

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБА ДВУХСЛОЙНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ НАНОПЛАСТИН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ТЕОРИИ РЕЛАКСАЦИИ

Ш. Я. Ван, Ю. Фан, Я. Я. Ван, Ю. Ц. Чзан

Колледж гражданского строительства и архитектуры Чжэцзянского университета,
310058 Ханчжоу, Китай

E-mails: zsywang@zju.edu.cn, 11412071@zju.edu.cn, 846225854@qq.com, cyqzhang@zju.edu.cn

С использованием модифицированной моментной теории упругости и теории релаксации получено уравнение движения системы двухслойных вязкоупругих нанопластин. Методом Навье найдено аналитическое решение задачи о поперечном изгибе двухслойной нанопластины. Исследовано влияние геометрических и физических параметров задачи на поперечный прогиб пластины. Установлено, что поперечный прогиб нанопластины зависит от времени релаксации, отношения длительного модуля ползучести к мгновенному модулю упругости и параметров демпфирования наполнителя.

Ключевые слова: вязкоупругая нанопластина, модифицированная моментная теория упругости, напряжения релаксации, вязкоупругое основание Пастернака.

DOI: 10.15372/PMTF20220419

Введение. Двухслойные нанопластины широко используются при производстве таких наноразмерных устройств, как датчики, транзисторы и т. п. [1], поэтому исследование их поведения при изгибе является актуальной задачей. Выполнено большое количество исследований поведения двухслойных нанопластин при изгибе. В частности, изучались нелинейные колебания таких пластин [2, 3], влияние на их прогиб материалов нанопластин и наполнителя [4–7] и типа граничных условий [8, 9], а также колебания нанопластин при температурном нагружении [10, 11]. В работах [12, 13] исследовался изгиб пластин, используемых в электростатических приводах. Установлено, что поведение двухслойных нанопластин существенно отличается от поведения однослойных.

Из результатов выполненных исследований следует, что при решении динамических задач об изгибе двухслойных пластин необходимо учитывать релаксацию напряжений [14, 15]. В частности, учет релаксации напряжений необходим при анализе напряженного состояния подшипников, находящихся под действием постоянных нагрузок [16, 17]. В работе [18] с использованием линейной теории вязкоупругости исследовалось влияние релаксации напряжений на свободные колебания нанобалки из вязкоупругого материала. В [19] с помощью модифицированной моментной теории упругости изучалось влияние релаксации напряжений на поведение вязкоупругих нанобалок при изгибе. С использованием понятия поверхностной энергии и модифицированной моментной теории упругости в работе [20] исследовано влияние релаксации напряжений на изгиб вязкоупругих нанопластин.

В [21] установлено, что релаксация напряжений в вязкоупругом материале существенно влияет на частоту, амплитуду колебаний и коэффициент демпфирования вязкоупругой нанопластины.

Насколько известно авторам данной работы, полное исследование поведения при изгибе двухслойных нанопластин из вязкоупругого материала с учетом релаксации напряжений в вязкоупругом наполнителе не проводилось. В настоящей работе с использованием модифицированной моментной теории упругости и теории релаксации проводится исследование изгиба нанопластины из вязкоупругого материала.

1. Описание модели. На рис. 1 показана прямоугольная двухслойная нанопластина из вязкоупругого материала (L_y , L_x — длина и ширина пластины, h — ее толщина). Между двумя прямоугольными нанопластинами находится наполнитель — вязкоупругая среда Пастернака. Материал каждой нанопластины с плотностью ρ является изотропным однородным вязкоупругим.

С использованием рядов Прони выражение для модуля релаксации $E(t)$ вязкоупругого материала можно представить в виде

$$E(t) = E_\infty + \sum_{\alpha=1}^N E_\alpha e^{-t/\zeta_\alpha}, \quad (1)$$

где ζ_α — коэффициент релаксации; t — время; E_∞ — длительный модуль ползучести; E_α — модуль ползучести элемента Прони α ; N — общее число членов ряда Прони для функции релаксации. Модуль упругости можно определить из уравнения (1) при $t = 0$, модули ползучести определяются при $t = \infty$.

1.1. Уравнение движения. Начало декартовой системы координат находится в одном из углов срединной плоскости прямоугольной нанопластины. Плоскость (x, y) совпадает со срединной плоскостью недеформированной пластины. В соответствии с теорией пластин

