УДК 539.3

# УРАВНЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИЗГИБА ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ИХ ЛИЦЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Ю. М. Волчков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mail: volk@hydro.nsc.ru

На основе аппроксимации решений уравнений теории упругости отрезками полиномов Лежандра построены дифференциальные уравнения изгиба ортотропных пластин. В отличие от уравнений, построенных с использованием кинематических и силовых гипотез, порядок данных дифференциальных уравнений не зависит от вида условий на лицевых поверхностях. Матрицы построенных уравнений зависят от вида краевых условий. Приведено аналитическое решение системы уравнений для случая, когда на верхней и нижней лицевых поверхностях заданы нормальные и касательные напряжения.

Ключевые слова: ортотропный материал, пластины, цилиндрический изгиб, полиномы Лежандра.

**Введение.** При сведении трехмерной задачи теории упругости к двумерной (теории оболочек) применяются либо гипотезы кинематического и силового характера [1], либо разложения по некоторой полной системе функций [2–5]. Как правило, уравнения теории оболочек с использованием гипотез типа гипотез Кирхгофа — Лява строятся для случая задания на поверхностях пластины усилий. При этом порядок системы дифференциальных уравнений зависит от вида условий, заданных на лицевых поверхностях пластины. Это не позволяет корректно формулировать контактные задачи, поскольку в таких задачах на одной части поверхности пластины заданы напряжения, а на другой — смещения. В [3, 4] на основе разложений по полиномам Лежандра построены дифференциальные уравнения для упругого слоя из изотропного материала, порядок которых не зависит от вида краевых условий на его поверхностях, что обеспечивает корректную постановку контактных задач. Уравнения слоя в первом приближении сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В [4] приведены общие решения таких уравнений для изотропного упругого слоя постоянной толщины, в [4, 5] — решения некоторых контактных задач.

В данной работе на основе аппроксимаций решений уравнений плоской задачи теории упругости построены дифференциальные уравнения упругого слоя из ортотропного материала в первом приближении, порядок которых не зависит от вида условий, задаваемых на его лицевых поверхностях.

**1. Уравнения теории упругости задачи о плоском напряженном состоянии.** При записи уравнений задачи будем использовать прямоугольную декартову систему координат $x_1, x_2, x_3$. В дальнейшем индексы 1, 2, 3 соответствуют координатам $x_1, x_2, x_3$.

В задаче о плоском напряженном состоянии компонента тензора напряжений $\sigma_{33}$ полагается равной нулю, а компонента тензора деформаций $\varepsilon_{33}$ может быть найдена после решения задачи. В плоской задаче искомыми функциями являются компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}$, $\sigma_{12}$, $\sigma_{22}$, компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{11}$, $\varepsilon_{12}$, $\varepsilon_{22}$, компоненты вектора перемещений $u_1$, $u_2$. Компоненты тензора напряжений $\sigma_{13}$, $\sigma_{23}$ и компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{13}$, $\varepsilon_{23}$ полагаются равными нулю. Все искомые величины являются функциями независимых переменных $x_1$, $x_2$.

Запишем уравнения равновесия элемента, бесконечно малого в направлениях $x_1$, $x_2$ и имеющего единичную ширину в направлении $x_3$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_{11}(x_1,x_2)}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}(x_1,x_2)}{\partial x_2}+f_1(x_1,x_2)=0,\\ \frac{\partial\sigma_{21}(x_1,x_2)}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}(x_1,x_2)}{\partial x_2}+f_2(x_1,x_2)=0.\end{gathered}\tag{1}$$

Компоненты тензора деформаций выражаются через компоненты вектора перемещений по соотношениям Коши

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\qquad \varepsilon_{12}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1},\qquad \varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}.\tag{2}$$

В случае плоского напряженного состояния соотношения закона Гука для ортотропного материала записываются в виде

$$\begin{gathered}\sigma_{11}(x_1,x_2)-\alpha_1(\varepsilon_{11}+\gamma_2\varepsilon_{22})=0,\qquad \sigma_{22}(x_1,x_2)-\alpha_2(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{11})=0,\\ \sigma_{12}(x_1,x_2)-g_{12}\varepsilon_{12}=0,\end{gathered}\tag{3}$$

