,4$) удовлетворяют однородной системе (5) ($\boldsymbol{Z}_0 = 0$), а $\boldsymbol{Z}_5$ — неоднородной системе (5) ($\boldsymbol{Z}_0 \neq 0$). Суперпозиция этих решений $\boldsymbol{Z} = \sum_{m=1}^{4} C_m(\mathrm{Re})\boldsymbol{Z}_m + \boldsymbol{Z}_5$ удовлетворяет однородным условиям (4) на стенке ($Y = 0$), из которых определяются константы C_m. При этом константу C_4 можно трактовать как коэффициент отражения вихревой волны.

Расчеты начинаются со значения $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{00}$. Вектор $\boldsymbol{Z}(\mathrm{Re}_{00})$ определяется путем решения системы (5) с граничными условиями (4) при $B = 0$ и поэтому принадлежит непрерывному спектру в теории устойчивости [20, 21].

В работе [23] установлено, что для вихревых возмущений значения α можно определить из дисперсионного соотношения $i(\omega - \alpha) = \alpha^2 + \beta^2 + k^2$, а для тепловых — из соотношения $i(\omega - \alpha) \approx (\alpha^2 + \beta^2 + k^2)/\,\mathrm{Pr}$. Заметим, что при исследовании задачи о ламинарно-турбулентном переходе пограничного слоя представляют интерес пространственные масштабы возмущений порядка толщины слоя δ и масштабы частоты порядка U_∞/δ. Следовательно, для вихревых возмущений $(k,\omega,\beta) \sim 1/\,\mathrm{Re} \ll 1$, поэтому $\alpha \approx -i[1 \pm (1 + 2(k^2 + \beta^2 - i\omega))]/2$. В случае знака “+” $\alpha \approx -i$. Это означает, что возмущения распространяются вверх по потоку, сильно затухая. Характерный размер области затухания равен $\Delta \sim 1/\,\mathrm{Re}_1$. Здесь Re_1 — единичное число Рейнольдса, значение которого в большинстве аэродинамических труб превышает 10^6 м$^{-1}$, поэтому $\Delta \approx 10^{-3}$ мм. Возмущения такого типа в данной работе не рассматриваются. В случае знака “$-$” $\alpha \approx \omega + i(k^2 + \beta^2)$. При этом возмущения сносятся потоком и затухают с коэффициентом $-\alpha_i = -(k^2 + \beta^2)$.

Для тепловых возмущений выполняется равенство $i(\omega - \alpha) = (\alpha^2 + \beta^2 + k^2)/\,\mathrm{Pr}$, из которого следует, что тепловые возмущения, распространяющиеся вниз по течению, затухают с коэффициентом $-\alpha_i = -(k^2 + \beta^2)/\,\mathrm{Pr}$. Так как для воздуха $\mathrm{Pr} < 1$, интенсивность затухания тепловых возмущений больше по сравнению с вихревыми.

3. Возбуждение продольных структур вихревыми внешними волнами, создаваемыми турбулизирующей сеткой. Расчеты проводились для пограничного слоя на плоской пластине при значениях числа Маха $\mathrm{M} = 0{,}2$ и частоты $\omega = 10^{-6}$. Принятое значение частоты удовлетворяло условию выхода системы на стационарный режим. Зависимость вязкости от температуры, принятая в расчетах, определялась формулой Сатерленда, число Прандтля равно $\mathrm{Pr} = 0{,}72$.

Так как продольные структуры слабо зависят от продольной координаты, в линейном приближении возможно их порождение внешней волной, амплитуда которой пропорциональна $e^{i\alpha x+ikY+i\beta z-\omega t}$. Для этой волны модуль продольного волнового числа $|\alpha| \ll 1$. Поэтому с учетом [24] можно принять

$$\boldsymbol{Z}_{5\delta} \approx (0, -i\beta, 0, ik, 0, 0, -k^2+\beta^2, 0), \qquad \boldsymbol{Z}_{4\delta} \approx (0, -i\beta, 0, -ik, 0, 0, -k^2+\beta^2, 0),$$
$$\boldsymbol{Z}_{1\delta} = (0, 0, -ik, 0, 0, -k^2, 0, -k^2), \qquad \boldsymbol{Z}_{2\delta} = (0, \lambda_2 B_1, 0, i\beta B_1, \mathrm{Pr}, 0, 2i\beta\lambda_2 B_1, \lambda_2),$$
$$\boldsymbol{Z}_3 = (0, \lambda_3 A_1, 0, i\beta A_1, 0, 0, 2i\beta\lambda_3 A_1, 0),$$

где $\lambda_2 = \sqrt{\mathrm{Pr}\, i(\alpha-\omega)+\beta^2}$; $\lambda_3 = -\beta$; $\alpha \approx \omega + i(k^2+\beta^2)$.