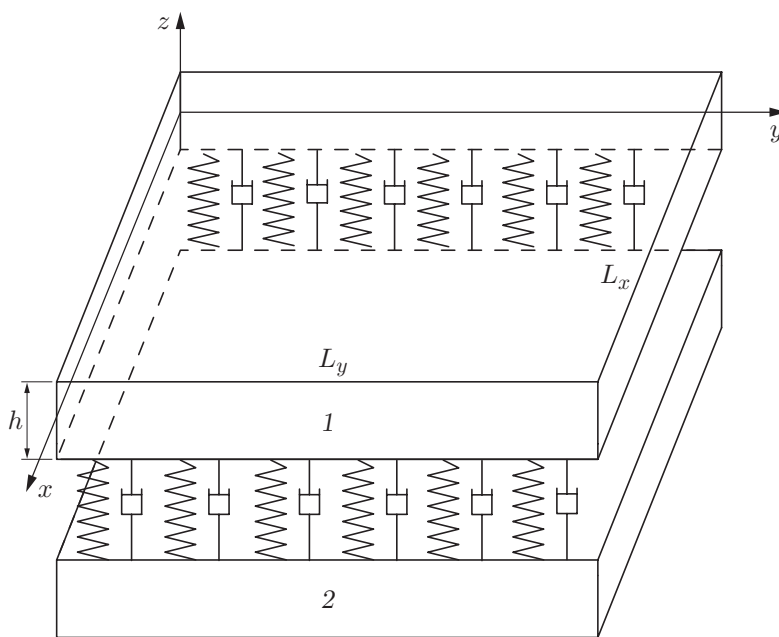


Рис. 1. Схема двухслойной вязкоупругой нанопластины:
1 — нанопластина 1, 2 — нанопластина 2

Кирхгоффа смещение произвольной точки пластины можно вычислить по формулам

$$u_x = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_y = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad u_z = w,$$

где u_x, u_y, u_z — компоненты вектора смещения; w — смещение точки на срединной плоскости пластины в поперечном направлении. При бесконечно малом смещении компоненты тензора деформации ε_{ij} и тензора кривизн срединной поверхности χ_{ij} вычисляются по формулам [20]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}), \quad \theta_i = \frac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j} \quad (i, j, k = x, y, z),$$

где θ_i — компоненты вектора поворота; e_{ijk} — перестановочный тензор.

В соответствии с модифицированной моментной теорией упругости определяющие соотношения записываются в виде [22]

$$\sigma_{ij}^e = 2\mu_0 \varepsilon_{ij} + \lambda_0 \delta_{ij} \varepsilon_{kk}, \quad m_{ij}^e = 2\mu_0 l^2 \chi_{ij}, \quad (2)$$

где σ_{ij}^e, m_{ij}^e — компоненты тензора упругих напряжений и тензора моментных упругих напряжений в момент времени t ; δ_{ij} — символ Кронекера; l — характерный линейный размер, определяющий свойства моментной среды [23]; μ_0, λ_0 — значения параметров Ламе

$$\lambda(t) = \frac{\nu E(t)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu(t) = \frac{E(t)}{2(1+\nu)} \quad (3)$$

в момент времени $t = 0$. Предполагается, что в (3) коэффициент Пуассона ν не зависит от времени.

В теории пластин Кирхгоффа компонента тензора напряжения σ_{zz}^e полагается равной нулю. Таким образом, с учетом соотношений (2) имеем

$$\sigma_{zz}^e = 2\mu_0 \varepsilon_{zz} + \lambda_0 (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = 0.$$

Следовательно,

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda_0}{2\mu_0 + \lambda_0} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}).$$

Подставляя это равенство в соотношения (2), получаем

$$\sigma_{xx}^e = \frac{2\mu_0}{2\mu_0 + \lambda_0} (2(\mu_0 + \lambda_0)\varepsilon_{xx} + \lambda_0 \varepsilon_{yy}), \quad \sigma_{yy}^e = \frac{2\mu_0}{2\mu_0 + \lambda_0} (2(\mu_0 + \lambda_0)\varepsilon_{yy} + \lambda_0 \varepsilon_{xx}). \quad (4)$$

В теории изгиба тонких пластин Кирхгоффа компоненты тензора деформаций и тензора кривизн срединной поверхности вычисляются по формулам [20]

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Из соотношений (2)–(5) получаем

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^e \\ \sigma_{yy}^e \\ \sigma_{xy}^e \end{bmatrix} = \frac{-z E_0}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} m_{xx}^e \\ m_{yy}^e \\ m_{xy}^e \end{bmatrix} = 2\mu_0 l^2 \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где E_0 — значение модуля $E(t)$ при $t = 0$. В соответствии с модифицированной моментной теорией упругости компоненты тензора напряжений для вязкого материала вычисляются по формулам [24]

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^\nu \\ \sigma_{yy}^\nu \\ \sigma_{xy}^\nu \end{bmatrix} = \frac{z}{1-\nu^2} \int_0^t \frac{dE(t-\xi)}{d\xi} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} d\xi, \quad \xi < t; \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} m_{xx}^\nu \\ m_{yy}^\nu \\ m_{xy}^\nu \end{bmatrix} = -2l^2 \int_0^t \frac{d\mu(t-\xi)}{d\xi} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{bmatrix} d\xi, \quad \xi < t \quad (8)$$

(верхний индекс ν означает, что напряжения определяются для пластины из вязкоупругого материала).

С использованием модели Кельвина, соотношений (6)–(8) и с учетом демпфирующего элемента напряжения моменты в вязкоупругой нанопластине вычисляются по формулам

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^e + \sigma_{xx}^\nu \\ \sigma_{yy}^e + \sigma_{yy}^\nu \\ \sigma_{xy}^e + \sigma_{xy}^\nu \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} m_{xx}^e + m_{xx}^\nu \\ m_{yy}^e + m_{yy}^\nu \\ m_{xy}^e + m_{xy}^\nu \end{bmatrix},$$

где τ_d — коэффициент демпфирующего элемента.