где

$$\alpha_1=\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\quad \alpha_2=\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\quad \gamma_1=\nu_{12},\quad \gamma_2=\nu_{21}.$$

В соотношения (3) входят следующие независимые постоянные материала: $E_1$ — модуль упругости в направлении 1, $E_2$ — модуль упругости в направлении 2, $\nu_{12}$ — коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие при растяжении в направлении 1.

Решение задачи будем искать в прямоугольной области (слое) $\Omega$: $[0\leqslant x_1\leqslant l,\ -h\leqslant x_2\leqslant +h]$.

На границе области ставятся следующие краевые условия:

— на боковых поверхностях слоя

$$a_1u_1(0,x_2)+b_1\sigma_{11}(0,x_2)=\varphi_0(x_2),\qquad a_2u_2(l,x_2)+b_2\sigma_{21}(l,x_2)=\varphi_l(x_2);\tag{4}$$

— на лицевых поверхностях слоя

$$c_1u_1(x_1,\pm h)+d_1\sigma_{12}(x_1,\pm h)=\varphi_{\pm h}(x_1),\qquad c_2u_2(x_1,\pm h)+d_2\sigma_{22}(x_1,\pm h)=\varphi_{\pm h}(x_1).\tag{5}$$

Таким образом, ставится следующая задача: найти функции $\sigma_{11}$, $\sigma_{12}$, $\sigma_{22}$, $\varepsilon_{11}$, $\varepsilon_{12}$, $\varepsilon_{22}$, $u_1$, $u_2$, удовлетворяющие в области $\Omega$ уравнениям (1)–(3) и краевым условиям (4), (5).

Введем следующие безразмерные величины:

$$\xi=\frac{x_1}{l},\quad \zeta=\frac{x_2}{h},\quad \hat\sigma_{ij}=\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0},$$

$$\hat u_1=\frac{u_1}{h},\quad \hat u_2=\frac{u_2}{h},\quad \hat f_1=\frac{f_1h}{\sigma_0},\quad \hat f_2=\frac{f_2h}{\sigma_0},\quad \eta=\frac{h}{l}$$

($\sigma_0$ — характерное напряжение).

Запишем уравнения задачи в безразмерных переменных (далее знак "ˆ" опущен):

$$\eta \frac{\partial \sigma_{11}(\xi,\zeta)}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}(\xi,\zeta)}{\partial \zeta} + f_1(\xi,\zeta) = 0,$$
$$\eta \frac{\partial \sigma_{21}(\xi,\zeta)}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}(\xi,\zeta)}{\partial \zeta} + f_2(\xi,\zeta) = 0 \text{ —} \tag{6}$$

уравнения равновесия в безразмерных переменных,

$$\sigma_{11}(\xi,\zeta) - \alpha_1 \Big[\eta \frac{\partial u_1(\xi,\zeta)}{\partial \xi} + \gamma_2 \frac{\partial u_2(\xi,\zeta)}{\partial \zeta}\Big] = 0,$$
$$\sigma_{22}(\xi,\zeta) - \alpha_2 \Big[\frac{\partial u_2(\xi,\zeta)}{\partial \zeta} + \gamma_1 \eta \frac{\partial u_1(\xi,\zeta)}{\partial \xi}\Big] = 0; \tag{7}$$

$$\sigma_{12}(\xi,\zeta) - g_{12} \Big[\frac{\partial u_1(\xi,\zeta)}{\partial \zeta} + \eta \frac{\partial u_2(\xi,\zeta)}{\partial \xi}\Big] = 0,$$
$$\sigma_{21}(\xi,\zeta) - g_{12} \Big[\frac{\partial u_1(\xi,\zeta)}{\partial \zeta} + \eta \frac{\partial u_2(\xi,\zeta)}{\partial \xi}\Big] = 0 \text{ —} \tag{8}$$

соотношения закона Гука в безразмерных переменных,

$$\varepsilon_{11} = \eta \frac{\partial u_1}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} + \eta \frac{\partial u_2}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial \zeta} \text{ —} \tag{9}$$

соотношения Коши.

