

О РОСТЕ ТРЕЩИН ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Г. П. Черепанов

(Москва)

Большая часть разрушений изделий машиностроения происходит вследствие роста усталостных трещин. При этом продолжительность «жизни» изделия с трещиной часто занимает значительную часть времени до разрушения. Исследованию усталостного разрушения, которым только в США занимаются около 200 лабораторий, посвящено большое число работ как отечественных (Н. Н. Давиденков, С. В. Серенсен, И. А. Одинг, Р. М. Шнейдерович, Р. Д. Вагапов), так и зарубежных (Орован, Фрост, Мак-Клинтон, Парис) авторов. Однако количественная изученность роста усталостных трещин пока недостаточна.

Ниже предлагается феноменологическое описание процесса развития трещин под действием циклических нагрузок. Вначале рассмотрено распространение трещин в упруго-пластических телах при монотонно возрастающей нагрузке; в частности, дано объяснение одного масштабного эффекта и явления скачкообразного роста трещин (п. 1). Далее рассматривается циклическое нагружение; применение энергетической концепции Ирвина — Орована позволило получить простую зависимость для скорости роста трещин, подтверждающуюся экспериментальными данными (п. 2). В п. 3 описан феноменологический подход к проблеме нераспространяющихся усталостных трещин. В п. 4 изучен вопрос устойчивости роста трещин. В заключение рассмотрены конкретные задачи (п. 5).

Картину разрушения образца под действием циклической нагрузки можно представить себе в общих чертах так [1-5]. Вначале в образце нет каких-либо обнаруживаемых изменений; затем, начиная с некоторого числа циклов, в материале обнаруживаются дислокации, субмикротрещины, которые растут с увеличением числа циклов, материал разрыхляется; далее появляются микротрещины и продолжается процесс разрыхления и местного течения; заключительная стадия характеризуется ростом одной макротрещины, приводящим к хрупкому разрушению образца. Существенно, что появление макротрещин не всегда приводит к разрушению [6-8]. Можно считать установленным, что рост макротрещины происходит в течение каждого цикла [9,10]; при этом фрактографическое исследование позволяет обнаружить после разрушения на поверхностях трещины характерные бороздки, которые на снимках выглядят как годовые кольца деревьев.

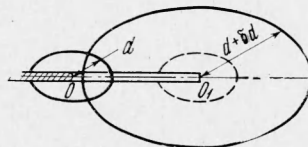
При феноменологическом описании процесса усталостного разрушения удобно разбить его на два этапа. На первом этапе размер образующихся микротрещин или дислокаций сравним с характерным линейным размером прочностной неоднородности (зерна), поэтому на этом этапе необходимо учитывать микроструктуру и неоднородность материала (этап зарождения трещины). Второй этап характеризуется ростом наиболее опасной трещины; размер этой трещины велик сравнительно с размером зерна, поэтому при исследовании скорости роста трещины на этом этапе можно пренебречь неоднородностью материала и считать его однородным и изотропным телом (этап роста трещины). В дальнейшем рассматривается лишь последний этап, однако предлагаемый подход легко переносится также на случай внутриверных (или межзеренных) микротрещин или дислокаций; при этом соответствующие физические постоянные (например, предел текучести или энергия диссипации) естественно принимают другие значения, отвечающие материалу внутри зерна (или между зерен).

По поводу относительной доли указанных двух этапов существуют различные мнения; однако, по-видимому, большинство исследователей склоняется к тому, что значительную часть времени до разрушения материал «живет» с трещиной [1,3,5,11-13].

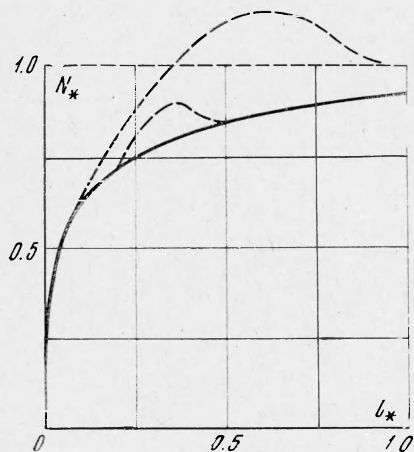
1. Развитие трещин в упруго-пластических телах при монотонно возрастающей нагрузке. В идеально-упругом теле трещина начинает расти только после того, как коэффициент интенсивности напряжений N на контуре трещины достигнет постоянной Ирвина K_c [14-16], причем в процессе квазистатического роста выполняется равенство $N = K_c$. Ясно,

что при циклическом нагружении трещина в идеально-упругом теле расти не будет.

Для объяснения роста усталостных трещин необходимо привлечь упруго-пластическую модель тела. Поэтому изучим вначале развитие трещин в идеальных упруго-пластических телах при монотонно возрастающей нагрузке. При этом вблизи конца трещины будет существовать пластическая область с характерным линейным размером d . Ограничимся наиболее типичным и общим случаем, в котором размер пластической области мал сравнительно с характерным геометрическим размером тела (например, длиной трещины). Однако общий подход, применяемый ниже, годится и тогда, когда последнее ограничение не выполняется (см., например, упруго-пластический аналог задачи Гриффитса в работе [17]). В указанном предположении можно ввести понятие коэффициента интенсивности напряжений N ; он определяет распределение напряжений и деформаций на расстояниях от конца трещины, больших сравнительно с d , но малых по сравнению с характерным линейным размером тела, и находится из решения чисто упругой задачи в целом [18]. В дальнейшем будем рассматривать тонкую структуру конца трещины (фиг. 1).