Обобщенные усилия и моменты определяются по формулам

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz, \quad \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz,$$

$$\begin{bmatrix} Y_{xx} \\ Y_{yy} \\ Y_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{bmatrix} dz.$$

1.2. *Вариационная формулировка задачи.* Уравнение движения вязкоупругой нанопластины получено с использованием принципа Д'Аламбера [5]

$$\int_{t_0}^{t_f} (\delta W^E + \delta W^\nu - \delta U^e) dt = 0, \quad (9)$$

где δW^E , δW^ν , δU^e — виртуальная работа внешних сил, вязких диссипативных сил и энергии деформации соответственно; t_0 , t_f — произвольные моменты времени.

Виртуальная работа внешних сил вычисляется по формуле

$$\delta W^E = \int_A q \delta w(t) dA \quad (10)$$

(q — распределенная поперечная нагрузка; A — площадь срединной плоскости нанопластины постоянной толщины), виртуальная работа вязких диссипативных сил — по формуле

$$\delta W^\nu = - \int_A \left((M_{xx}^\nu + Y_{xy}^\nu) \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2M_{xy}^\nu + Y_{yy}^\nu - Y_{xx}^\nu) \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + (M_{yy}^\nu - Y_{xy}^\nu) \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dA, \quad (11)$$

виртуальная энергия деформации нанопластины — по формуле

$$\delta U^e = - \int_A \left((M_{xx}^e + Y_{xy}^e) \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2M_{xy}^e + Y_{yy}^e - Y_{xx}^e) \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + (M_{yy}^e - Y_{xy}^e) \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dA. \quad (12)$$

Подставляя соотношения (10)–(12) в выражение (9) и выполняя интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} \int_A \left[\frac{\partial^2 \bar{M}_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{M}_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{M}_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + q \right] \delta w dA dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_f} \oint_{\Gamma} \left\{ \left[\left(\frac{\partial \bar{M}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial y} + N_x \right) n_x + \left(\frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{yy}}{\partial y} + N_y \right) n_y \right] \delta w - \right. \\ & \left. - (\bar{M}_{xx} n_x + \bar{M}_{xy} n_y) \delta \frac{\partial w}{\partial x} - (\bar{M}_{xy} n_x + \bar{M}_{yy} n_y) \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right\} dA dt = 0, \end{aligned}$$

где n_x, n_y — компоненты вектора единичной нормали; величины $\bar{M}_{ij}$ ($i, j = x, y$) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{xx} &= M_{xx}^e + M_{xx}^\nu + Y_{xy}^e + Y_{xy}^\nu, & \bar{M}_{yy} &= M_{yy}^e + M_{yy}^\nu - Y_{xy}^e - Y_{xy}^\nu, \\ \bar{M}_{xy} &= M_{xy}^e + M_{xy}^\nu + (Y_{yy}^e - Y_{xx}^e)/2 + (Y_{yy}^\nu - Y_{xx}^\nu)/2. \end{aligned}$$

Поскольку вариация смещения δw в моменты времени t_0 и t_f равна нулю, уравнение равновесия вязкоупругой нанопластины записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \bar{M}_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{M}_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{M}_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + q = 0. \quad (13)$$

Предполагается, что на одну из двух нанопластин действует зависящая от времени поперечная нагрузка $q_t = Q(x, y)L(t)$. Представим функцию $Q(x, y)$ в виде ряда [20]

$$Q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right),$$

где m, n — волновые числа. Если распределенная нагрузка является постоянной ($Q(x, y) = q_0$), то

$$q_{mn} = \frac{4q_0}{mn\pi^2} [\cos(m\pi) - 1][\cos(n\pi) - 1].$$

Без потери общности полагаем, что нагрузка q_t действует на нанопластину 1. Таким образом, полная поперечная нагрузка q , действующая на нанопластину 1, есть сумма распределенной нагрузки q_1 , действующей со стороны вязкоупругой среды Пастернака, заключенной между двумя нанопластинами, и зависящей от времени нагрузки q_t . Для нанопластины 2 распределенная поперечная нагрузка q равна нагрузке q_2 , действующей со стороны вязкоупругой среды Пастернака. Нагрузки q_1 и q_2 вычисляются по формулам

$$q_i = (-1)^i \left[k_w(w_1 - w_2) - k_s \nabla^2(w_1 - w_2) + C_d \frac{\partial(w_1 - w_2)}{\partial t} \right], \quad i = 1, 2,$$

где k_w , k_s — модуль жесткости основания Винклера и модуль сдвига вязкоупругой среды Пастернака соответственно; C_d — коэффициент демпфирования среды; w_1 , w_2 — поперечные смещения точек срединных плоскостей нанопластин 1 и 2 соответственно.