Результаты, полученные для внешних вихревых возмущений, нормировались на значение амплитуды скорости $u_0 = (\tilde{v}_0^2 + w_0^2)^{1/2}$ вблизи сетки. Параметрами задачи являются величины α_i, Re, x_0 (α_i — декремент затухания внешних возмущений по продольной координате; x_0 — расстояние от сетки до передней кромки пластины). Значения x_0 выбирались с учетом экспериментальных данных работ [25, 26], в которых сетки располагались на расстояниях 1,6 и 1,0 м от передней кромки пластины. Максимальная скорость набегающего потока равна 12 м/с, минимальная — 2 м/с. Таким образом, $8{,}00 \cdot 10^4 \leqslant x_0 \leqslant 1{,}28 \cdot 10^6$. При заданном α_i волновые числа β и k являлись действительными, удовлетворяющими условию $\alpha_i = \beta^2 + k^2$. Все расчеты проведены для пограничного слоя толщиной $Y_\delta = 6$. Представленные ниже результаты получены при условии $\mathrm{Re}_{00} = 50$. Изменение начального значения числа Рейнольдса в диапазоне $50 < \mathrm{Re}_{00} < 100$ практически не оказывало влияния на результаты, по крайней мере, при $\mathrm{Re} > 400$.

3.1. *Результаты расчетов при числе Маха* $\mathrm{M} = 0$. На рис. 2 приведены распределения амплитуд возмущений давления $|\tilde{p}|$ и скоростей $|\tilde{v}|$, $|\tilde{u}|$, $|\tilde{w}|$ в пограничном слое, отнесенных к амплитуде скорости вблизи сетки, при $\mathrm{Re} = 760$, $\alpha_i = 10^{-6}$, $\beta = 6 \cdot 10^{-4}$, $x_0 = 64 \cdot 10^4$. Следует отметить, что возмущения давления практически равны нулю во всей области пограничного слоя. Возмущения продольной скорости в десятки раз превышают амплитуду внешних вихревых волн, что согласуется с результатами работы [24]. Возмущения нормальной и боковой скорости почти в 100 раз меньше возмущения продольной скорости. Заметим, что распределение амплитуды продольной скорости стационарного возмущения в пограничном слое не зависит от параметров волны.

В расчетах установлено, что при выполнении неравенства $\beta\,\mathrm{Re} \ll 1 \ll \beta\,\mathrm{Re}^2$ зависимость максимума амплитуды возмущения продольной скорости внутри пограничного слоя

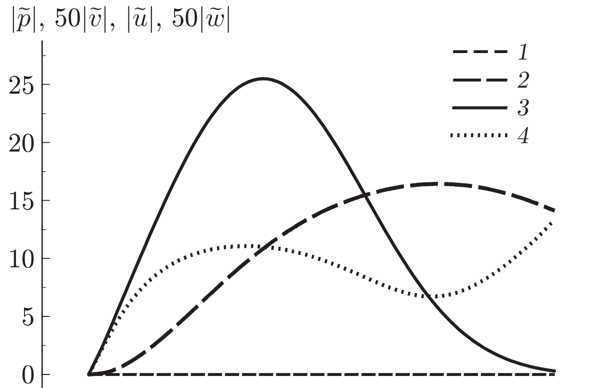

Рис. 2. Распределения амплитуд возмущений давления $|\tilde{p}|$ (*1*) и скоростей $50|\tilde{v}|$ (*2*), $|\tilde{u}|$ (*3*), $50|\tilde{w}|$ (*4*) в пограничном слое при $\mathrm{M} = 0$, $\mathrm{Re} = 760$

