

ДЖЕРКИ И АНИЗОТРОПИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ В НИЖНЕЙ МАНТИИ

В.В. Плоткин

*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН,
630090, Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 3, Россия*

Джерки привлекаются для выявления анизотропии электропроводности в нижней мантии, обусловленной фазовым переходом магнезиовюстита из полупроводникового состояния в металлическое на глубинах 1500—2000 км. Теоретически изучаются возможные особенности проявлений джерков на поверхности Земли, возбуждаемых токами во внешнем жидком ядре при наличии анизотропии электропроводности в нижней мантии. С применением разложений по сферическим гармоникам получены уравнения для потенциала геомагнитного поля при слабой анизотропии среды. Рассматриваются варианты решений этих уравнений как в частотном, так и во временном представлениях. Обсуждаются пути решения обратной задачи получения оценок анизотропии по данным о распределении характеристик джерков на поверхности.

Магнезиовюстит, нижняя мантия, анизотропия электропроводности, глобальная электромагнитная индукция, геомагнитные вариации и джерки, внешнее жидкое ядро.

JERKS AND CONDUCTIVITY ANISOTROPY OF LOWER MANTLE

V.V. Plotkin

Conductivity anisotropy of the lower mantle presumably caused by phase change of dielectric magnesiowüstite at depths of 1500–2000 km is detectable from jerks. Jerks are induced by currents in the fluid outer core, propagate upward from the CMB through anisotropic conducting mantle, and appear on the Earth's surface. The surface jerk patterns are studied theoretically from the potential of the geomagnetic field presented as a sum of magnetic and electric modes. Equations for the fields of both modes and their relationship in a weakly anisotropic earth are obtained by the perturbation method. The field potential is expanded into a series of spherical harmonics, and the equations are solved in the frequency and time domains. The surface jerk responses can be inverted to retrieve anisotropy parameters; the goal function in the inversion may correspond to misfit between the model and experimental values either along the horizontal or vertical components.

Magnesiowüstite, conductivity anisotropy, global electromagnetic induction, geomagnetic variations, jerks, lower mantle, outer fluid core, core–mantle boundary

ВВЕДЕНИЕ

Геомагнитные джерки, или резкие изменения первой производной по времени от среднемесячных значений компонент геомагнитного поля, в настоящее время часто используются для исследования явлений на границе нижней мантии и внешнего ядра Земли и их характеристик. В этих исследованиях, в частности, детализируются интервалы возможных значений электропроводности нижней мантии [Alexandrescu et al., 1999; Ballani et al., 2002; Nagao et al., 2003; Pinheiro, Jackson, 2008].

Для оценки электропроводности в нижней мантии использовались также результаты лабораторных экспериментов с минералами при высоких давлениях и температурах [Xu et al., 2000]. Для нижней мантии на глубинах от 800 до 2900 км в указанной работе учитывался вклад магнезиовюстита. В работах [Овчинников, 2011; Ovchinnikov et al., 2012] с помощью анализа фазовой диаграммы магнезиовюстита в осях давление—температура предсказан возможный переход минерала из полупроводникового состояния в металлическое. В работах [Плоткин и др., 2013, 2014] представлены теоретические оценки возможного эффекта в величинах кажущегося сопротивления Земли на временных периодах от месяца до десятилетий, и проведена инверсия частотных зависимостей амплитуд геомагнитных вариаций, результаты которой указывают на возможное существование слоя с повышенными значениями электропроводности в нижней мантии.

Обсуждаемый переход обусловлен физическими эффектами кристаллической решетки в условиях, близких к условиям нижней мантии. Это означает также возможное наличие анизотропии электропроводности в нижней мантии. Теоретически особенности глобальной электромагнитной индукции с

анизотропной электропроводностью в нижней мантии рассматривались в статье [Плоткин, 2014]. Показано, что при анизотропии электропроводности в заглубленном сферическом слое и индукционном возбуждении Земли внешним источником поле на земной поверхности представлено двумя модами — магнитной (ТЕ-модой) и электрической (ТМ-модой). Установлено, что информацию о тензоре электропроводности анизотропного слоя можно получить с помощью как совместного, так и раздельного анализа характеристик обоих мод. В работе [Плоткин и др., 2015] приведены первые оценки элементов тензора электропроводности, относящихся к тангенциальным компонентам электромагнитного поля. Они получены по данным одной магнитной моды за промежуток с 1920 по 2009 год из банка среднемесячных значений компонент X , Y и Z геомагнитного поля, доступных через интернет. Предположительно анизотропия становится заметной для геомагнитных вариаций с периодом более 10 лет, и ее вклад увеличивается для более длинных периодов.