Из (13) следует, что уравнения движения нанопластин 1 и 2 можно записать соответственно в виде

$$\left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(D_0 \nabla^4 w_1 - \int_0^t \frac{dD(t-\xi)}{d\xi} \nabla^4 w_1 d\xi \right) + \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + q_1 + q_t = 0; \quad (14)$$

$$\left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(D_0 \nabla^4 w_2 - \int_0^t \frac{dD(t-\xi)}{d\xi} \nabla^4 w_2 d\xi \right) + \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + q_2 = 0, \quad (15)$$

где

$$D(t) = \left[1 + 6(1 - \nu) \left(\frac{l}{h} \right)^2 \right] \frac{h^3 E(t)}{12(1 - \nu^2)}, \quad D_0 = \left[1 + 6(1 - \nu) \left(\frac{l}{h} \right)^2 \right] \frac{h^3 E_0}{12(1 - \nu^2)}.$$

Из уравнений (14), (15) следует

$$\left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(D_0 \nabla^4 (\Delta w) - \int_0^t \frac{dD(t-\xi)}{d\xi} \nabla^4 (\Delta w) d\xi \right) + q' = 0, \quad (16)$$

где $\Delta w = w_1 - w_2$; $q' = -2(k_w(\Delta w) - k_s \nabla^2(\Delta w) + C_d \partial \Delta w / \partial t) + q_t$. Следует отметить, что из уравнения (16) можно получить уравнение, приведенное в работе [20], если положить $\tau_d = k_s = k_d = C_d = 0$.

2. Аналитическое решение квазистатической задачи об изгибе двухслойной пластины. Предполагается, что все края обеих прямоугольных нанопластин свободно оперты. Относительное смещение двух нанопластин $\Delta w \neq 0$. Используя метод Навье, выражение для относительного смещения Δw для свободно опертых пластин представим в виде [25]

$$\Delta w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(t) T_{mn}(x, y), \quad T_{mn}(x, y) = \sin \left(\frac{m\pi}{L_x} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{L_y} y \right), \quad (17)$$

где $W_{mn}(t)$, $T_{mn}(x, y)$ — амплитуды и функции формы соответственно.

Для упрощения вычислений при описании вязкоупругого поведения нанопластин используется один член ряда Прони (см. (1)). При $N = \alpha = 1$ уравнение (16) записывается в виде

$$\left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(D_0 \nabla^4 (\Delta w_{mn}) - \frac{D_1}{\zeta_1} \int_0^t e^{-(t-\xi)/\zeta_1} \nabla^4 [\Delta w_{mn}(\xi)] d\xi \right) + q' = 0, \quad (18)$$

где ζ_1 — время релаксации при $\alpha = 1$,

$$D_1 = \left[1 + 6(1 - \nu) \left(\frac{l}{h} \right)^2 \right] \frac{h^3 E_1}{12(1 - \nu^2)}.$$

Подставляя выражение для относительного смещения в (18), получаем уравнение для определения неизвестных функций $W_{mn}(t)$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(C_{mn}^2 D_0 \nabla^4 W_{mn}(t) - \frac{C_{mn}^2 D_1}{\zeta_1} \int_0^t e^{-(t-\xi)/\zeta_1} \nabla^4 W_{mn}(\xi) d\xi \right) - \right. \\ \left. - 2 \left(k_w W_{mn}(t) + C_{mn} k_s \nabla^2 W_{mn}(t) + C_d \frac{\partial W_{mn}(t)}{\partial t} \right) + q_{mn} L(t) \right] \times \\ \times \sin \left(\frac{n\pi x}{L_x} \right) \sin \left(\frac{m\pi y}{L_y} \right) = 0. \quad (19) \end{aligned}$$

Здесь $C_{mn} = (m\pi/L_x)^2 + (n\pi/L_y)^2$.

После упрощения уравнения (19) для неизвестной функции $W_{mn}(t)$ имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} P W_{mn}(t) + R \frac{dW_{mn}(t)}{dt} - G \int_0^t W_{mn}(\xi) e^{-(t-\xi)/\zeta_1} d\xi - \\ - \tau_d G \frac{d}{dt} \int_0^t W_{mn}(\xi) e^{-(t-\xi)/\zeta_1} d\xi - q_{mn} L(t) = 0, \quad (20) \end{aligned}$$

где $P = C_{mn}^2 D_0 + 2k_w + 2C_{mn} k_s$; $R = \tau_0 C_{mn}^2 D_0 + 2C_d$; $G = C_{mn}^2 D_1 / \zeta_1$. Дифференцируя уравнение (20) по времени, находим

$$\begin{aligned} \frac{dW_{mn}(t)}{dt} + \frac{R}{P} \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} - \frac{\tau_d G}{P} \frac{d}{dt} \int_0^t W_{mn}(\xi) e^{-(t-\xi)/\zeta_1} d\xi + \\ + \frac{\tau_d^2 G}{P} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t W_{mn}(\xi) e^{-(t-\xi)/\zeta_1} d\xi = q_{mn} \frac{dL(t)}{dt}. \quad (21) \end{aligned}$$