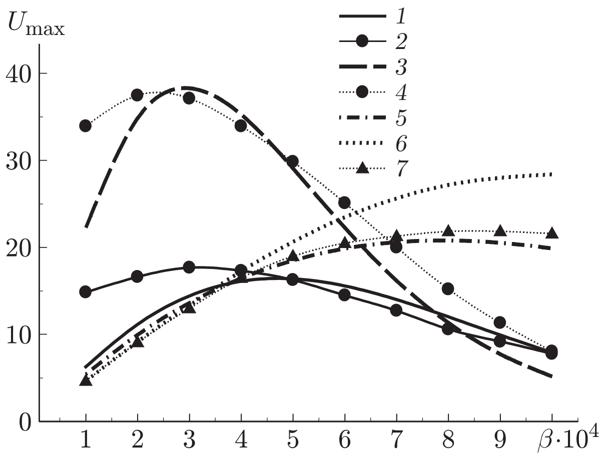

Рис. 3. Теоретические зависимости максимумов возмущений продольной скорости от волнового числа:
1–4 — $k = \beta/3$, *5–7* — $k = \beta$; *1, 2, 5–7* — $\mathrm{Re} = 500$, *3, 4* — $\mathrm{Re} = 10^3$; *1, 3, 5* — результаты расчетов, полученные в настоящей работе, *2, 4* — данные [11], *6* — аналитическое решение [10], *7* — данные [17]

от координаты Y, полученная в настоящей работе, хорошо согласуется с аналитической зависимостью $\tilde{u} = (1/2)\beta\,\mathrm{Re}^2\,Y(du/dY)$ [10]. Отклонение расчетной зависимости от аналитической наблюдается при нарушении приведенного выше неравенства. Например, при $\beta = 10^{-5}$ в области $\mathrm{Re} < 300$ значение $\beta\,\mathrm{Re}^2$ было меньше единицы, что противоречило неравенству $\beta\,\mathrm{Re}^2 \gg 1$, поэтому результаты расчетов, полученные в данной работе, отличались от аналитической зависимости. С увеличением волнового числа и числа Рейнольдса отклонение данных, полученных в настоящей работе, от аналитической зависимости увеличивается, что обусловлено нарушением первого неравенства $\beta\,\mathrm{Re} \ll 1$. Действительно, например, при $\beta = 10^{-4}$ и $\mathrm{Re} = 10^3$ расчетные данные, полученные в настоящей работе, превышают результаты, полученные с использованием аналитического выражения, приблизительно на 30 %, поскольку $\beta\,\mathrm{Re} = 0{,}1$. Следовательно, значение этого произведения нельзя считать много большим единицы.

На рис. 3 показаны результаты настоящей работы, данные [11, 17] и аналитическая зависимость [10] с учетом затухания внешней завихренности при $U_{\max} = |\tilde{u}'|_{\max}$. Приведенные данные получены при $x_0 = 0$. Из рис. 3 следует, что максимальные по волновому числу амплитуды стационарного возмущения, полученные в настоящей работе, удовлетворительно согласуются с данными [11], значительное различие наблюдается в области малых значений β, в которой амплитуды, вычисленные в работе [11], превышают значения амплитуды, полученные в данной работе. Сопоставление результатов, полученных при $k = \beta/3$ (кривая *1*) и $k = \beta$ (кривая *5*), показывает, что максимум зависимости $U_{\max}$ от волнового числа β при $k = \beta/3$ находится в области значений волнового числа, меньших, чем в случае $k = \beta$. Таким образом, положение максимума зависит от соотношения волновых чисел k и β. Результаты проведенных в настоящей работе расчетов практически совпадают с данными работы [17] (кривые *5* и *7*). При $\beta < 4\cdot10^{-4}$ они незначительно отличаются от результатов, полученных на основе аналитической зависимости работы [10] (кривая *6*).

Следует отметить, что непосредственное сопоставление результатов расчетов с экспериментальными данными затруднено вследствие отсутствия подробной информации о возмущениях во внешнем течении, а именно об амплитуде внешней завихренности. При этом возможно приближенное сопоставление теоретических и экспериментальных данных. Например, в экспериментах [25] при $\mathrm{Re} \approx 500$ и единичном числе Рейнольдса $\mathrm{Re}_1 \approx 5 \cdot 10^5$ м$^{-1}$ минимальное значение корреляционной функции $R_{uu}(\Delta z)$ соответствовало $\Delta z \approx 5{,}5$ мм, что составляет половину длины волны λ. Поэтому можно принять $\lambda \approx 2\Delta z = 11$ мм, $\beta_{exp} \approx 10^{-3}$. В экспериментах [26] при единичном числе Рейнольдса $\mathrm{Re}_1 \approx 3{,}6 \cdot 10^5$ были выявлены продольные структуры с $\beta_{exp} \approx 7 \cdot 10^{-4}$. Теоретическое значение волнового числа, при котором достигается максимальная амплитуда стационарного возмущения продольной скорости в пограничном слое (кривые *5*, *6* на рис. 3), равно $\beta^* \approx 8 \cdot 10^{-4}$. Учитывая, что теоретические значения амплитуды продольной структуры слабо зависят от β и практически не меняются в интервале $7 \cdot 10^{-4} < \beta < 10^{-3}$, соответствие теоретических и экспериментальных данных можно считать удовлетворительным.