В указанных работах использованы данные только по вариациям геомагнитного поля внешнего происхождения. Представляет интерес вопрос, можно ли обнаружить эффекты анизотропии электропроводности в нижней мантии по данным о геомагнитных вариациях внутренних источников, в частности, с помощью анализа джерков. В данной статье рассмотрены теоретические особенности возбуждения джерков в Земле с анизотропной электропроводностью.

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ДЖЕРКА, ВОЗБУЖДАЕМОГО В АНИЗОТРОПНО ПРОВОДЯЩЕЙ МАНТИИ

Исследуя глобальное электромагнитное поле, удобно представить все вектора в виде суммы электрической и магнитной мод [Плоткин, 2014]:

$$F_{\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \varphi}, \quad F_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \vartheta}, \quad (1)$$

где под вектором $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ понимается любой из векторов: электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ и тока $\mathbf{J} = \hat{\sigma} \mathbf{E}$, возбуждаемого в анизотропно проводящей среде с тензором электропроводности $\hat{\sigma}$. Используется сферическая система координат с началом в центре Земли. Потенциалы мод $F^{(1)}$ и $F^{(0)}$ связаны с угловыми распределениями тангенциальных компонент полей на сфере любого радиуса следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta F_{\vartheta}) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (F_{\varphi}) &= \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} F^{(1)}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta F_{\varphi}) - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (F_{\vartheta}) &= -\frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} F^{(0)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Введенные потенциалы удобны тем, что справедливы равенства [Плоткин, 2014]:

$$\begin{aligned} (\text{rot } \mathbf{F})_r &= -\frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} F^{(0)}, \quad \Delta_{\Omega} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \\ (\text{rot rot } \mathbf{F})_r &= \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} \left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial r} - F_r \right), \\ (\text{rot rot rot } \mathbf{F})_r &= \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} F^{(0)} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

В силу соотношений (3) в сферически-симметричной и изотропной среде моды оказываются независимыми. Анизотропия и отклонения среды от сферической симметрии приводят к взаимосвязи электрической и магнитной мод. Используя (3), из уравнений Максвелла можно получить уравнения, описывающие эту связь:

$$\frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 E^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} E^{(0)} \right] - \mu_0 \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} \frac{\partial J^{(0)}}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} \left(\frac{\partial E^{(1)}}{\partial r} - E_r \right) + \mu_0 \frac{\partial J_r}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

$$\text{div } \mathbf{J} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 J_r) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} J^{(1)} = 0.$$

Уравнение (4) определяет поля магнитной моды, а (5) — электрической. Связь между модами в уравнениях (4), (5) обусловлена членами с токовыми потенциалами. В частности, в анизотропной среде для потенциала $J^{(0)}$ из второго уравнения (2), подставляя в него $\mathbf{J} = \bar{\sigma}\mathbf{E}$ с учетом (1), можно получить:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2}\Delta_{\Omega}J^{(0)} &= \frac{1}{r^2}\left[\frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial E^{(0)}}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\sigma_{\vartheta\vartheta}}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 E^{(0)}}{\partial\varphi^2}\right] - \frac{\sigma_{\vartheta\varphi} + \sigma_{\varphi\vartheta}}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial^2 E^{(0)}}{\partial\vartheta\partial\varphi} + \\ &+ \frac{1}{r^2}\left[\frac{\sigma_{\vartheta\varphi}}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 E^{(1)}}{\partial\varphi^2} - \frac{\sigma_{\varphi\vartheta}}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial E^{(1)}}{\partial\vartheta}\right)\right] + \frac{\sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial^2 E^{(1)}}{\partial\vartheta\partial\varphi} + \\ &+ \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\sigma_{\vartheta r}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \sigma_{\varphi r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta E_r)\right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь для простоты предполагалось, что латеральная (угловая) зависимость всех компонент тензора $\bar{\sigma}$ отсутствует.