В силу симметричности тензора напряжений соотношения (8) представляют собой одно и то же соотношение.

**2. Аппроксимация напряжений и смещений отрезками полиномов Лежандра.** При построении уравнений плоского слоя уравнения равновесия (6) элемента, бесконечно малого в направлениях $x_1$, $x_2$ и имеющего единичную ширину в направлении $x_3$, заменим уравнениями равновесия элемента, бесконечно малого в направлении $x_1$ и имеющего конечную ширину $2h$ в направлении $x_2$ и единичную ширину в направлении $x_3$:

$$\int_{-1}^{1} \Big(\eta \frac{\partial \sigma_{11}(\xi,\zeta)}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}(\xi,\zeta)}{\partial \zeta} + f_1(\xi,\zeta)\Big)\, d\zeta = 0,$$
$$\int_{-1}^{1} \Big(\eta \frac{\partial \sigma_{11}(\xi,\zeta)}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}(\xi,\zeta)}{\partial \zeta} + f_1(\xi,\zeta)\Big)\zeta\, d\zeta = 0, \tag{10}$$
$$\int_{-1}^{1} \Big(\eta \frac{\partial \sigma_{21}(\xi,\zeta)}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}(\xi,\zeta)}{\partial \zeta} + f_2(\xi,\zeta)\Big)\, d\zeta = 0.$$

Напряжения и смещения будем аппроксимировать отрезками полиномов Лежандра. В соответствии с уравнениями (10) напряжения и массовые силы аппроксимируются следующими отрезками полиномов Лежандра:

$$\sigma_{11}(\xi,\zeta) = t_1(\xi) + m_1(\xi)P_1(\zeta), \qquad \sigma_{22}(\xi,\zeta) = t_2(\xi) + m_2(\xi)P_1(\zeta),$$
$$\sigma_{12}(\xi,\zeta) = t_{12}(\xi) + m_{12}(\xi)P_1(\zeta) + r_{12}(\xi)P_2(\zeta),$$
$$\sigma_{21}(\xi,\zeta) = t_{12}(\xi), \qquad f_1(\xi,\zeta) = q_{10}(\xi) + q_{11}(\xi)P_1, \qquad f_2(\xi,\zeta) = q_{20}(\xi).$$

Здесь $P_1(\zeta)$, $P_2(\zeta)$ — полиномы Лежандра.

Напряжения $\sigma_{12}$ и $\sigma_{21}$ аппроксимируются различными отрезками полиномов, так как в уравнения равновесия входят производные от этих функций по координатам $\xi$, $\zeta$ различного порядка.

Аппроксимации для смещений выбираются таким образом, чтобы выражения в квадратных скобках в соотношениях (7), (8) имели тот же порядок аппроксимации по $\zeta$, что и напряжения. Поэтому аппроксимируем соотношения (9) следующим образом:

$$\varepsilon_{11} = \eta\,\frac{\partial u_1'(\xi,\zeta)}{\partial \xi}, \quad 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1''(\xi,\zeta)}{\partial \zeta} + \eta\,\frac{\partial u_2'(\xi,\zeta)}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2''(\xi,\zeta)}{\partial \zeta}. \tag{11}$$

Здесь

$$\begin{gathered} u_1'(\xi,\zeta) = u_1^0(\xi) + u_1^1(\xi)P_1(\zeta), \\ u_1''(\xi,\zeta) = u_1^0(\xi) + u_1^1(\xi)P_1(\zeta) + u_1^2(\xi)P_2(\zeta) + u_1^3(\xi)P_3(\zeta), \\ u_2'(\xi,\zeta) = u_2^0(\xi), \qquad u_2''(\xi,\zeta) = u_2^0(\xi) + u_2^1(\xi)P_1(\zeta) + u_2^2(\xi)P_2(\zeta). \end{gathered} \tag{12}$$

Для смещений $u_1$, $u_2$ используется по две аппроксимации. Это обусловлено тем, что в соотношения Коши входят производные от этих функций по координатам $\xi$, $\zeta$ различного порядка.