Фиг. 1



Фиг. 2

При монотонно возрастающей внешней нагрузке коэффициент интенсивности напряжений N будет также монотонно возрастать в окрестности каждой точки контура трещины, и в частности вблизи рассматриваемой точки O (фиг. 1). Предполагается, что в начале нагружения напряжения в теле отсутствовали. С ростом N трещина, вообще говоря, также будет расти. Обозначим через γ_* диссипацию энергии вследствие роста трещины, приходящуюся на единицу площади. Приращение длины трещины Δl , очевидно, может зависеть лишь от N , σ_s , γ_* , ν и модуля Юнга E . Анализ размерностей дает

$$\Delta l = \frac{N^2}{\sigma_s^2} \Phi \left(\frac{N^2}{E \gamma_*}, \frac{\sigma_s}{E}, \nu \right) \quad (1.2)$$

Здесь Φ — некоторая безразмерная функция своих аргументов.

Составим уравнение энергии (фиг. 1). При приращении длины трещины на бесконечно малую величину δl полная диссипирующаяся энергия $2\gamma_* \delta l$, очевидно, складывается из двух слагаемых. Первое слагаемое

Условие на краю трещины в упруго-пластическом теле. Обозначим через σ_s предел текучести на растяжение. Размер пластической области d может зависеть только от N , σ_s , модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν . Напомним, что N имеет размерность силы, деленной на длину в степени $3/2$. Анализ размерностей [19] дает

$$d = \alpha_1 \left(\nu, \frac{\sigma_s}{E} \right) \frac{N^2}{\sigma_s^2} \quad (1.4)$$

Здесь $\alpha_1(\nu, \sigma_s/E)$ — некоторая безразмерная функция.

δE_1 равно по величине высвобождающейся упругой энергии; оно соответствует тому, что в процессе увеличения длины на δl коэффициент интенсивности напряжений (а следовательно, и d согласно (1.1)) оставался неизменным. Величина δE_1 может зависеть лишь от N , E , σ_s , δl , ν . На основании анализа размерностей получаем

$$\delta E_1 = 2\alpha_2 \left(\frac{\sigma_s}{E}, \nu \right) \frac{N^2}{E} \delta l \quad (1.3)$$

Заметим, что средняя величина интенсивности пластических деформаций в пластической головке зависит лишь от σ_s / E и ν , но не зависит от N , так как в рассматриваемой задаче нет характерного линейного размера. Поэтому формула (1.3) может быть получена также при помощи (1.1) из тех соображений, что δE_1 представляет собой необратимую работу пластических деформаций вследствие смещения пластической области как жесткой в направлении роста трещины (фиг. 1).

Второе слагаемое δA_p представляет собой необратимую работу пластических деформаций, вызванную увеличением пластической области в процессе нагружения и не связанную с ростом трещины; она соответствует тому, что в процессе увеличения коэффициента интенсивности напряжений на δN длина трещины оставалась неизменной (фиг. 1). Величина $\delta A_p = T \delta S G_p$, где T — интенсивность касательных напряжений, δS — приращение погонного объема пластической области, G_p — среднее значение интенсивности пластических деформаций в δS , может зависеть лишь от σ_s , E , N , ν , δN . Так как T может зависеть лишь от σ_s , δS — от δd , G_p — от σ_s , E и ν , то, применяя анализ размерностей и (1.1), находим

$$\delta A_p = 2\alpha_3 \left(\frac{\sigma_s}{E}, \nu \right) \frac{N^3}{\sigma_s^3} \delta N \quad (1.4)$$

Окончательно получаем следующее уравнение энергии:

$$\gamma_* = \alpha_2 \left(\frac{\sigma_s}{E}, \nu \right) \frac{N^2}{E} + \alpha_3 \left(\frac{\sigma_s}{E}, \nu \right) \frac{N^3}{\sigma_s^3} \frac{dN}{dl} \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) должно быть справедливым, в частности, для идеально-упругого тела; при этом второй член в правой части (1.5) обращается в нуль. В этом предельном случае, используя формулу Ирвина [14-16], можно найти α_2

$$\alpha_2 = \begin{cases} \pi & (\text{плоское напряженное состояние}) \\ \pi(1-\nu^2) & (\text{плоская деформация}) \end{cases} \quad (1.6)$$

Применим теперь физическую концепцию Ирвина — Орована; согласно этой концепции, величина γ_* представляет собой постоянную материала [14-18]. Уравнение (1.5) можно записать в виде, напоминающем формулировку закона течения упрочняющегося упруго-пластического тела

$$dl = \frac{\alpha_3 E N^3 dN}{\alpha_2 \sigma_s^3 (K_c^2 - N^2)} \quad \left(K_c^2 = \frac{E \gamma_*}{\alpha_2} \right) \quad (1.7)$$

Здесь K_c — постоянная Ирвина.
Интегрируя (1.7), находим

$$l - l_0 = - \frac{\alpha_3 E K_c^2}{2\alpha_2 \sigma_s^3} \left[\frac{N^2}{K_c^2} + \ln \left(1 - \frac{N^2}{K_c^2} \right) \right] \quad (1.8)$$

($N=0$ при $l=l_0$)

Кривая (1.8) в безразмерных переменных \bar{N}_* и Δl_*

$$\Delta l_* = \frac{2\alpha_2 \sigma_s^3}{\alpha_3 E K_c^2} (l - l_0), \quad N_* = \frac{N}{K_c} \quad (1.9)$$

изображена на фиг. 2 сплошной линией. Условие (1.8) играет роль дополнительного граничного условия на контуре трещины в упруго-пластическом теле; определив из упругого анализа напряжений функцию $N = N(p, l)$, где p — параметр внешнего нагружения, можно затем при помощи (1.8) найти зависимость l от p в каждой конкретной задаче.

Как видно из фиг. 2, в упруго-пластических телах рост трещин происходит также при значениях коэффициента интенсивности напряжений, меньших постоянной Ирвина K_c ; условие Ирвина $N = K_c$ выполняется асимптотически при $\Delta l_* \gg 1$, когда начальные условия больше не влияют (практически уже при $\Delta l_* \gtrsim 2$ на основании фиг. 2 всякое упруго-пластическое тело начинает вести себя как идеально-хрупкое).