Рассмотрим далее задачу о возбуждении джерков токами во внешнем жидком ядре Земли. Поскольку электропроводность внешнего ядра $\sim 5 \cdot 10^5$ См/м много больше электропроводности нижней мантии [Xu et al., 2000], справедливо считать, что возбуждаемая внутри ядра электрическая мода поля не покидает мантию. Тогда сторонние токи \mathbf{j}_c , возбуждающие поле в мантии, можно описать тороидальными токами на поверхности внешнего ядра $r = R_c$ (подробнее о полоидальных и тороидальных полях см. работу [Паркинсон, 1986]). Это означает

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\Omega}\mathbf{j}_c &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta j_{c\vartheta}) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(j_{c\varphi}) = 0, \\ j_{c\vartheta} &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial j_c^{(0)}}{\partial\varphi}, \quad j_{c\varphi} = -\frac{1}{r}\frac{\partial j_c^{(0)}}{\partial\vartheta}. \end{aligned} \quad (7)$$

Граничные условия на поверхности ядра при таких предположениях имеют вид:

$$H_{\vartheta}(R_c, \vartheta, \varphi, t) = j_{c\varphi}(R_c, \vartheta, \varphi, t), \quad H_{\varphi}(R_c, \vartheta, \varphi, t) = -j_{c\vartheta}(R_c, \vartheta, \varphi, t). \quad (8)$$

Сравнивая (7) с соотношением (1) для магнитного поля и (8), получим, что

$$H^{(1)}(R_c, \vartheta, \varphi, t) = -j_c^{(0)}(R_c, \vartheta, \varphi, t), \quad H^{(0)}(R_c, \vartheta, \varphi, t) = 0. \quad (9)$$

Учтем теперь, что введенные потенциалы магнитного и электрического полей мод связаны соотношениями [Плоткин, 2014]:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r^2}\Delta_{\Omega}H^{(0)} &= J_r, \quad E_r - \frac{\partial E^{(1)}}{\partial r} = -\mu_0\frac{\partial H^{(0)}}{\partial t}, \\ \frac{1}{r^2}\Delta_{\Omega}E^{(0)} &= \mu_0\frac{\partial H_r}{\partial t}, \quad \frac{\partial E^{(0)}}{\partial r} = -\mu_0\frac{\partial H^{(1)}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку радиальный ток на поверхности внешнего ядра равен нулю, из первого равенства в (10) вновь получается второе из условий (9). Учитывая последнее равенство в (10) и первое в (9), можно окончательно записать граничное условие для уравнения (4) на поверхности внешнего ядра в виде:

$$\frac{\partial E^{(0)}}{\partial r}(R_c, \vartheta, \varphi, t) = \mu_0\frac{\partial j_c^{(0)}(R_c, \vartheta, \varphi, t)}{\partial t}. \quad (11)$$

Для полной постановки задачи о возбуждении джерка к уравнению (4) необходимо еще одно граничное условие. Можно, например, задать на земной поверхности при $r = R$ любое из двух условий:

$$\frac{\partial E^{(0)}}{\partial r} = -\mu_0\frac{\partial H^{(1)}}{\partial t}, \quad \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta H_{\vartheta}) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(H_{\varphi}) = \frac{1}{r^2}\Delta_{\Omega}H^{(1)}, \quad (12a)$$

$$\frac{1}{r^2}\Delta_{\Omega}E^{(0)} = \mu_0\frac{\partial H_r}{\partial t}, \quad (12b)$$

где в первом из них (12а) используются данные регистрации вариаций только горизонтальных компонент геомагнитного поля, а во втором (12б) — только вертикальной компоненты. Подобная ситуация уже возникала ранее при использовании нами метода согласования [Плоткин и др., 2007]. Здесь также, применяя методы оптимизации для решения обратной задачи, можно определить неизвестные сторонние токи $\mathbf{j}_c(R_c, \vartheta, \varphi, t)$, возбуждающие поле в мантии и электропроводность в ней. Подбор искоемых характеристик предполагает согласование между собой данных регистрации вариаций всех компонент геомагнитного поля на станциях мировой сети. Можно также использовать данные имеющихся моделей геомагнитного поля [Sabaka et al., 2004], поскольку они успешно применялись для выделения джерков на земной поверхности [Chambodut, Manda, 2005].