Выполняя в (21) интегрирование по частям, получаем дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$A' \frac{\partial^2 W_{mn}(t)}{\partial t^2} + B' \frac{\partial W_{mn}(t)}{\partial t} + C' W_{mn}(t) = D' \frac{dL(t)}{dt} + E' L(t), \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} A' &= \frac{\zeta_1(\zeta_1 - \tau_d)R}{P(\zeta_1 + \tau_d)}, & B' &= \frac{\zeta_1(P + \tau_d G)(\zeta_1 - \tau_d) + R(\zeta_1 + \tau_d)}{P(\zeta_1 + \tau_d)}, \\ C' &= 1 - \frac{G\zeta_1}{P}, & D' &= -\frac{\zeta_1(\zeta_1 - \tau_d)}{\zeta_1 + \tau_d} \frac{q_{mn}}{P}, & E' &= \frac{q_{mn}}{P}, \end{aligned}$$

относительное смещение $W_{mn}(t)$ зависит от функции $L(t) = H(t)$; $H(t)$ — функция Хевисайда.

Характеристическое уравнение дифференциального уравнения (22) имеет два корня:

$$r_{1,2} = \frac{-B' \pm \sqrt{B'^2 - 4A'C'}}{2A'}.$$

Для упрощения вычислений предположим, что $\zeta_1 < \tau_d$ и $r_1 < r_2$. Граничные условия задаются в виде

$$\begin{aligned} t = 0: \quad W_{mn}(0) &= \frac{q_{mn}}{C_{mn}^2 D_0 + 2k_w + 2C_{mn}k_s}, \\ t = \infty: \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} W_{mn}(t) &= \frac{q_{mn}}{C_{mn}^2 D_\infty + 2k_w + 2C_{mn}k_s}, \end{aligned}$$

где $D_\infty = D_0 - D_1$.

Из уравнения (22) с учетом граничных условий определяется функция $W_{mn}(t)$:

$$W_{mn}(t) = \frac{q_{mn}}{P(P - C_{mn}^2 D_1)} (P - C_{mn}^2 D_1 e^{r_1 t} H(t)). \quad (23)$$

Из уравнений (17), (23) следует

$$\Delta w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{P(P - C_{mn}^2 D_1)} (P - C_{mn}^2 D_1 e^{r_1 t} H(t)) \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right).$$

3. Результаты вычислений. Вычисления выполнены при следующих геометрических и физических параметрах [15]: $E_0 = 90$ ГПа, $E_\infty = \kappa E_0$, $E_1 = (1 - \kappa)E_0$, $m = 1$, $n = 1$, $h = 0,4$ нм, $\nu = 0,23$, $\rho = 3800$ кг/м³.

Ниже приведены результаты вычислений для следующих безразмерных величин:

$$\begin{aligned} \bar{k}_w &= \frac{k_w L_x^4}{D_0}, \quad \bar{k}_s = \frac{k_s L_x^2}{D_0}, \quad \bar{\tau}_d = \frac{\tau_d}{L_x^2} \sqrt{\frac{D_0}{m_0}}, \quad \bar{\zeta}_1 = \frac{\zeta_1}{L_x^2} \sqrt{\frac{D_0}{m_0}}, \\ \bar{C}_d &= \frac{C_d L_x^2}{D_0} \sqrt{D_0 m_0}, \quad \bar{D}_1 = \frac{D_1}{D_0}, \quad \bar{D}_\infty = \frac{D_\infty}{D_0}, \quad \beta = \frac{L_y}{L_x}, \quad \bar{W}_c = 100 \frac{E_0 h^3}{q_0 L_x^4} \Delta w\left(\frac{L_x}{2}, \frac{L_y}{2}, t\right). \end{aligned}$$

На рис. 2 представлена зависимость относительного прогиба $\bar{W}_c$ от времени. Установлено, что при уменьшении характерного параметра длины материала l и при увеличении отношения размеров сторон пластины β увеличивается относительный прогиб $\bar{W}_c$. С увеличением времени прогиб стремится к предельному значению.

На рис. 3 показана зависимость $\bar{W}_c$ от времени при различных значениях модуля сдвига вязкоупругой среды Пастернака $\bar{k}_s$, модуля жесткости основания Винклера $\bar{k}_w$ и коэффициента демпфирования $\bar{\tau}_d$.

На рис. 4 приведена зависимость $\bar{W}_c$ от времени при различных значениях коэффициента демпфирования $\bar{C}_d$.

Из приведенных на рис. 3, 4 зависимостей следует, что при увеличении коэффициента демпфирующего элемента $\bar{\tau}_d$, коэффициента демпфирования среды $\bar{C}_d$, модуля жесткости основания Винклера $\bar{k}_w$ и модуля сдвига $\bar{k}_s$ относительный прогиб уменьшается.

На рис. 5 представлена зависимость $\bar{W}_c$ от времени при различных значениях времени релаксации ζ_1 .

При увеличении времени релаксации увеличивается демпфирование двух нанопластин и уменьшается скорость ползучести. Иными словами, время, необходимое для перехода двух нанопластин в установившееся состояние, увеличивается с увеличением времени релаксации.

На рис. 6 показана зависимость $\bar{W}_c$ от времени при различных значениях отношения длительного модуля ползучести к мгновенному модулю упругости κ .