Указанные качественные особенности развития трещин в упруго-пластических телах хорошо известны экспериментаторам [20–22].

В формулах (1.1) и (1.9) фигурируют величины $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, которые остались неопределенными; для отыскания их можно использовать опыты. В случае сквозных трещин в пластинах из упруго-пластического материала, подчиняющегося условию пластичности Треска-Сен-Венана, существует приближенное решение упруго-пластической задачи [23,17]. Расчет дает в таком случае следующие значения α_1 и α_3 [18]:

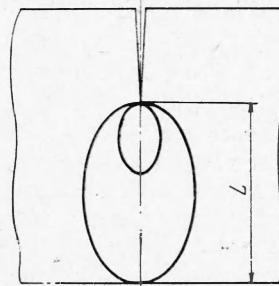
$$\alpha_1 = \frac{\pi^2}{4}, \quad \alpha_3 = \frac{\pi^3 \sigma_s}{3E} \quad (1.10)$$

Пластическая область представляет собой отрезок длины d на продолжении трещины.

Масштабный эффект. Уже давно известно, что один и тот же материал может вести себя совершенно по-разному в различных конструкциях; в тонкостенных или малогабаритных изделиях материал может вести себя как вполне пластичный, а в толстостенных или крупногабаритных — как весьма хрупкий. Объяснение этого явления получается как некоторое следствие изложенной выше теории. Действительно, согласно формуле (1.1), максимально возможный размер пластической области в конце трещины равен

$$d_{\max} = \alpha_1 \frac{K_c^2}{\sigma_s^2} \quad (1.11)$$

Представим себе для простоты образец с трещиной (фиг. 3). Если $d_{\max} \ll \ll L$, то при разрушении материал будет вести себя как весьма хрупкий, т. е. предельная нагрузка будет весьма существенно зависеть от размеров начальной трещины; если же $d_{\max} \gtrsim L$, то материал будет вести себя как вполне пластичный и максимальная нагрузка будет весьма слабо зависеть от размера начальной трещины (а в предельном случае жестко-пластического тела, т. е. при $d_{\max} \gg L$, вообще не будет зависеть от размера трещины, а будет полностью определяться рабочим сечением образца). Поскольку начальные трещины или дефекты в материале неизбежны (в основном по технологическим причинам), а их размер довольно случаен



Фиг. 3

и трудно контролируем, то ясно, что при работе узла на растяжение конструктор часто отдает предпочтение более надежным пластичным материалам, хотя и менее прочным.

Из изложенного следует, что при обоснованном выборе оптимального материала для конструкции одной из основных характеристик (кроме учитываемых обычно прочности и податливости) должна служить степень надежности материала, показателем которой является следующий безразмерный параметр χ :

$$\chi = \frac{K_c^2}{\sigma_s^2 L} \quad (1.12)$$

Здесь L — характерный линейный размер конструкции. При $\chi \gg 1$ материал ведет себя как пластичный и начальные дефекты можно не учитывать при расчете. При $\chi \sim 1$, и в особенности, при $\chi \ll 1$ в расчете совершенно необходим учет внутренних дефектов материала и применение теории трещин. В общем можно сказать, что чем больше χ , тем более надежен материал в работе (разумеется, при прочих равных условиях, и прежде всего, степени дефектности).

Скачкообразный рост трещин. Концепция Ирвина — Орована о постоянстве γ_* , как видно, хорошо описывает плавный рост трещин в упруго-пластических телах (фиг. 2). Однако существует эффект второго порядка — явление скачкообразного роста трещин в некоторых упруго-пластических материалах, — который не может быть объяснен в рамках этой концепции. Это явление соответствует наличию горба на диаграмме $N - \Delta l$ (на фиг. 2 обозначено пунктирной линией) и совершенно аналогично явлению задержки пластичности («зуб» на диаграмме $\sigma - \epsilon$). Заметим, что диаграмма $N - \Delta l$ по своему физическому смыслу аналогична диаграмме $\sigma - \epsilon$ и согласно (1.2) может быть найдена из прямого эксперимента без привлечения каких-либо дополнительных физических концепций. Наличие горба на диаграмме, по-видимому, объясняется присутствием в гетерогенной структуре материала весьма прочных компонент, препятствующих росту трещин и дислокаций; величина горба (как и высота зуба [24]), по-видимому, существенно зависит от скорости нагружения, т. е. от dN / dt (t — время).

2. Рост трещин при циклическом нагружении. Рассмотрим теперь квазистатическое развитие трещин в упруго-пластических телах в случае циклического нагружения, когда нагрузки представляют собой некоторые периодические функции времени. В постановке задачи о тонкой структуре конца трещины, когда имеет смысл понятие коэффициента интенсивности напряжений, скорость распространения конца трещины dl / dn при циклическом нагружении может зависеть только от наибольшего и наименьшего значений коэффициента интенсивности напряжений в течение одного цикла N_{\max} и N_{\min} , от числа циклов n , от энергии γ_* , диссипируемой при образовании единицы поверхности трещины, и от постоянных материала E , σ_s , ν . Поскольку n очень велико, с ним можно обращаться как с непрерывным аргументом. Анализ размерностей дает

$$\frac{dl}{dn} = \frac{N_{\max}^2}{\sigma_s^2} \Psi \left(\frac{N_{\max}^2}{E \gamma_*}, \frac{N_{\min}}{N_{\max}}, n, \frac{\sigma_s}{E}, \nu \right) \quad (2.1)$$

Здесь Ψ — некоторая безразмерная функция своих аргументов.