С целью дальнейших упрощений, как и в работе [Плоткин, 2014], будем предполагать выполненными условия малости отклонений от случая трансверсально-изотропной среды, для которой справедливо $\sigma_{rr} = \sigma_0$, $\sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\perp}$, $\sigma_{ik} = 0$, если $i \neq k$. Пусть теперь $\sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{\perp} + \delta\sigma_{\vartheta\vartheta}$, $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\perp} + \delta\sigma_{\varphi\varphi}$ и введенные добавки, и все остальные недиагональные компоненты тензора $\hat{\sigma}$ малы. Учтем, что при индукционном возбуждении поля тороидальными токами (7) в трансверсально-изотропной среде потенциалы электрической моды $E^{(1)}$ и E_r равны нулю. Переходя к случаю малых отклонений от этой среды и принимая во внимание, что поля электрической моды тогда малы, применим метод возмущений. Подставляя (6) с членами первого порядка малости в уравнение (4), для магнитной моды получим:

$$\Delta_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 E^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} E^{(0)} - \mu_0 \sigma_{\perp} \frac{\partial E^{(0)}}{\partial t} \right] - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\delta\sigma_{\varphi\varphi}}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial E^{(0)}}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\delta\sigma_{\vartheta\vartheta}}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 E^{(0)}}{\partial \varphi^2} - \frac{\sigma_{\vartheta\varphi} + \sigma_{\varphi\vartheta}}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 E^{(0)}}{\partial \vartheta \partial \varphi} \right] = 0 \quad (13)$$

Разложим теперь $E^{(0)}$ в ряд по сферическим функциям, удовлетворяющим уравнениям $\Delta_{\Omega} Y_n^m(\vartheta, \varphi) + n(n+1)Y_n^m(\vartheta, \varphi) = 0$, используя такую же сквозную нумерацию этих функций, как в работе [Плоткин и др., 2007]:

$$E^{(0)}(r, \vartheta, \varphi, t) = \sum_k \sqrt{r} \Phi_k(r, t) Y_k(\vartheta, \varphi). \quad (14)$$

Из (13) видно, что нам понадобятся также следующие разложения, учитывающие «зацепление» сферических гармоник в анизотропной среде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta Y_n) &= \sum_k b_{nk} Y_k(\vartheta, \varphi), \\ \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} &= \sum_k d_{nk} Y_k(\vartheta, \varphi), \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \vartheta \partial \varphi} &= \sum_k c_{nk} Y_k(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (15)$$

С учетом (14), (15) из (13) для m -й сферической гармоники получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} - \frac{(m'+1/2)^2}{r^2} \Phi_m &= \mu_0 \sigma_{\perp} \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} + \\ + \frac{\mu_0}{m'(m'+1)} \sum_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} &\left[d_{mn} \delta\sigma_{\vartheta\vartheta} + b_{mn} \delta\sigma_{\varphi\varphi} - c_{mn} (\sigma_{\vartheta\varphi} + \sigma_{\varphi\vartheta}) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где коэффициенты m' соответствуют выбранной сферической гармонике при используемой сквозной нумерации [Плоткин и др., 2007]. Как было принято выше, компоненты тензора электропроводности здесь не зависят от угловых координат. Предположим также, что они не зависят от радиуса и времени. Это эквивалентно переходу к понятию о кажущейся электропроводности и ее неизменности за время регистрации данных мировой сетью.

Полученные уравнения (16) описывают поля сферических гармоник в анизотропной среде в зависимости от времени и радиальной координаты с учетом их взаимосвязи, обусловленной членами второй строки. Их решение можно искать как в частотном, так и во временном представлениях.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВО ВРЕМЕННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Во временном представлении используем разложение решения $\Phi_m(r, t)$ по собственным функциям оператора в первой строке (16) $\Psi_k^m(r)$, которые выражаются комбинацией функций Бесселя полуцелого порядка $J_{\pm(m'+1/2)}(u_k^m r)$:

$$\Psi_k^m(r) = C_{1k}^m J_{m'+1/2}(u_k^m r) + C_{2k}^m J_{-(m'+1/2)}(u_k^m r). \quad (17)$$