С использованием экспериментальных данных [25] наряду с длиной волны можно оценить амплитуду продольной структуры. Из анализа приведенных в [25] спектров следует, что при низких частотах отношение максимума амплитуды возмущений продольной скорости внутри пограничного слоя к соответствующей амплитуде во внешнем потоке приближенно равно 20. Для проведения сопоставления с результатами расчетов полученное отношение следует умножить на $|u|_\infty/\sqrt{|v|_\infty^2 + |w|_\infty^2}$. Для вычисления этого множителя можно использовать приведенные в [25] спектры. С помощью этих спектров можно показать, что во внешнем течении в области низких частот амплитуда продольной компоненты скорости превышает амплитуду нормальной компоненты приблизительно в 1,6 раза, т. е. $|v|_\infty = 0{,}63|u|_\infty$. В предположении изотропности течения по нормальной и боковой координатам $|u|_\infty/\sqrt{|v|_\infty^2 + |w|_\infty^2} = |u|_\infty/\sqrt{2(0{,}63|u|_\infty)^2} \approx 1{,}1$. Таким образом, экспериментально полученное отношение максимума амплитуды возмущения внутри слоя к скорости в продольной завихренности $\sqrt{|v|_\infty^2 + |w|_\infty^2}$ можно принять приближенно равным 22, что хорошо согласуется с результатами расчетов при $7 \cdot 10^{-4} < \beta < 10^{-3}$ (кривая *5* на рис. 3).

На рис. 4 показана зависимость величины $U_{\max}$ от числа Рейнольдса при $\alpha_i = 10^{-6}$, $x_0 = 64 \cdot 10^4$ и различных значениях β. Из приведенных данных следует, что в области малых чисел Рейнольдса наибольшие амплитуды соответствуют большим значениям β. С учетом характера зависимости, показанной кривой *1*, можно предположить, что при достаточно больших числах Рейнольдса наибольшие амплитуды будут достигаться при малых значениях β. Следует отметить, что при фиксированном числе Рейнольдса зависимость максимальной амплитуды от волнового числа β является немонотонной.

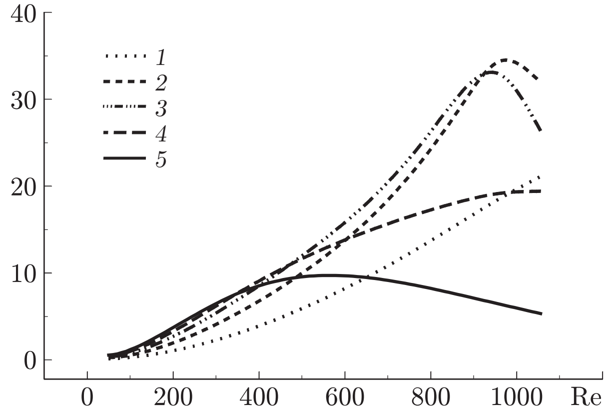

Рис. 4. Зависимость максимума возмущения продольной скорости от числа Рейнольдса при $\alpha_i = 10^{-6}$, $x_0 = 64 \cdot 10^4$ и различных значениях β:
1 — $\beta = 2 \cdot 10^{-4}$, *2* — $\beta = 4 \cdot 10^{-4}$, *3* — $\beta = 6 \cdot 10^{-4}$, *4* — $\beta = 8 \cdot 10^{-4}$, *5* — $\beta = 10^{-3}$