Скорость роста трещины. Функциональная зависимость (2.1) может быть определена на основе соображений, совершенно аналогичных только что изложенным. В предыдущем пункте предполагалось, что в начале нагружения деформации и напряжения в теле отсутствуют; изучим теперь процесс роста конца трещины при увеличении N от N_{\min} до N_{\max} , предполагая, что начальному состоянию при $N = N_{\min}$ предшествовала некоторая предыстория процесса деформирования, в результате которого

¹ Аналогичные диаграммы в работах Я. Б. Фридмана и его сотрудников удачно названы диаграммами разрушения.

в теле возникли остаточные (начальные) напряжения и деформации. Нетрудно видеть, что все рассуждения, при помощи которых были получены формулы (1.1), (1.3) — (1.5), (1.7), непосредственно переносятся и на рассматриваемый случай; однако величины α_1 , α_2 и α_3 теперь зависят от предыстории деформирования, предшествующей начальному моменту $N = N_{\min}$. Обозначим через σ_0 параметр, характеризующий величину начальных напряжений, ответственных за историю нагружения и развития трещины ($\sigma_0 \ll \sigma_s$).

Аналогично формулам (1.1), (1.7) получаем

$$\frac{dl}{dN} = \alpha_1 \left(\frac{\sigma_0}{E}, \frac{\sigma_s}{E}, \nu \right) \frac{EN^3}{\sigma_s^3 (K_c^2 - N^2)}, \quad d = \alpha_1 \left(\frac{\sigma_0}{E}, \frac{\sigma_s}{E}, \nu \right) \frac{N^2}{\sigma_s^2} \quad (2.2)$$

Здесь постоянные материала σ_s , E , K_c , ν , вообще говоря, зависят от предварительного деформирования (разрыхления материала). Однако в дальнейшем для простоты такой зависимостью пренебрегается.

Покажем, что зависимостью функций α_1 и α_4 от первого аргумента σ_0/E можно пренебречь. Действительно, это следует из того, что $\sigma_0 \ll \ll \sigma_s$, а величина σ_s/E для всех конструкционных материалов очень мала (~ 0.01); кроме того, известно из предыдущего пункта, что при $\sigma_0 \rightarrow 0$ существует конечный предел непрерывных функций $\alpha_1(\sigma_0/E, \sigma_s/E, \nu)$ и $\alpha_4(\sigma_0/E, \sigma_s/E, \nu)$. Обозначим через β следующую постоянную материала¹:

$$\beta = \alpha_4 \left(0, \frac{\sigma_s}{E}, \nu \right) \frac{EK_c^2}{2\sigma_s^3} \quad (2.3)$$

Весьма естественным является допущение о том, что при разгрузке от N_{\max} до N_{\min} длина трещины не изменяется.

Интегрируя при этом (2.2) от N_{\min} до N_{\max} , получаем приращение длины трещины Δl в течение одного цикла

$$\Delta l = -\beta \left(\frac{N_{\max}^2 - N_{\min}^2}{K_c^2} + \ln \frac{K_c^2 - N_{\max}^2}{K_c^2 - N_{\min}^2} \right) \quad (2.4)$$

Переходя к непрерывным переменным, находим окончательно искомую скорость роста трещины

$$\frac{dl}{dn} = -\beta \left(\frac{N_{\max}^2 - N_{\min}^2}{K_c^2} + \ln \frac{K_c^2 - N_{\max}^2}{K_c^2 - N_{\min}^2} \right) \quad (2.5)$$

Скорость роста трещины согласно (2.5), (1.8), (1.9) удобно определять при помощи диаграммы разрушения $N_* - \Delta l_*$ фиг. 2.

Уравнение (2.5) играет роль дополнительного граничного условия на контуре трещины в упруго-пластическом теле при циклическом нагружении; зависимость l от параметров внешнего нагружения p_{\max} и p_{\min} в каждой конкретной задаче находится после подстановки коэффициентов интенсивности напряжений N_{\max} и N_{\min} (определяемых из чисто упругого анализа и являющихся функциями p и l) в дифференциальное уравнение (2.5) и его решения относительно $l(n)$.

При помощи уравнения (2.5), очевидно, можно рассмотреть также тот случай, в котором p_{\max} и p_{\min} изменяются с течением времени (измеряемого числом циклов).

¹ Таким образом, допущение о том, что влиянием остаточных напряжений на рост трещины можно пренебречь, в данном случае оправдывается возможностью замены непрерывной функции $f(\epsilon)$ на $f(0)$, так как $f(0)$ конечно, а ϵ мало. Заметим, что это допущение принимается во всех известных автору теоретических работах по росту усталостных трещин (например, в работах Мак-Клинтонка [25], Париса [26], Халта [27]).

Заменим правую часть (2.5) отрезком ряда Тэйлора; при этом получим следующее уравнение, иногда более удобное:

$$\frac{dl}{dn} = \beta \left(\frac{N_{\max}^4 - N_{\min}^4}{2K_c^4} + \frac{N_{\max}^6 - N_{\min}^6}{3K_c^6} + \frac{N_{\max}^8 - N_{\min}^8}{4K_c^8} + \dots \right) \quad (2.6)$$

Если $N_{\min} < 0$, то в формулах (2.5), (2.6) следует полагать $N_{\min} = 0$, так как при сжатии трещина закрывается (за исключением, быть может, малой области вблизи конца трещины) и концентрация напряжений в конце трещины исчезает.

Сравнение с экспериментом. Несмотря на большое число экспериментов, посвященных усталостной прочности, изучением роста фиксированных усталостных трещин занимаются лишь последние 10 лет. При этом первые исследователи (Орован, Хэд, Фрост, Вейбулл) еще не понимали локального характера закономерностей разрушения в конце трещины и поэтому формулировали свои результаты в неинвариантных переменных. После работ Ирвина это стало очевидным. В последние годы обширные экспериментальные исследования по скорости роста усталостных трещин были проведены Дональдсоном и Андерсоном [28], Парисом [26] и Пирсоном [29]. Ими было изучено большое число сплавов алюминия, молибдена, титана и др. при $N_{\min} = 0$. При этом Парис приходит к формуле $dl/dn \sim N_{\max}^4$, а Пирсон — к формуле $dl/dn \sim N_{\max}^{3.6}$. Еще ранее Лью, по-видимому, обремененный неточными теоретическими представлениями Фроста и Дагдейла [6], пришел к зависимости $dl/dn \sim N_{\max}^2$; Парис указал на неточность в его расчетах, которую Лью фактически признал в дискуссии [26].