Отметим, что верхний индекс m в обозначениях величин $\Psi_k^m(r)$, u_k^m , C_{1k}^m и C_{2k}^m указывает на их принадлежность к исследуемой m -й сферической гармонике. Для определения собственных чисел u_k^m и неизвестных коэффициентов C_{1k}^m и C_{2k}^m в (17) используем граничные условия (11), (12). Известно, что собственные функции $\Psi_k^m(r)$ определяются однородными граничными условиями, которые с учетом (14) можно получить либо из (11), (12а):

$$\frac{d}{dr} [\sqrt{r} \Psi_k^m(r)] = 0, \quad r = R_c, \quad \frac{d}{dr} [\sqrt{r} \Psi_k^m(r)] = 0, \quad r = R, \quad (18a)$$

либо из (11), (12б):

$$\frac{d}{dr} [\sqrt{r} \Psi_k^m(r)] = 0, \quad r = R_c, \quad \Psi_k^m(r) = 0, \quad r = R. \quad (18b)$$

Подставляя (17) в (18) и приравнявая детерминант системы нулю, получим трансцендентное уравнение относительно собственных чисел u_k^m и связь между коэффициентами C_{1k}^m и C_{2k}^m . Полностью эти коэффициенты определяются условием нормировки собственных функций $\Psi_k^m(r)$ (система собственных функций будет ортонормированной):

$$\int_{R_c}^R r \Psi_i^m(r) \Psi_k^m(r) dr = \delta_{ik}, \quad (19)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера.

Представим теперь решение (16) в виде разложения по этим функциям:

$$\Phi_m(r, t) = \sum_k a_k^m(t) \Psi_k^m(r). \quad (20)$$

Умножая (16) на $r \Psi_k^m(r)$ и интегрируя по r от R_c до R , с учетом (19), получим

$$\begin{aligned} \frac{da_k^m}{dt} = & -\frac{(u_k^m)^2}{\mu_0 \sigma_{\perp}} a_k^m + F_k^m(t), \\ F_k^m(t) = & \left\{ \frac{1}{\mu_0 \sigma_{\perp}} \left[\frac{\partial \Phi_m(R, t)}{\partial r} R \Psi_k^m(R) - \Phi_m(R, t) R \frac{d\Psi_k^m(R)}{dr} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\mu_0 \sigma_{\perp}} \left[\frac{\partial \Phi_m(R_c, t)}{\partial r} R_c \Psi_k^m(R_c) - \Phi_m(R_c, t) R_c \frac{d\Psi_k^m(R_c)}{dr} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{m'(m'+1)} \sum_n \int_{R_c}^R \frac{\partial \Phi_n(r, t)}{\partial t} r \Psi_k^m(r) g_{mn} dr \right\}, \\ \frac{\partial \Phi_n(r, t)}{\partial t} = & \sum_i \frac{da_i^n}{dt} \Psi_i^n(r), \quad g_{mn} = \left[d_{mn} \frac{\delta \sigma_{\vartheta \vartheta}}{\sigma_{\perp}} + b_{mn} \frac{\delta \sigma_{\varphi \varphi}}{\sigma_{\perp}} - c_{mn} \frac{(\sigma_{\vartheta \varphi} + \sigma_{\varphi \vartheta})}{\sigma_{\perp}} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Решение первого уравнения в (21) с учетом отсутствия джерка при $t \rightarrow -\infty$ и заданной правой частью $F_k^m(t)$ имеет вид:

$$a_k^m(t) = \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{(u_k^m)^2}{\mu_0\sigma_{\perp}}(t-\xi)\right] F_k^m(\xi) d\xi. \quad (22)$$

При подстановке в (22) правой части из (21) в нулевом приближении можно пренебречь последним членом с малыми коэффициентами g_{mn} . Принимая во внимание граничные условия для $\Psi_k^m(r)$ (18a) или (18б), запишем тогда правую часть $F_k^m(t)$ для нулевого приближения соответственно в виде:

$$F_k^m(t) = \frac{1}{\mu_0\sigma_{\perp}} \left\{ \left[\frac{\partial\Phi_m(R,t)}{\partial r} + \frac{\Phi_m(R,t)}{2R} \right] R\Psi_k^m(R) - \left[\frac{\partial\Phi_m(R_c,t)}{\partial r} + \frac{\Phi_m(R_c,t)}{2R_c} \right] R_c\Psi_k^m(R_c) \right\}, \quad (23a)$$

$$F_k^m(t) = \frac{1}{\mu_0\sigma_{\perp}} \left\{ -\Phi_m(R,t)R \frac{d\Psi_k^m(R)}{dr} - \left[\frac{\partial\Phi_m(R_c,t)}{\partial r} + \frac{\Phi_m(R_c,t)}{2R_c} \right] R_c\Psi_k^m(R_c) \right\}. \quad (23б)$$