С учетом введенных аппроксимаций для напряжений и смещений соотношения (7), (8) заменяются следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}
\int\limits_{-1}^{1} \Big(\sigma_{11}(\xi,\zeta) - \alpha_1 \Big(\eta\,\frac{\partial u_1(\xi,\zeta)}{\partial \xi} + \gamma_2\,\frac{\partial u_2(\xi,\zeta)}{\partial \zeta}\Big)\Big) P_0(\zeta)\,d\zeta = 0, \\
\int\limits_{-1}^{1} \Big(\sigma_{11}(\xi,\zeta) - \alpha_1 \Big(\eta\,\frac{\partial u_1(\xi,\zeta)}{\partial \xi} + \gamma_2\,\frac{\partial u_2(\xi,\zeta)}{\partial \zeta}\Big)\Big) P_1(\zeta)\,d\zeta = 0, \\
\int\limits_{-1}^{1} \Big(\sigma_{22}(\xi,\zeta) - \alpha_2 \Big(\frac{\partial u_2(\xi,\zeta)}{\partial \zeta} + \gamma_1\eta\,\frac{\partial u_1(\xi,\zeta)}{\partial \xi}\Big)\Big) P_0(\zeta)\,d\zeta = 0, \\
\int\limits_{-1}^{1} \Big(\sigma_{22}(\xi,\zeta) - \alpha_2 \Big(\frac{\partial u_2(\xi,\zeta)}{\partial \zeta} + \gamma_1\eta\,\frac{\partial u_1(\xi,\zeta)}{\partial \xi}\Big)\Big) P_1(\zeta)\,d\zeta = 0, \\
\int\limits_{-1}^{1} \Big(\sigma_{12}(\xi,\zeta) - g_{12} \Big(\frac{\partial u_1(\xi,\zeta)}{\partial \zeta} + \eta\,\frac{\partial u_2(\xi,\zeta)}{\partial \xi}\Big)\Big) P_0(\zeta)\,d\zeta = 0, \\
\int\limits_{-1}^{1} \Big(\sigma_{12}(\xi,\zeta) - g_{12} \Big(\frac{\partial u_1(\xi,\zeta)}{\partial \zeta} + \eta\,\frac{\partial u_2(\xi,\zeta)}{\partial \xi}\Big)\Big) P_1(\zeta)\,d\zeta = 0, \\
\int\limits_{-1}^{1} \Big(\sigma_{21}(\xi,\zeta) - g_{12} \Big(\frac{\partial u_1(\xi,\zeta)}{\partial \zeta} + \eta\,\frac{\partial u_2(\xi,\zeta)}{\partial \xi}\Big)\Big) P_2(\zeta)\,d\zeta = 0.
\end{gathered} \tag{13}$$

Краевые условия на лицевых поверхностях (5) для коэффициентов отрезков полиномов Лежандра принимают вид

$$\begin{gathered} c_1(u_1^0(\xi) \pm u_1^1(\xi) + u_1^2(\xi) \pm u_1^3(\xi)) + d_1(t_{12}(\xi) \pm m_{12}(\xi) + r_{12}(\xi)) = \varphi_{\pm h}(\xi), \\ c_2(u_2^0(\xi) \pm u_2^1(\xi) + u_2^2(\xi)) + d_2(t_2(\xi) \pm m_2(\xi)) = \varphi_{\pm h}(\xi). \end{gathered} \tag{14}$$