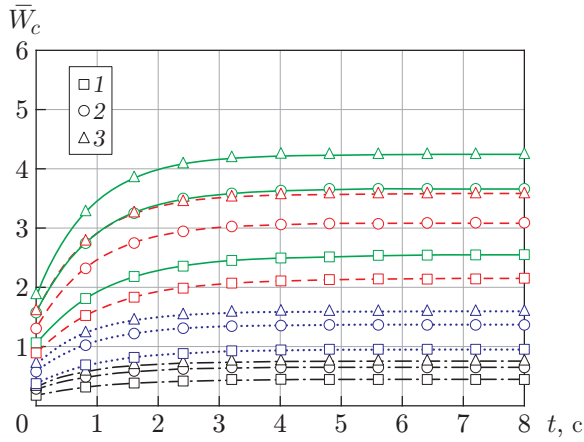


Рис. 2

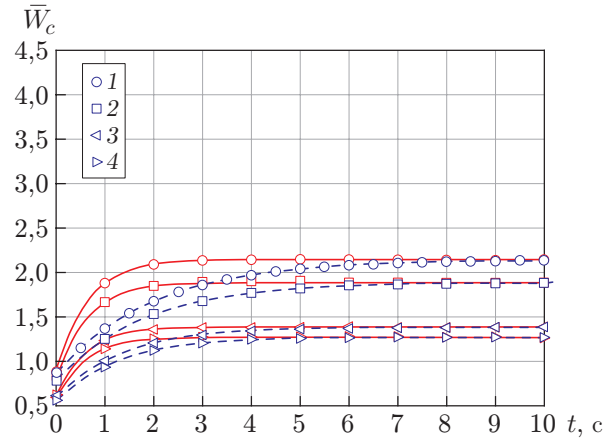


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость $\bar{W}_c$ от времени при $\bar{k}_s = 10, \bar{k}_w = 50, \bar{C}_d = 1, \bar{\tau}_d = 1, \bar{\zeta}_1 = 0,01, \varkappa = 0,6$ и различных значениях отношения размеров сторон пластины и характерного линейного размера материала l/h :

сплошные линии — $l/h = 0$, штриховые — $l/h = 0,2$, пунктирные — $l/h = 0,6$, штрихпунктирные — $l/h = 1,0$; 1 — $L_y = L_x$, 2 — $L_y = 1,5L_x$, 3 — $L_y = 2L_x$

Рис. 3. Зависимость $\bar{W}_c$ от времени при $\bar{C}_d = 1, \beta = 1, \bar{\zeta}_1 = 0,01, l/h = 0,2, \varkappa = 0,6$ и различных значениях модуля сдвига вязкоупругой среды Пастернака $\bar{k}_s$, модуля жесткости основания Винклера $\bar{k}_w$ и коэффициента демпфирования $\bar{\tau}_d$:
сплошные линии — $\bar{\tau}_d = 0$, штриховые — $\bar{\tau}_d = 0,1$; 1 — $\bar{k}_s = 10, \bar{k}_w = 50$, 2 — $\bar{k}_s = 10, \bar{k}_w = 100$, 3 — $\bar{k}_s = 20, \bar{k}_w = 50$, 4 — $\bar{k}_s = 20, \bar{k}_w = 100$

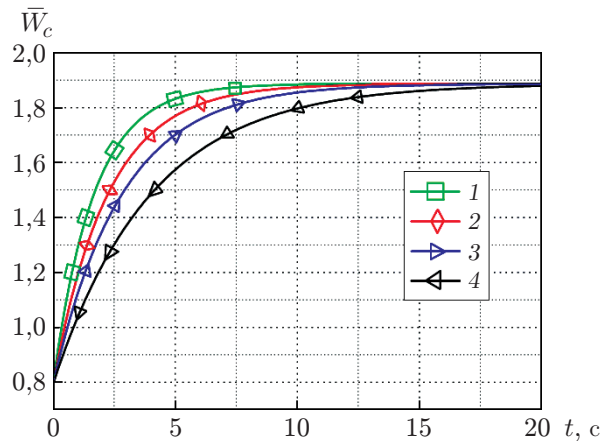


Рис. 4. Зависимость $\bar{W}_c$ от времени при $\bar{k}_s = 10, \bar{k}_w = 50, \bar{\tau}_d = 0,1, \beta = 1, \bar{\zeta}_1 = 0,01, l/h = 0,2, \varkappa = 0,6$ и различных значениях коэффициента демпфирования $\bar{C}_d$:

1 — $\bar{C}_d = 0$, 2 — $\bar{C}_d = 5$, 3 — $\bar{C}_d = 10$, 4 — $\bar{C}_d = 20$