Входящие в (23) комбинации величин $\Phi_m(r,t)$ и $\frac{\partial\Phi_m(r,t)}{\partial r}$ при $r=R_c$ и $r=R$ можно получить из граничных условий (11), (12a) и (11), (12б), подставляя в них (14). Тогда правые части (23) принимают вид:

$$F_k^m(t) = \frac{\sqrt{R}}{\mu_0\sigma_{\perp}} \left\{ \left(\frac{\partial E^{(0)}(R,t)}{\partial r} \right)^m \Psi_k^m(R) - \left(\frac{\partial E^{(0)}(R_c,t)}{\partial r} \right)^m \sqrt{\frac{R_c}{R}} \Psi_k^m(R_c) \right\}, \quad (24a)$$

$$F_k^m(t) = -\frac{\sqrt{R}}{\mu_0\sigma_{\perp}} \left\{ \left(E^{(0)}(R,t) \right)^m \frac{d\Psi_k^m(R)}{dr} + \left(\frac{\partial E^{(0)}(R_c,t)}{\partial r} \right)^m \sqrt{\frac{R_c}{R}} \Psi_k^m(R_c) \right\}, \quad (24б)$$

где $\left(E^{(0)}(R,t) \right)^m$, $\left(\frac{\partial E^{(0)}(R,t)}{\partial r} \right)^m$ и $\left(\frac{\partial E^{(0)}(R_c,t)}{\partial r} \right)^m$ — коэффициенты m членов разложений потенциала

$E^{(0)}$ и его производной $\frac{\partial E^{(0)}}{\partial r}$ в ряды по сферическим гармоникам. Учитывая (20), (22) и (24), введем функции:

$$\begin{aligned} G_1^m(r,t) &= \sum_k \exp\left[-\frac{(u_k^m)^2}{\mu_0\sigma_{\perp}}t\right] \Psi_k^m(R)\Psi_k^m(r), \\ G_2^m(r,t) &= \sum_k \exp\left[-\frac{(u_k^m)^2}{\mu_0\sigma_{\perp}}t\right] \Psi_k^m(R_c)\Psi_k^m(r), \\ G_3^m(r,t) &= \sum_k \exp\left[-\frac{(u_k^m)^2}{\mu_0\sigma_{\perp}}t\right] \frac{d\Psi_k^m(R)}{dr} \Psi_k^m(r). \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда в нулевом приближении коэффициенты $\Phi_m(r,t)$ разложений (14) потенциала $E^{(0)}$ по сферическим функциям представляются для граничного условия (12a) в виде:

$$\Phi_m(r, t) = \int_{-\infty}^t \left\{ \left(\frac{\partial E^{(0)}(R, \xi)}{\partial r} \right)^m \sqrt{R} G_1^m(r, t - \xi) - \left(\frac{\partial E^{(0)}(R_c, \xi)}{\partial r} \right)^m \sqrt{R_c} G_2^m(r, t - \xi) \right\} \frac{d\xi}{\mu_0 \sigma_{\perp}} \quad (26a)$$

или для граничного условия (12б) в виде:

$$\Phi_m(r, t) = - \int_{-\infty}^t \left\{ \left(E^{(0)}(R, \xi) \right)^m \sqrt{R} G_3^m(r, t - \xi) + \left(\frac{\partial E^{(0)}(R_c, \xi)}{\partial r} \right)^m \sqrt{R_c} G_2^m(r, t - \xi) \right\} \frac{d\xi}{\mu_0 \sigma_{\perp}} \quad (26б)$$