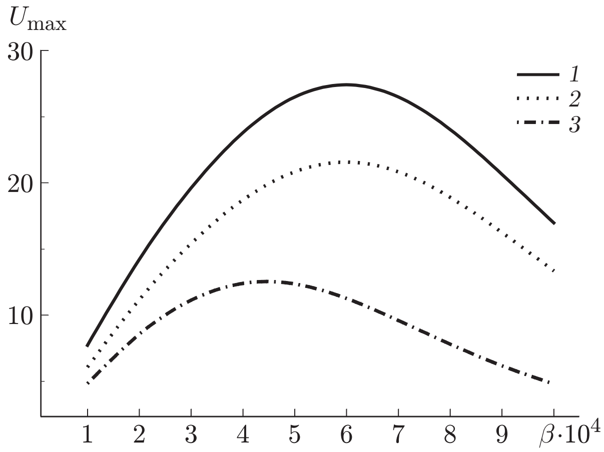

Рис. 5

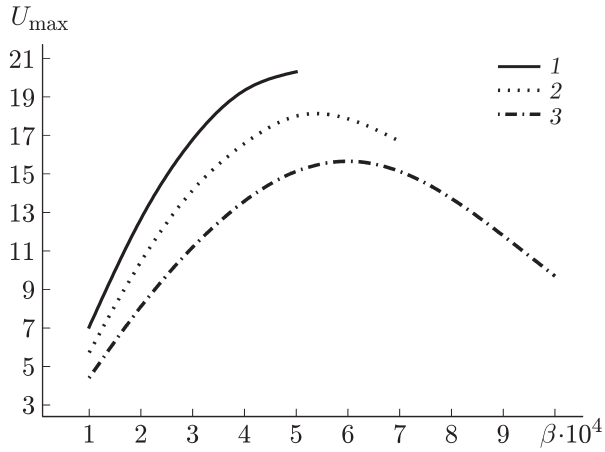

Рис. 6

Рис. 5. Зависимость максимума возмущения продольной скорости от волнового числа при $\mathrm{Re} = 600$, $\alpha_i = 10^{-6}$ и различных значениях x_0:
1 — $x_0 = 8 \cdot 10^4$, *2* — $x_0 = 32 \cdot 10^4$, *3* — $x_0 = 64 \cdot 10^4$

Рис. 6. Зависимость максимума возмущения продольной скорости от волнового числа при $\mathrm{Re} = 600$, $x_0 = 64 \cdot 10^4$ и различных значениях α_i:
1 — $\alpha_i = 0{,}25 \cdot 10^{-6}$, *2* — $\alpha_i = 0{,}5625 \cdot 10^{-6}$, *3* — $\alpha_i = 10^{-6}$

На рис. 5 приведена зависимость величины $U_{\max}$ от волнового числа при $\mathrm{Re} = 600$, $\alpha_i = 10^{-6}$ и различных значениях x_0. Как отмечено выше, зависимость $U_{\max}$ от волнового числа является немонотонной. На рис. 5 видно, что с увеличением x_0 амплитуда возмущения продольной скорости уменьшается вследствие более существенного затухания внешних возмущений на больших расстояниях x_0. При этом максимум зависимости смещается в направлении меньших значений β. Однако это смещение несущественно, находится в диапазоне $4{,}5 \cdot 10^{-4} < \beta_{\max} < 7{,}0 \cdot 10^{-4}$ и удовлетворительно согласуется со значением волнового числа $\beta \approx 0{,}7 \cdot 10^{-3}$, полученным в работе [26] при $x_0 \approx 6 \cdot 10^5$.

На рис. 6 показана зависимость величины $U_{\max}$ от волнового числа при $\mathrm{Re} = 600$, $x_0 = 64 \cdot 10^4$ и различных значениях α_i. Из приведенных данных следует, что в этом случае положение максимума слабо зависит от величины α_i. Расчеты при $\alpha_i = 0{,}2500 \cdot 10^{-6}$; $0{,}5625 \cdot 10^{-6}$ заканчивались при $\beta = 5{,}0 \cdot 10^{-4}$; $7{,}5 \cdot 10^{-4}$ соответственно, так как при бóльших значениях волнового числа величина k становилась комплексной и не удовлетворяла условию непрерывного спектра. При условии затухающих возмущений в области вне пограничного слоя задача становится задачей на собственные значения, что не позволяет одновременно фиксировать волновое число β и параметр α.

3.2. *Результаты расчетов при сверхзвуковых скоростях.* На рис. 7 показана зависимость величины $U_{\max}$ от числа Рейнольдса при $\mathrm{M} = 2{,}0$. Характер этой зависимости такой же, как при $\mathrm{M} = 0$ (см. рис. 4). В данном случае возмущения продольной скорости внутри пограничного слоя меньше по сравнению со случаем дозвуковых скоростей, что согласуется с выводом работы [24]. В результате расчетов установлено, что зависимость величины $U_{\max}$ от числа Маха является монотонно убывающей (рис. 8).