**3. Система дифференциальных уравнений и краевые условия для коэффициентов отрезков полиномов Лежандра.** Уравнения (10), (13), (14) представляют собой систему дифференциальных и конечных уравнений относительно коэффициентов отрезков полиномов Лежандра для напряжений и смещений:

$$\begin{gathered} \eta t_1' + m_{12} + q_{10} = 0, \quad \eta m_1' + 3r_{12} + q_{11} = 0, \quad \eta t_{12}' + m_2 + q_{20} = 0, \\ \alpha_1(\gamma_2 v_1 + \eta u_0') - t_1 = 0, \quad \alpha_1(3\gamma_2 v_2 + \eta u_1') - m_1 = 0, \\ \alpha_2(v_1 + \gamma_1 \eta u_0') - t_2 = 0, \quad \alpha_2(3v_2 + \gamma_1 \eta u_1') - m_2 = 0, \\ g_{12}(u_1 + u_3 + \eta v_0') - t_{12} = 0, \quad m_{12} - 3g_{12}u_2 = 0, \quad r_{12} - 5g_{12}u_3 = 0; \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \sigma_{22}^{\pm} = t_2 \pm m_2, \qquad u_2^{\pm} = u_2^0 \pm u_2^1 + u_2^2, \\ \sigma_{12}^{\pm} = t_{12} \pm m_{12} + r_{12}, \qquad u_1^{\pm} = u_1^0 \pm u_1^1 + u_1^2 \pm u_1^3 \end{gathered} \tag{16}$$

($\sigma_{22}^{\pm}$, $u_2^{\pm}$, $\sigma_{12}^{\pm}$, $u_1^{\pm}$ — заданные функции).

Уравнения (15), (16) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $u_0(\xi)$, $u_1(\xi)$, $v_0(\xi)$, $t_{11}(\xi)$, $m_{11}(\xi)$, $t_{12}(\xi)$.

Если ввести вектор

$$\boldsymbol{Z} = [u_0, u_1, v_0, t_{11}, m_{11}, t_{12}]^{\text{т}},$$

то систему дифференциальных уравнений ортотропного слоя можно записать в виде

$$\boldsymbol{Z}' = H\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{F}, \tag{17}$$

где $H$ — квадратная матрица $6 \times 6$; $\boldsymbol{F}$ — вектор с шестью компонентами.

Из краевых условий на торцах слоя (5) следуют краевые условия при $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_1$ для системы (17), которые можно записать в виде

$$A\boldsymbol{X} + B\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C},$$

где

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ v_0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} t_{11} \\ m_{11} \\ t_{12} \end{pmatrix},$$

$A$, $B$ — заданные матрицы порядка $3 \times 3$; $\boldsymbol{C}$ — заданный вектор с тремя компонентами.

Матрица $H$ и вектор $\boldsymbol{F}$ зависят от вида краевых условий на лицевых поверхностях слоя.

Компоненты вектора $\boldsymbol{Z}$ имеют следующий физический смысл: $u_0$ — осредненное по толщине слоя продольное перемещение, $u_1$ — поворот поперечного сечения, $v_0$ — осредненное по толщине слоя поперечное перемещение, $t_1$ — продольная сила, $t_{12}$ — перерезывающая сила, $m_1$ — изгибающий момент.

**4. Система дифференциальных уравнений и ее решение в случае напряжений, заданных на лицевых поверхностях слоя.** Если на верхней и нижней лицевых поверхностях слоя заданы нормальные и касательные напряжения, то матрица $H$ и вектор $\boldsymbol{F}$ имеют вид

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/(\alpha_1\eta(\gamma_1\gamma_2)-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/(\alpha_1\eta(\gamma_1\gamma_2-1)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6/(5g_{12}\eta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/\eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \gamma_3(\sigma_{22}^+(\xi)+\sigma_{22}^-(\xi))/(2\alpha_3\eta(\gamma_1\gamma_2-1)) \\ \gamma_3(\sigma_{22}^+(\xi)-\sigma_{22}^-(\xi))/(2\alpha_3\eta(\gamma_1\gamma_2-1)) \\ -(\sigma_{12}^+(\xi)+\sigma_{12}^-(\xi))/(10g_{12}\eta) \\ (\sigma_{12}^-(\xi)-\sigma_{12}^+(\xi)-2q_{10}(\xi))/(2\eta) \\ -(3(\sigma_{12}^-(\xi)+\sigma_{12}^+(\xi))+2q_{11}(\xi))/(2\eta) \\ (3(\sigma_{22}^-(\xi)-\sigma_{22}^+(\xi))-2q_{20}(\xi))/(2\eta) \end{pmatrix},$$