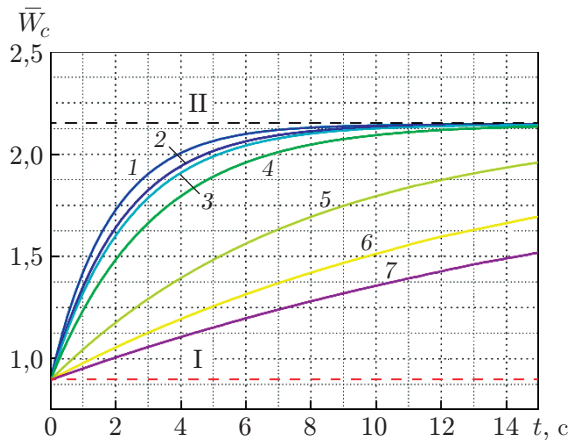


Рис. 5

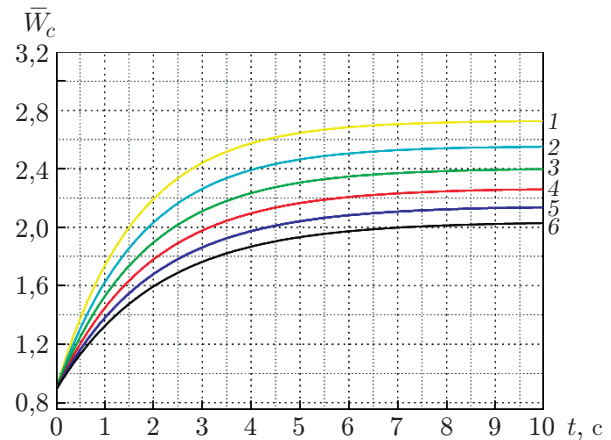


Рис. 6

Рис. 5. Зависимость $\bar{W}_c$ от времени при $\bar{k}_s = 10$, $\bar{k}_w = 50$, $\bar{C}_d = 1$, $\bar{\tau}_d = 0,1$, $\beta = 1$, $l/h = 0,2$, $\kappa = 0,6$ и различных значениях времени релаксации ζ_1 :

I — зависимость $\bar{W}_c(t)$ при $E = E_0$, II — зависимость $\bar{W}_c(t)$ при $E = E_\infty$; 1 — $\zeta_1 = 0,005$ с, 2 — $\zeta_1 = 0,05$ с, 3 — $\zeta_1 = 0,1$ с, 4 — $\zeta_1 = 0,25$ с, 5 — $\zeta_1 = 0,5$ с, 6 — $\zeta_1 = 0,75$ с, 7 — $\zeta_1 = 1$ с

Рис. 6. Зависимость $\bar{W}_c$ от времени при $\bar{k}_s = 10$, $\bar{k}_w = 50$, $\bar{C}_d = 1$, $\bar{\tau}_d = 0,1$, $\beta = 1$, $\zeta_1 = 0,01$, $l/h = 0,2$ и различных значениях отношения длительного модуля ползучести к мгновенному модулю упругости κ :

1 — $\kappa = 0,3$, 2 — $\kappa = 0,4$, 3 — $\kappa = 0,5$, 4 — $\kappa = 0,6$, 5 — $\kappa = 0,7$, 6 — $\kappa = 0,8$

Из рис. 6 следует, что с увеличением параметра κ относительный прогиб $\bar{W}_c$ уменьшается. Кроме того, с увеличением параметра κ увеличивается промежуток времени, на котором этот прогиб достигает заданного значения.

Заключение. С использованием модифицированной моментной теории упругости и теории релаксации исследован изгиб двухслойной нанопластины.

Получено уточненное выражение для моментных напряжений в пластине из вязкоупругого материала. С использованием метода Навье найдено аналитическое решение задачи об изгибе двухслойной нанопластины.

Исследовано влияние времени релаксации, отношения длительного модуля ползучести к мгновенному модулю упругости, структурного модуля демпфирования, модуля демпфирования среды (наполнителя), модуля основания Винклера и модуля сдвига материала наполнителя на относительный прогиб двухслойной нанопластины при ее изгибе.