4. Возбуждение возмущений внутри пограничного слоя внешними тепловыми волнами при $\mathrm{M} = 2$**.** На рис. 9 приведены распределения амплитуд возмущений давления $|\tilde{p}|$, скоростей $|\tilde{v}|$, $|\tilde{u}|$, $|\tilde{w}|$ и энтальпии $|h|$, нормированных на амплитуду возмущения энтальпии вблизи турбулизирующей решетки, при $\mathrm{Re} = 600$, $x_0 = 64 \cdot 10^4$, $\beta = 10^{-4}$, $\alpha_i = 10^{-6}/\,\mathrm{Pr}$. Сопоставление этих результатов с данными, приведенными на рис. 2, пока-

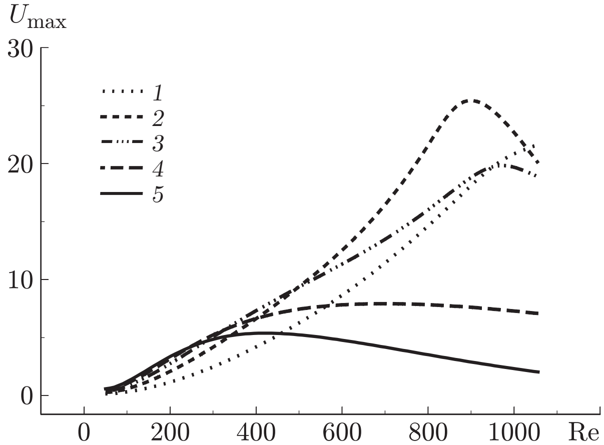

Рис. 7

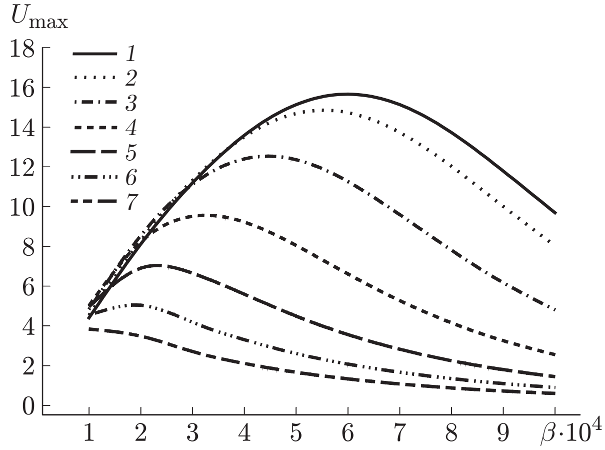

Рис. 8

Рис. 7. Зависимость максимума возмущения продольной скорости от числа Рейнольдса при $\mathrm{M} = 2{,}0$, $\alpha_i = 10^{-6}$, $x_0 = 64 \cdot 10^4$ и различных значениях β: *1* — $\beta = 2 \cdot 10^{-4}$, *2* — $\beta = 4 \cdot 10^{-4}$, *3* — $\beta = 6 \cdot 10^{-4}$, *4* — $\beta = 8 \cdot 10^{-4}$, *5* — $\beta = 10^{-3}$

Рис. 8. Зависимость максимума возмущения продольной скорости от волнового числа при $\mathrm{Re} = 600$, $\alpha_i = 10^{-6}$, $x_0 = 64 \cdot 10^4$ и различных значениях числа Маха: *1* — $\mathrm{M} = 0$, *2* — $\mathrm{M} = 1$, *3* — $\mathrm{M} = 2$, *4* — $\mathrm{M} = 3$, *5* — $\mathrm{M} = 4$, *6* — $\mathrm{M} = 5$, *7* — $\mathrm{M} = 6$