Согласно (2.7), при $N_{\max}/K_c \lesssim 0.5$ с точностью примерно 15% уравнение (2.6) можно заменить формулой Париса. Учитывая большой статистический разброс опытных данных, такое согласие с экспериментами Париса и Пирсона можно считать вполне удовлетворительным.

Формула (2.5) хорошо описывает также опытные данные Дональдсона и Андерсона [28]. В. М. Маркочев¹ указывает экспоненциальную зависимость $dl/dn \sim A + \exp(BN_{\max})$ при сравнительно небольшом числе циклов ($10^3 \div 10^4$), т. е. при N_{\max}/K_c , близком к единице (малоцикловая усталость), для четырех исследованных сплавов. При рассмотрении эти данные также оказываются вполне удовлетворительно описываемыми уравнением (2.5). Наличие различных эмпирических формул объясняется большим статистическим разбросом данных и тем, что исследователи работали на различных участках диаграммы $N_* - \Delta L_*$.

Полученные результаты легко распространить на случай сдвиговых трещин. Заметим, что для трещин продольного сдвига Мак-Клинток вывел приближенную теоретическую зависимость $dl/dn \sim N_{\max}^4$, основываясь на представлениях о накоплении пластической деформации материала в пластической области [28].

3. Нераспространяющиеся усталостные трещины. Эксперименты показывают [6-8], что возникшие на первом этапе усталостные трещины иногда не распространяются независимо от числа циклов нагружения. В физическом отношении это явление, по-видимому, связано с микронеоднородностью и зернистостью реальных материалов, а также со свойством приспособляемости². Последнее нетрудно получить из общих соображений инвариантности для трещин, удовлетворяющих постановке задачи о тонкой структуре конца трещины, когда имеет смысл понятие коэффициента интенсивности напряжений. Действительно, в самом общем случае условие нераспространения конца трещины при $N = N_{\max}$ и при весьма большом числе циклов нагружения, когда можно пренебречь влиянием начальных условий, может быть записано в виде некоторого неравенства, в котором участвуют параметры упруго-пластической среды (напряжения, деформации, смещения и др.) и их функциональные характеристики вблизи конца трещины (вследствие локального характера разрушения). Так как все параметры среды вблизи конца трещины при больших n и при $N = N_{\max}$ зависят лишь от N_{\max} и N_{\min} , то любое неравенство сведется к следующему:

$$N_{\max} \leq K_Y f(N_{\min}/N_{\max}) \quad (0 \leq K_Y \leq K_c) \quad (3.1)$$

¹ Диссертация и автореферат: В. М. Маркочев «Методика и исследование кинетики макроразрушения листовых материалов при однократном и повторном нагружении». М., ВИАМ, 1966 г.

² На роль приспособляемости в этом вопросе внимание автора обратил В. В. Болотин.

Здесь f — некоторая безразмерная функция своего аргумента, K_Y — постоянная материала. Если $K_Y \neq 0$, то у материала, очевидно, будет отличный от нуля предел усталости.

По определению условия нераспространения трещины, выходящей, в частности, на свободную прямолинейную границу «полубесконечной» пластины перпендикулярно к границе (причем на «бесконечности» пластина подвергалась однородному циклическому растяжению напряжениями p при постоянном коэффициенте асимметрии цикла), большую экспериментальную работу проделал Фрост [30,31]. Им сформулировано эмпирическое условие $p_{\max}^2 l < C$, где C — постоянная материала. Из соображений анализа размерностей N_{\max}^2 в данном случае равно $\lambda p_{\max}^2 l$, где λ — некоторое число. Отсюда на основании общего условия (3.1) трещина не будет расти при $p_{\max}^2 l < K_Y / \lambda$. Совпадение с данными Фроста следует признать удовлетворительным, особенно если учесть, что в опытах Фроста при малых l требуемое условие $d \ll l$ (тонкая структура конца трещины) выполнялось плохо.

Заметим, что условие Ирвина $N = K_c$ для хрупких трещин может быть получено из таких же соображений инвариантности [16,17].

4. Устойчивость роста трещин. Исследование условий устойчивого роста трещин представляется важным в связи с тем, что переход в неустойчивую область на практике обычно вызывает разрушение конструкции.

Монотонное возрастание нагрузки. Обозначим через p параметр внешней нагрузки, а через l — параметр длины трещины, являющийся некоторой функцией от p . Пусть с увеличением p внешняя нагрузка возрастает, а с увеличением l трещина растет. Тогда параметрическое условие устойчивости роста конца трещины будет иметь вид

$$\frac{dp}{dl} > 0 \quad (4.1)$$

При перемене знака в (4.1) получается условие неустойчивости. Посмотрим, какой вид примет условие (4.1) в случае монотонно возрастающей нагрузки на упруго-пластическое тело. Так как функция $N = N(p, l)$ определена из упругого анализа напряжений, то формула (1.8) дает в неявном виде зависимость p от l . Дифференцируя ее по l и используя (4.1), получаем следующее условие устойчивости:

$$\left[\frac{\alpha^2 \sigma_s^3 (K_c^2 - N^2)}{\alpha_s E N^3} - \frac{\partial N}{\partial l} \right] / \frac{\partial N}{\partial p} > 0 \quad (4.2)$$

Условие неустойчивости получается переменной знака в (4.2). Неравенство (4.2) позволяет на основании упругого анализа задачи заранее выделить на плоскости (p, l) области устойчивого и неустойчивого роста трещин.