Установлено, что уменьшение значения характерного линейного размера материала приводит к увеличению поперечного прогиба пластины. При наличии демпфирования структурного элемента и вязкоупругого наполнителя относительный поперечный прогиб двухслойной нанопластины уменьшается. Отношение длительного модуля ползучести к мгновенному модулю упругости κ существенно влияет на зависимость прогиба от времени. С увеличением отношения κ прогиб уменьшается. Модуль Винклера оказывает более существенное влияние на величину прогиба, чем модуль сдвига материала наполнителя. Время, необходимое для перехода двухслойной пластины в установившийся режим, увеличивается с увеличением времени релаксации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Fregonese S., Meng N., Nguyen H.-N., et al.** Electrical compact modelling of graphene transistors // *Solid-State Electron.* 2012. V. 73. P. 27–31.
2. **Murmu T., Adhikari S.** Nonlocal vibration of bonded double-nanoplate-systems // *Composites. Pt B. Engng.* 2011. V. 42. P. 1901–1911.
3. **Wang Y., Li F. M., Wang Y. Z.** Nonlinear vibration of double layered viscoelastic nanoplates based on nonlocal theory // *Phys. E. Low-dimens. Systems Nanostructures.* 2015. V. 67. P. 65–76.
4. **Hosseini M., Jamalpoor A., Bahreman M.** Small-scale effects on the free vibrational behavior of embedded viscoelastic double-nanoplate-systems under thermal environment // *Acta Astronaut.* 2016. V. 129. P. 400–409.
5. **Pouresmaeeli S., Fazelzadeh S. A., Ghavanloo E.** Exact solution for nonlocal vibration of double-orthotropic nanoplates embedded in elastic medium // *Composites. Pt B. Engng.* 2012. V. 43. P. 3384–3390.
6. **Jamalpoor A., Ahmadi-Savadkoobi A., Hossein M., Hosseini-Hashemi S.** Free vibration and biaxial buckling analysis of double magneto-electro-elastic nanoplate-systems coupled by a visco-Pasternak medium via nonlocal elasticity theory // *Europ. J. Mech.* 2017. V. 63. P. 84–98.
7. **Liu J. C., Zhang Y. Q., Fan L. F.** Nonlocal vibration and biaxial buckling of double-viscoelastic-FGM-nanoplate system with viscoelastic Pasternak medium in between // *Phys. Lett. A.* 2017. V. 381. P. 1228–1235.
8. **Asemi S. R., Farajpour A., Asemi H. R., Mohammadi M.** Influence of initial stress on the vibration of double-piezoelectric-nanoplate systems with various boundary conditions using DQM // *Phys. E. Low-dimens. Systems Nanostructures.* 2014. V. 63. P. 169–179.
9. **Wang Y., Li F., Jing X., Wang Y.** Nonlinear vibration analysis of double-layered nanoplates with different boundary conditions // *Phys. Lett. A.* 2015. V. 379. P. 1532–1537.
10. **Hosseini M., Jamalpoor A.** Analytical solution for thermomechanical vibration of double-viscoelastic nanoplate-systems made of functionally graded materials // *J. Thermal Stress.* 2015. V. 38. P. 1428–1456.
11. **Hosseini M., Bahreman M., Jamalpoor A.** Thermomechanical vibration analysis of FGM viscoelastic multi-nanoplate system incorporating the surface effects via nonlocal elasticity theory // *Microsystem Technol.* 2016. V. 23. P. 1–18.
12. **Ebrahimi F., Hosseini S. H. S.** Double nanoplate-based NEMS under hydrostatic and electrostatic actuations // *Europ. Phys. J. Plus.* 2016. V. 131. P. 1–19.
13. **Ebrahimi F., Hosseini S. H. S.** Nonlinear electroelastic vibration analysis of NEMS consisting of double-viscoelastic nanoplates // *Appl. Phys. A.* 2016. V. 122. 922.
14. **Yang M., Zhen X., Peng L., et al.** Interlayer crosslinking to conquer the stress relaxation of graphene laminated materials // *Materials Horizons.* 2018. V. 5. P. 1112–1119.
15. **Aliev K. S., Kuliev M. M., Ismailova R. S., Orudzhev A. O.** Electric conductivity and dielectric dispersion of polyvinylchloride-graphite composites // *Surface Engng Appl. Electrochem.* 2018. V. 54. P. 117–124.
16. **Savenkov G. G.** Dynamic viscosity and material relaxation time during shock loading // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2010. V. 51, N 2. P. 148–154.
17. **Golovnev I. F., Golovneva E. I., Voronin M. S., Pruel E. R.** Numerical study of stress relaxation in nanostructures in the course of uniaxial straining // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2019. V. 60, N 4. P. 685–691.
18. **Ansari R., Oskouie M. F., Sadeghi F., Bazdid-Vahdati M.** Free vibration of fractional viscoelastic Timoshenko nanobeams using the nonlocal elasticity theory // *Phys. E. Low-dimens. Systems Nanostructures.* 2015. V. 74. P. 318–327.

19. **Attia M. A., Mahmoud F. F.** Analysis of viscoelastic Bernoulli–Euler nanobeams incorporating nonlocal and microstructure effects // Intern. J. Mech. Materials Design. 2016. V. 13. P. 385–406.
20. **Attia M. A., Mahmoud F. F.** Size-dependent behavior of viscoelastic nanoplates incorporating surface energy and microstructure effects // Intern. J. Mech. Sci. 2017. V. 123. P. 117–132.
21. **Ajri M., Fakhrabadi M. M. S.** Nonlinear free vibration of viscoelastic nanoplates based on modified couple stress theory // J. Comput. Appl. Mech. 2018. V. 49. P. 44–53.
22. **Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P.** Couple stress based strain gradient theory for elasticity // Intern. J. Solids Structures. 2002. V. 39. P. 2731–2743.
23. **Mindlin R. D.** Influence of couple-stresses on stress concentrations // Experimental Mech. 1963. V. 3. P. 307–308.
24. **Attia M. A.** Investigation of size-dependent quasistatic response of electrically actuated nonlinear viscoelastic microcantilevers and microbridges // Meccanica. 2017. V. 52. P. 2391–2420.
25. **Arani A. G., Shokravi M.** Vibration response of visco-elastically coupled double-layered visco-elastic graphene sheet systems subjected to magnetic field via strain gradient theory considering surface stress effects // Proc. Inst. Mech. Engrs. Pt N. J. Nanoengng Nanosystems. 2014. V. 229. P. 180–190.

*Поступила в редакцию 21/XII 2020 г.,
после доработки — 30/VIII 2021 г.
Принята к публикации 27/IX 2021 г.*