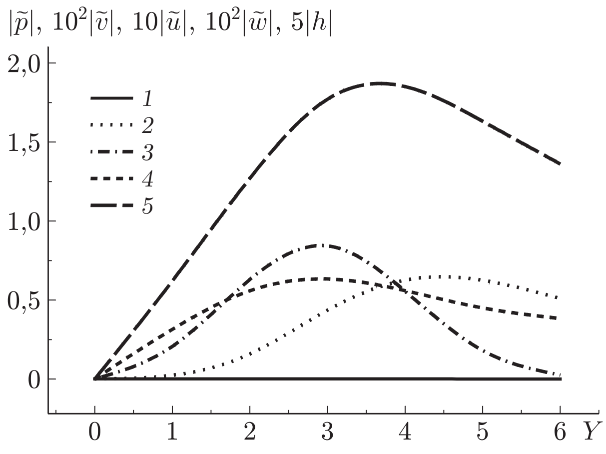

Рис. 9

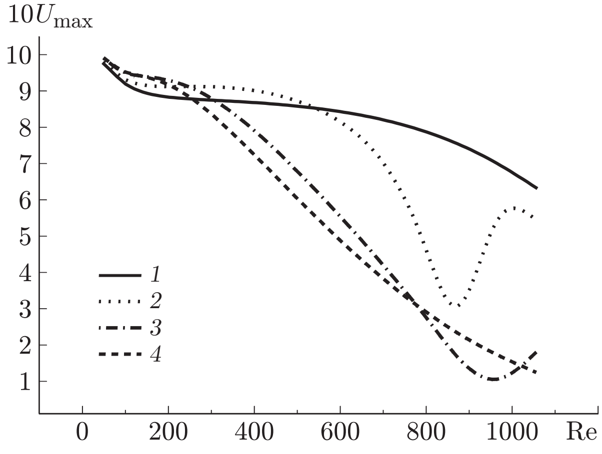

Рис. 10

Рис. 9. Распределение порожденных тепловыми волнами амплитуд давления $|\tilde{p}|$ (*1*), скоростей $10^2|\tilde{v}|$ (*2*), $10|\tilde{u}|$ (*3*), $10^2|\tilde{w}|$ (*4*) и энтальпии $5|h|$ (*5*) в пограничном слое при $\mathrm{M} = 2$, $\mathrm{Re} = 600$, $x_0 = 64 \cdot 10^4$, $\beta = 10^{-4}$, $\alpha_i = 10^{-6}/\,\mathrm{Pr}$

Рис. 10. Зависимость максимума амплитуды продольной скорости от числа Рейнольдса при $x_0 = 64 \cdot 10^4$, $\alpha_i = 10^{-6}/\,\mathrm{Pr}$ и различных значениях β: *1* — $\beta = 10^{-4}$, *2* — $\beta = 3 \cdot 10^{-4}$, *3* — $\beta = 8 \cdot 10^{-4}$, *4* — $\beta = 10^{-3}$

зывает, что характер зависимости $|\tilde{u}|$ от нормальной координаты такой же, как в случае внешних вихревых волн, однако максимальное значение $|\tilde{u}|_{\max}$ существенно меньше, чем в случае, показанном на рис. 2. Тем не менее существенное искажение профиля скорости наблюдается и в этом случае.

На рис. 10 приведена зависимость величины $U_{\max}$ от числа Рейнольдса при $\alpha_i = 10^{-6}/\mathrm{Pr}$, $x_0 = 64 \cdot 10^4$ и различных значениях волнового числа β. Особенностью этой зависимости является существенное уменьшение амплитуды возмущений продольной скорости вниз по течению, по крайней мере, в области $\mathrm{Re} < 800$. При некоторых значениях волнового числа в области больших чисел Рейнольдса может наблюдаться увеличение возмущений скорости внутри пограничного слоя.

Заключение. В результате проведенных исследований показано, что внешние вихревые волны могут возбуждать возмущения продольной скорости внутри пограничного слоя. Их интенсивность зависит в основном от положения турбулизирующей сетки, числа Маха, волнового числа в боковом направлении и скорости затухания внешней завихренности.

Существуют характерные значения волновых чисел $\beta = \beta^*$, при которых амплитуда возмущения продольной скорости внутри пограничного слоя максимальна. Этим объясняются наблюдаемые в экспериментах продольные структуры с характерной периодичностью в боковом направлении.

Интенсивность возмущения продольной скорости внутри пограничного слоя, вызванная внешними вихревыми волнами, уменьшается с увеличением числа Маха. Установлено, что влияние внешних тепловых волн на структуру течения внутри пограничного слоя существенно меньше влияния вихревых волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Klebanoff P. S., Tidstrom K. D.** Evolution of amplified waves leading to transition in a boundary layer with zero pressure gradient: Tech. note / NASA. N TN D-195. Washington, 1959.
2. **Dryden H. L.** Air flow in the boundary layer near a plate: Tech. report / NACA. N TR 562. S. l., 1937.
3. **Klebanoff P. S.** Effect of free stream turbulence on a laminar boundary layer // Bull. Amer. Phys. Soc. 1971. V. 16. P. 203–216.
4. **Бойко А. В.** Физические механизмы перехода к турбулентности в открытых течениях / А. В. Бойко, Г. Р. Грек, А. В. Довгаль, В. В. Козлов. М.; Ижевск: Науч.-издат. центр “Регулярная и хаотическая динамика”: Ин-т компьютер. исслед. 2006.
5. **Libby P. A., Fox H.** Some perturbation solutions in laminar boundary-layer theory. Pt 1. The momentum equation // J. Fluid Mech. 1963. V. 17, N 3. P. 433–449. DOI: 10.1017/S0022112063001439.
6. **Grosch C. E., Jackson T. L., Kapila A. K.** Non-separable eigenmodes the incompressible boundary layer // Instability, transition and turbulence. S. l.: Springer-Verlag, 1992. P. 127–136.
7. **Bradshaw P.** The effect of wind-tunnel screens on nominally two-dimensional boundary layers // J. Fluid Mech. 1965. V. 22, N 4. P. 679–687. DOI: 10.1017/S0022112065001064.
8. **Kendall J. M.** Boundary-layer receptivity to freestream turbulence. S. l., 1990. (Paper / AIAA; N 90-1504).
9. **Косорыгин В. С., Поляков Н. Ф., Супрун Т. Т., Эпик Э. Я.** Развитие возмущений в ламинарном пограничном слое пластины при повышенной турбулентности потока // Неустойчивость до- и сверхзвуковых течений. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1982. С. 85–92.