где $\sigma_{22}^{\pm}(\xi)$, $\sigma_{12}^{\pm}(\xi)$ — заданные на верхней и нижней лицевых поверхностях слоя нормальные и касательные напряжения. В этом случае нетрудно получить аналитическое решение системы уравнений.

Приведем выражения для компонент вектора $\boldsymbol{Z}$ в задаче об изгибе пластины равномерной нагрузкой $P$ ($\sigma_{22}^+(\xi) = -p$, $\sigma_{22}^- = \sigma_{12}^{\pm}(\xi) = 0$). В этой задаче выражения для компонент вектора $\boldsymbol{Z}$ имеют вид

$$m_1(\xi) = \frac{3p}{4\eta^2}\,\xi + \frac{3C_2}{\eta} + C_1, \qquad t_{12} = \frac{p}{2\eta}\,\xi + C_2,$$

$$u_1(\xi) = \frac{p\alpha_2\xi^3 + 6C_2\alpha_2\eta\xi^2 + (2p\alpha_1\gamma_2\eta^2 + 4C_1\alpha_2\eta^2)\xi}{4\alpha_1\alpha_2\eta^3(1-\gamma_1\gamma_2)} + C_3,$$

$$v_0(\xi) = -\frac{p}{16\alpha_1(1-\gamma_1\gamma_2)\eta^4}\,\xi^4 - \frac{c_2}{2\alpha_1(1-\gamma_1\gamma_2)\eta^3}\,\xi^3 + \tag{18}$$

$$+\frac{6p\alpha_1\alpha_2(1-\gamma_1\gamma_2) - 5g_{12}p\alpha_1\alpha_2 - 10C_1g_{12}\alpha_2}{20g_{12}\alpha_1\alpha_2\eta^2(1-\gamma_1\gamma_2)}\,\xi^2 + \frac{6C_2 - 5C_3g_{12}}{5g_{12}\eta}\,\xi,$$

$$t_1(\xi) = C_5, \qquad u_0(\xi) = \frac{p\alpha_1\gamma_2 + 2C_5\alpha_2}{2\alpha_1\alpha_2\eta(1-\gamma_1\gamma_2)}\,\xi + c_6.$$

Используя (18) последовательно в формулах (12), (11), (3), можно вычислить напряжения и деформации в области $\Omega$.

**Заключение.** С использованием аппроксимаций решений уравнений плоской задачи теории упругости отрезками полиномов Лежандра построены дифференциальные уравнения изгиба ортотропных пластин, порядок которых не зависит от условий, заданных на лицевых поверхностях пластины (напряжения, смещения или смешанные условия). Получены матрицы и правые части соответствующих дифференциальных уравнений. Приведено аналитическое решение системы уравнений в случае, когда на верхней и нижней лицевых поверхностях заданы нормальные и касательные напряжения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Тимошенко С. П.** Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. М.: Наука, 1966.
2. **Солер А.** Теории высшего порядка анализа конструкций, основанные на разложениях по полиномам Лежандра // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Сер. E. Прикл. механика. 1969. Т. 36, № 4. С. 107–112.
3. **Иванов Г. В.** Решение плоской смешанной задачи теории упругости в виде рядов по полиномам Лежандра // ПМТФ. 1976. № 6. С. 126–137.
4. **Волчков Ю. М., Важева Д. В.** Решение контактных задач на основе уточненной теории пластин и оболочек // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 5. С. 169–176.
5. **Волчков Ю. М., Дергилева Л. А., Иванов Г. В.** Численное моделирование напряженных состояний в плоских задачах упругости методом слоев // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 129–135.

*Поступила в редакцию 24/VI 2013 г.*