В частности, при $N = K_c$ из (4.2) получается следующее условие устойчивости роста хрупкой трещины:

$$\frac{\partial N}{\partial l} / \frac{\partial N}{\partial p} < 0 \quad (4.3)$$

Циклическая нагрузка. При циклическом нагружении длина трещины, согласно (2.6), всегда растет монотонно с увеличением числа циклов ($dl/dn > 0$). Рассматривая возрастание внешней нагрузки в течение одного из циклов и используя формулы (2.2), (2.3) и условие (4.1), совершенно аналогично предыдущему приходим к следующему условию устойчивости:

$$\left[\frac{K_c^2 (K_c^2 - N^2)}{2\beta N^3} - \frac{\partial N}{\partial l} \right] / \frac{\partial N}{\partial p} > 0 \quad (4.4)$$

Условие неустойчивости получается переменной знака в (4.4). Согласно (4.4), число циклов до момента потери устойчивости (что обычно связано с разрушением конструкции в целом) определяется из уравнения

$$K_c^2 (K_c^2 - N^2) = 2\beta N \frac{\partial N}{\partial l} \quad (N = N(p, l)) \quad (4.5)$$

в которое подставлено значение $p = p_{\max}$ и функция $l = l(p_{\max}, p_{\min}, n)$, определенная из решения дифференциального уравнения задачи (2.5).

Укажем еще границу существования решения, вытекающую из (2.5), $N(p, l) \ll K_c$. При подходе к этой границе скорость роста трещины стремится к бесконечности (но длина трещины конечна).

5. Конкретные задачи. Рассмотрим некоторые наиболее типичные задачи о развитии усталостных трещин.

Аналог задачи Гриффитса. Пусть прямолинейная сквозная трещина длины $2l$ находится в неограниченной пластине, растягиваемой на бесконечности одноосными напряжениями $\sigma_y = p$ (фиг. 4). Направление растяжения перпендикулярно линии трещины. Берега трещины считаются свободными от нагрузки. В этом случае коэффициент интенсивности неапряжных равен [14]

$$N = p \sqrt{l} / \sqrt{2} \quad (5.1)$$

Представим себе, что нагрузка p является некоторой периодической функцией времени и $p_{\max} \gg p \gg p_{\min}$.

Согласно (2.5) и (5.1) скорость роста трещины будет равной

$$\frac{dl}{dn} = -\beta \left[(a-b)l + \ln \frac{1-al}{1-bl} \right] \quad (5.2)$$

$$\left(a = \frac{p_{\max}^2}{2K_c^2}, \quad b = \frac{p_{\min}^2}{2K_c^2} \right)$$

При $p_{\min} < 0$ следует считать $b = 0$.

Число циклов до момента потери устойчивости n_f определяется при помощи (5.1), (5.2) и (4.5) из следующей системы уравнений:

$$al(\beta a + 1) = 1 \quad (5.3)$$

$$\beta a n_f = \int_{a l_0}^{al} \frac{dx}{\ln(1-bx/a) - \ln(1-x) - (1-b/a)x}$$

Здесь l_0 — начальная длина трещины.

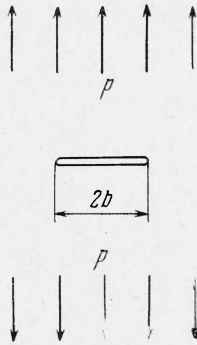
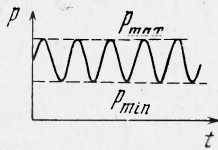
Решение уравнения (5.2) существует в области $0 < n < n_c$, $l_0 < l < a^{-1}$, где максимально возможное число циклов n_c определяется вторым уравнением (5.3) при $al = 1$, в котором нужно только заменить n_f на n_c . Очевидно, граница существования решения $n = n_c$ задает начало чисто хрупкого разрушения, отвечающего решению Гриффитса $p_{\max}^2 = 2K_c^2 l$ [32]. Последнее соответствует моменту быстрого ускорения роста трещины.

Согласно (4.4), (5.1) и (5.3), при $n_c > n > n_f$ трещина будет расти в неустойчивом режиме, поэтому n_f в данном случае следует считать числом циклов до разрушения всей пластины.

Функция $l = l(n)$ согласно (5.2) монотонно возрастает от $l = l_0$ до $l = a^{-1} = l(n_c)$, причем $l'(n_c) = \infty$. Значения ее при $al_0 = 0.1$ и при $b = 0$ приведены ниже для нескольких значений безразмерных переменных $l_* = al$, $n_* = a\beta n$

$n_* = 1$	4	6	8	10	12	14	15
$l_* = 0.10$	0.12	0.15	0.18	0.22	0.30	0.55	0.82

Далее приведены подсчитанные по формуле (5.3) значения максимальной нагрузки за цикл p_{\max} в зависимости от числа циклов n_f до разрушения при $b = 0$ и при



Фиг. 4

$\beta p_{\max}^2 \ll 2K_c^2$ (в безразмерных переменных $a_n = ai_c, n_{f_c} = \beta n_c / l_0$)

$n_{f_c} = 0$	2	4	6	10	20	160
$a_* = 0.80$	0.48	0.40	0.35	0.29	0.25	0.20

При этом практический предел усталости равен примерно $K_Y^2 \approx 0.2K_c^2$.

Условие $\beta p_{\max}^2 \ll 2K_c^2$ на основании (2.4) и (5.1) означает, что приращение длины трещины за один цикл считается малым сравнительно с длиной всей трещины.