10. **Crow S. C.** The spanwise perturbation of two-dimensional boundary layers // J. Fluid Mech. 1966. V. 24, N 1. P. 153–164. DOI: 10.1017/S0022112066000557.
11. **Bertolotti F. P.** Response of the Blasius boundary layer to free-stream vorticity // Phys. Fluids. 1997. V. 9, N 8. P. 2286–2299. DOI: 10.1063/1.869350.
12. **Гуляев А. Н., Козлов В. Е., Кузнецов В. Р. и др.** Взаимодействие ламинарного пограничного слоя с внешней турбулентностью // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1989. № 5. С. 55–65.
13. **Устинов М. В.** Восприимчивость пограничного слоя на плоской пластине к турбулентности набегающего потока // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 3. С. 56–68.
14. **Zaki T. A., Durbin P. A.** Mode interaction and the bypass route to transition // J. Fluid Mech. 2005. V. 531. P. 85–111. DOI: 10.1017/S0022112005003800.
15. **Ricco P.** The pre-transitional Klebanoff modes and other boundary-layer disturbances induced by small-wavelength free-stream vorticity // J. Fluid Mech. 2009. V. 638. P. 267–303. DOI: 10.1017/S0022112009990838.
16. **Johnson M. W.** Bypass transition receptivity modes // Intern. J. Heat Fluid Flow. 2011. V. 32, N 2. P. 392–401. DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2010.11.005.
17. **Leib J. S., Wundrow D. W., Goldstein M. E.** Effect of free-stream turbulence and other vertical disturbances on a laminar boundary layer // J. Fluid Mech. 1999. V. 380. P. 169–203. DOI: 10.1017/S0022112098003504.
18. **Luchini P.** Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface: optimal perturbations // J. Fluid Mech. 2000. V. 404. P. 289–309. DOI: 10.1017/S0022112099007259.
19. **Гапонов С. А.** Взаимодействие сверхзвукового пограничного слоя с акустическими возмущениями // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1977. № 6. С. 51–56.
20. **Grosch C. E., Salwen H.** The continuous spectrum of the Orr — Sommerfeld equation. Pt 1. The spectrum and the eigenfunctions // J. Fluid Mech. 1978. V. 87, N 7. P. 33–54. DOI: 10.1017/S0022112078002918.
21. **Grosch C. E., Salwen H.** The continuous spectrum of the Orr — Sommerfeld equation. Pt 2. Eigenfunction expansions // J. Fluid Mech. 1981. V. 104, N 3. P. 445–465. DOI: 10.1017/S0022112081002991.
22. **Петров Г. В.** Новая параболизованная система уравнений устойчивости сжимаемого пограничного слоя // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 1. С. 63–69.
23. **Петров Г. В.** Реакция сверхзвукового пограничного слоя на акустическое воздействие // Теплофизика и аэромеханика. 2001. Т. 8, № 1. С. 77–86.
24. **Гапонов С. А., Юдин А. В.** Взаимодействие гидродинамических внешних возмущений с пограничным слоем // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 1. С. 100–107.
25. **Westin K. J. A., Boiko A. V., Kozlov V. V., et al.** Experiments in a boundary layer subjected to free stream turbulence. Pt 1. Boundary layer structure and receptivity // J. Fluid Mech. 1994. V. 281. P. 193–218. DOI: 10.1017/S0022112094003083.
26. **Matsubara M., Alfredsson P. H.** Disturbance growth in boundary layers subjected to free-stream turbulence // J. Fluid Mech. 2001. V. 430. P. 149–168. DOI: 10.1017/S0022112000002810.

Поступила в редакцию 10/IV 2023 г.,
после доработки — 15/V 2023 г.
Принята к публикации 26/VI 2023 г.