Если теперь подставить эти решения в последний член с малыми коэффициентами g_{mn} в правой части (21) и учесть (22), получим поправки первого приближения:

$$\delta\Phi_m(r, t) = - \frac{1}{m'(m'+1)} \sum_{n,k} g_{mn} \Psi_k^m(r) \times \int_{-\infty}^t \exp \left[- \frac{(u_k^m)^2}{\mu_0 \sigma_{\perp}} (t - \xi) \right] \int_{R_c}^R \frac{\partial \Phi_n(\bar{r}, \xi)}{\partial \xi} \bar{r} \Psi_k^m(\bar{r}) d\bar{r} d\xi, \quad (27)$$

где $\Phi_n(r, \xi)$ дается формулами (25), (26a) или (25), (26б) с соответствующими изменениями индексов и аргументов.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТОТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В частотном представлении, используя спектральные разложения величин по временным гармоникам вида

$$\Phi_m(r, t) = \sum_{\omega} \bar{\Phi}_m(r, \omega) e^{i\omega t}, \quad E^{(0)}(r, \vartheta, \varphi, t) = \sum_{\omega} \bar{E}^{(0)}(r, \vartheta, \varphi, \omega) e^{i\omega t},$$

вместо (16) для отдельной гармоники $\sim e^{i\omega t}$ будем иметь (зависимость величин от ω в этом разделе далее для простоты не указывается):

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{\Phi}_m}{dr} - \left[\frac{(m'+1/2)^2}{r^2} + k_{\perp}^2 \right] \bar{\Phi}_m = \frac{k_{\perp}^2}{m'(m'+1)} \sum_n \bar{\Phi}_n g_{mn}, \quad (28)$$

где $k_{\perp}^2 = i\omega\mu_0\sigma_{\perp}$, коэффициенты g_{mn} приведены в (21). В частотном представлении разложение по сферическим гармоникам аналогично (14):

$$\bar{E}^{(0)}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_m \sqrt{r} \bar{\Phi}_m(r) Y_m(\vartheta, \varphi). \quad (29)$$

Граничные условия для $\bar{\Phi}_m$ в случае (11), (12a) принимают вид:

$$\left[\frac{d\bar{\Phi}_m(R)}{dr} + \frac{\bar{\Phi}_m(R)}{2R} \right] = \frac{1}{\sqrt{R}} \left(\frac{d\bar{E}^{(0)}(R)}{dr} \right)^m, \quad (30a)$$

$$\left[\frac{d\bar{\Phi}_m(R_c)}{dr} + \frac{\bar{\Phi}_m(R_c)}{2R_c} \right] = \frac{1}{\sqrt{R_c}} \left(\frac{d\bar{E}^{(0)}(R_c)}{dr} \right)^m$$

и для (11), (12б):

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_m(R) &= \frac{1}{\sqrt{R}} \left(\bar{E}^{(0)}(R) \right)^m, \\ \left[\frac{d\bar{\Phi}_m(R_c)}{dr} + \frac{\bar{\Phi}_m(R_c)}{2R_c} \right] &= \frac{1}{\sqrt{R_c}} \left(\frac{d\bar{E}^{(0)}(R_c)}{dr} \right)^m,\end{aligned}\quad (30б)$$

где $\left(\bar{E}^{(0)}(R) \right)^m$, $\left(\frac{d\bar{E}^{(0)}(R)}{dr} \right)^m$ и $\left(\frac{d\bar{E}^{(0)}(R_c)}{dr} \right)^m$ — коэффициенты m членов разложений потенциала

$\bar{E}^{(0)}$ и его производной $\frac{d\bar{E}^{(0)}}{dr}$ в ряды по сферическим гармоникам.

Общее решение уравнения (28) формально имеет вид:

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_m(r) &= C_1^m I_{m'+1/2}(k_\perp r) + C_2^m K_{m'+1/2}(k_\perp r) + \\ &+ I_{m'+1/2}(k_\perp r) \int_{R_c}^r \xi f_m(\xi) K_{m'+1/2}(k_\perp \xi) d\xi - \\ &- K_{m'+1/2}(k_\perp r) \int_{R_c}^r \xi f_m(\xi) I_{m'+1/2}(k_\perp \xi) d\xi,\end{aligned}\quad (31)$$