Известно, что испытания упруго-пластических материалов на однократное растяжение до разрушения приводят к результатам с высокой степенью повторяемости; в то же время результаты испытаний тех же материалов при циклическом нагружении имеют ярко выраженный вероятностный характер. Этот факт объясняется в предлагаемой теории наличием параметра l_0 в формуле (5.3); параметр l_0 представляет собой длину начальной трещины в материале или же длину трещины, возникшей на первом этапе, и, очевидно, является в значительной степени случайной структурной характеристикой материала.

Таким образом, статистическая природа усталостной прочности аналогична статистической природе хрупкой прочности.

Трещина, выходящая на поверхность тела. Пусть на прямолинейную свободную границу полупространства выходит прямолинейная трещина длины l перпендикулярно границе. Предполагаются выполненными условия плоской деформации или плоского напряженного состояния. Считается, что берега трещины свободны от нагрузок, а на бесконечности приложены циклические напряжения p , параллельные границе полупространства. В этом случае коэффициент интенсивности напряжений равен [33]

$$N = 0.79 p \sqrt{l} \tag{5.4}$$

Все качественные особенности, присущие предыдущей задаче, как легко видеть, остаются и в рассматриваемой. Сохраняются, в частности, выражения (5.2) и (5.3) для скорости роста трещины и предельного числа циклов, а также остаются справедливыми проведенные выше расчеты; при этом под a и b следует понимать следующие выражения:

$$a = 0.62 \frac{P_{\max}^2}{K_c^2}, \quad b = 0.62 \frac{P_{\min}^2}{K_c^2} \tag{5.5}$$

Трещина под действием сосредоточенной силы. Пусть к противоположным берегам прямолинейной сквозной трещины длины $2l$, находящейся в безграничной пластине, приложены равные и противоположно направленные сосредоточенные силы P . Силы действуют в середине трещины перпендикулярно к ее поверхности. На бесконечности напряжения отсутствуют. В этом случае коэффициент интенсивности напряжений равен [14]

$$N = \frac{P}{\pi \sqrt{2l}} \tag{5.6}$$

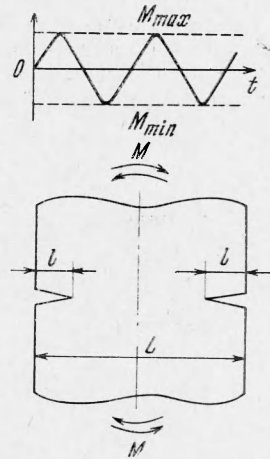
Пусть P_* представляет собой периодическую функцию времени ($P_{\max} \gg P \gg 0$). Согласно (2.5) и (5.6), скорость роста трещины будет равна

$$\frac{dl}{dn} = -\beta \left[\frac{P_{\max}^2}{2\pi^2 K_c^2 l} + \ln \left(1 - \frac{P_{\max}^2}{2\pi^2 K_c^2 l} \right) \right] \tag{5.7}$$

В данном случае рост усталостной трещины начинается от значения длины трещины l_1 , которая образуется из начальной трещины длины l_0 при монотонном возрастании силы до P_{\max} в течение первого цикла. Согласно (5.6) и (1.8), величина l_1 определяется из уравнения

$$l_1 = l_0 - \frac{\alpha_3 E K_c^2}{2\alpha_2 \sigma_s^3} \left[\frac{P_{\max}^2}{2\pi^2 K_c^2 l_1} + \ln \left(1 - \frac{P_{\max}^2}{2\pi^2 K_c^2 l_1} \right) \right] \tag{5.8}$$

которое легко решается при помощи графика фиг. 3.



Фиг. 5

Решение уравнения (5.7) может быть представлено в виде

$$n_* = - \int_{1/l_*}^{1/l_{*1}} \frac{dx}{x^2 [x + \ln(1-x)]}$$

$$\left(n_* = \frac{2\pi^2 K_c^2 \beta}{P_{\max}^2} n, \quad l_* = \frac{2\pi^2 K_c^2}{P_{\max}^2} l, \quad l_{*1} = \frac{2\pi^2 K_c^2}{P_{\max}^2} l_1 \right) \quad (5.9)$$

Некоторые значения функции $l_* = l_*(n_*)$ приведены ниже при $l_{*1} = 1$

$n_*=0$	1	2	4	8	12
$l_*=1.00$	1.60	1.75	2.31	2.81	3.00

Согласно общему условию нераспространения трещин (3.2), трещина монотонно растет до значения l_Y

$$l_Y = \frac{P_{\max}^2}{2\pi^2 K_Y^2} \quad (5.10)$$

после чего перестает расти (при $l_{*1} = 1$, $l_Y \approx 3$ и $K_Y^2 \approx 1/3 K_c^2$).

Трещина в балке прямоугольного сечения (фиг. 5).

Пусть балка прямоугольного поперечного сечения подвергается знакопеременному чистому изгибу моментом M ($M_{\max} \geq M \geq -M_{\max}$). В этом случае коэффициент интенсивности напряжений в вершинах симметрично растущих трещин будет равен [34]

$$N = \frac{M}{L^{3/2}} \sqrt{f(\lambda)} \quad \left(\lambda = \frac{l}{L} \right) \quad (5.11)$$

Некоторые значения функции f приведены ниже

$\lambda=0$	1	2	4	6	10	15	20
$f(\lambda)=0$	0.11	0.20	0.32	0.39	0.47	0.53	0.57

Согласно (2.5) скорость роста трещины равна

$$\frac{d\lambda}{dn_*} = -M_*^2 f(\lambda) - \ln[1 - M_*^2 f(\lambda)]$$

$$\left(M_* = \frac{M}{K_c L^{3/2}}, \quad n_* = \frac{\beta}{L} n \right) \quad (5.12)$$

Решение уравнения (5.12) легко находится при помощи графического интегрирования. Функция λ зависит от n_* , от начального значения λ_0 и M_* . Предельное число циклов до разрушения, согласно (4.5) и (5.11), определяется уравнением

$$M_* \sqrt{f[\lambda(n_*, \lambda_0, M_*)]} = 1 \quad (5.13)$$

если пренебречь приращением длины трещины за один цикл по сравнению с шириной балки L . Приведем численный пример. При $\lambda_0 = 0.05$, $M_* = 0.33$ будет $\lambda_{\max} \approx 0.4$, $n_{j*} = 10$.

Ряд значений функции $\lambda(n_*)$ приводится ниже

$n_*=0$	2	5	7	8	9	9.5
$\lambda=0.05$	0.06	0.08	0.11	0.15	0.25	0.36

Автор благодарен Ю. Н. Работнову за ценные замечания.

Поступила 13 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Серенсен С. В., Коган В. П., Шнейдерович Р. М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. Изд. 2, М., Машгиз, 1963.
2. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1962.
3. Ратнер С. И. Разрушение при повторных нагрузках. М., Оборонгиз, 1959.
4. Одинг И. А. Допускаемые напряжения в машиностроении и циклическая прочность металлов. М., Машгиз, 1962.

5. Иванова В. С. Усталостное разрушение металлов. М., Metallurgizdat, 1963.
6. Frost N. E., Dugdale D. S. Fatigue tests on notched mild steel plates with measurements of fatigue cracks. *J. Mech. Phys. Solids*, 1957, vol. 5, No. 3, pp. 182—192.
7. Маквивли А. Дж., Илг У. Метод определения скорости распространения трещины усталости. В сб.: «Усталость и выносливость металлов», М., Изд-во иностр. лит., 1963.
8. Frost N. E., Holden J., Phillips C. E. Experimental studies into the behavior of fatigue cracks. *Proc. Crack Propagation Sympos.*, Cranfield, 1961, Cranfield college Aeronaut., 1962, vol. 1, p. 166.
9. Grosskreutz J. C. A Critical Review of Micromechanisms in Fatigue. In: «Fatigue», *Proc. 10-th Sagamore Army Mater. Res. Conf.*, 1963, Syracuse Univ. Press, 1964.
10. Forsyth P. J. E. A two stage process of fatigue crack growth. *Proc. Crack Propagation Sympos.*, Cranfield, Cranfield college Aeronaut., 1962, vol. 1, p. 76.
11. Metal fatigue. London, Chapman, 1959.
12. Вагапов Р. Д., Фридман Я. Б. О влиянии типа нагружения на усталостную прочность. Заводск. лаборатория, 1961, № 2.
13. Усталость и выносливость металлов. Сб. статей. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
14. Irwin G. R. Fracture, In: «Handbuch der Physik», Berlin, Springer — Verlag, 1958, Bd. 6, p. 551.
15. Irwin G. R. Fracture Mechanics. In: «Structural Mechanics», *Proc. 1-th. Sympos. on Naval Structural Mech.*, Pergamon, 1960.
16. Черепанов Г. П. К математической теории равновесных трещин. *Инж. ж., МТТ*, 1967, № 6.
17. Черепанов Г. П. О квазихрупком разрушении. *ПММ*, 1968, т. 32, вып. 6.
18. Черепанов Г. П. Cracks in solids. *Int. J. Solids and Structures*, 1968, vol. 4, p. 811.
19. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 4, М., Гостехиздат, 1957.
20. Irwin G. R. Fracture dynamics. In: «Fracturing of Metals», ASM, Cleveland, 1948.
21. Srawley J. E., Brown W. F., Jr. Fracture toughness testing Methods. In: «Fracture Toughness Testing and Its Application», *Sympos. Chi. 1964, Philad.*, 1965 (Amer. Soc. Test. Mater.).
22. Дроздовский Б. А., Фридман Я. Б. Влияние трещин на механические свойства конструкционных сталей. М., Metallurgizdat, 1960.
23. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 1960, vol. 8, No. 2.
24. Clark D. S., Wood D. S. The time delay for the initiation of plastic deformation at rapidly applied constant stress. *Proc. Amer. Soc. Test. Mater.*, 1949, 49.
25. McClintock F. A. On the Plasticity of the Growth of Fatigue Cracks. In: «Fracture of Solids», *Proc. Internat. Congr. Metallurg.*, 1962, vol. 20, Washington, 1963.
26. Paris P. C. The Fracture Mechanics Approach to Fatigue. In: «Fatigue», *Proc. 10-th Sagamore Army Mater. Res. Conf.*, 1963, Syracuse Univ. Press., 1964.
27. Hult J. A. H. Fatigue crack propagation in torsion. *J. Mech. Phys. Solids*, 1957, vol. 6, No. 1, p. 47—52.
28. Donaldson D. R., Anderson W. E. Crack propagation behavior of some air frame materials. *Proc. Crack Propagation Sympos.* Cranfield, 1961, Cranfield college Aeronaut., 1962, vol. 2, p. 375.
29. Pearson S. Fatigue crack propagation in metals. *Nature*, 1966, vol. 211, No. 5053, p. 1077.
30. Frost N. E. Significance of non-propagating cracks in the interpretation of notched fatigue data. *J. Mech. Engng. Sci.*, 1961, vol. 3, No. 4, No. 4, pp. 299.
31. Frost N. E. Alternating stress required to propagate edge cracks in copper and nickelchromium alloy steel plates. *J. Mech. Engng. Sci.*, 1959, vol. 5, No. 1.
32. Griffith A. A. The phenomenon of rupture and flow in solids. *Philos. Trans. Roy. Soc.*, London, Ser. A, 1920, vol. 221.
33. Wigglesworth L. A. Stress distribution in a notched plate. *Mathematika*, 1957, vol. 4, No 7, pp. 76—96.
34. Bueckner H. F. Some stress singularities and their computation by means of integral equations. In: «Boundary problems in differential equations», Univ. Wisconsin Press, 1960, pp. 215—230.