где $I_{m'+1/2}(k_\perp r)$ и $K_{m'+1/2}(k_\perp r)$ — функция Бесселя мнимого аргумента и $f_m(\xi) = \frac{k_\perp^2}{m'(m'+1)} \sum_n \bar{\Phi}_n(\xi) g_{mn}$ —

правая часть уравнения (28). Используя граничные условия (30а) или (30б), можно определить константы C_1^m и C_2^m . Конечные выражения достаточно громоздки. Поскольку в правую часть $f_m(\xi)$ в соответствии с методом возмущений следует подставлять решения $\bar{\Phi}_{0m}(r)$ нулевого приближения, приведем здесь выражения для них:

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_{0m}(r) &= \left[\frac{\left(\frac{d\bar{E}^{(0)}(R_c)}{dr} \right)^m}{\sqrt{R_c}} K_R - \frac{\left(\frac{d\bar{E}^{(0)}(R)}{dr} \right)^m}{\sqrt{R}} K_{R_c} \right] \frac{I_{m'+1/2}(k_\perp r)}{M_1} - \\ &- \left[\frac{\left(\frac{d\bar{E}^{(0)}(R_c)}{dr} \right)^m}{\sqrt{R_c}} I_R - \frac{\left(\frac{d\bar{E}^{(0)}(R)}{dr} \right)^m}{\sqrt{R}} I_{R_c} \right] \frac{K_{m'+1/2}(k_\perp r)}{M_1},\end{aligned}\quad (32а)$$

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_{0m}(r) &= \left[\left(\frac{d\bar{E}^{(0)}(R_c)}{dr} \right)^m \frac{K_{m'+1/2}(k_\perp R)}{\sqrt{R_c}} - \frac{\left(\bar{E}^{(0)}(R) \right)^m}{\sqrt{R}} K_{R_c} \right] \frac{I_{m'+1/2}(k_\perp r)}{M_2} - \\ &- \left[\left(\frac{d\bar{E}^{(0)}(R_c)}{dr} \right)^m \frac{I_{m'+1/2}(k_\perp R)}{\sqrt{R_c}} - \frac{\left(\bar{E}^{(0)}(R) \right)^m}{\sqrt{R}} I_{R_c} \right] \frac{K_{m'+1/2}(k_\perp r)}{M_2}\end{aligned}\quad (32б)$$

в случаях граничных условий (30а) и (30б) соответственно. В (32) введены обозначения:

$$\begin{aligned}
K_R &= \frac{dK_{m'+1/2}}{dr} + \frac{K_{m'+1/2}}{2r}, \quad I_R = \frac{dI_{m'+1/2}}{dr} + \frac{I_{m'+1/2}}{2r}, \quad r = R, \\
K_{R_c} &= \frac{dK_{m'+1/2}}{dr} + \frac{K_{m'+1/2}}{2r}, \quad I_{R_c} = \frac{dI_{m'+1/2}}{dr} + \frac{I_{m'+1/2}}{2r}, \quad r = R_c, \\
M_1 &= K_R I_{R_c} - K_{R_c} I_R, \quad M_2 = I_{R_c} K_{m'+1/2}(k_{\perp} R) - K_{R_c} I_{m'+1/2}(k_{\perp} R).
\end{aligned} \tag{33}$$

При решении обратных задач далее понадобятся также два следующих выражения. В случае граничных условий (30а) для потенциала $\left(\bar{E}^{(0)}(R)\right)^m$ на земной поверхности справедливо выражение:

$$\begin{aligned}
\left(\bar{E}^{(0)}(R)\right)^m &= \left(\frac{d\bar{E}^{(0)}(R)}{dr}\right)^m \frac{M_2}{M_1} - \left(\frac{d\bar{E}^{(0)}(R_c)}{dr}\right)^m \frac{1}{M_1 \sqrt{R_c R}} - \\
&- \frac{1}{M_1 \sqrt{R}} \left[I_{R_c} \int_{R_c}^R \xi f_m(\xi) K_{m'+1/2}(k_{\perp} \xi) d\xi - K_{R_c} \int_{R_c}^R \xi f_m(\xi) I_{m'+1/2}(k_{\perp} \xi) d\xi \right]
\end{aligned} \tag{34a}$$

где $f_m(\xi) = \frac{k_{\perp}^2}{m'(m'+1)} \sum_n \bar{\Phi}_{0n}(\xi) g_{mn}$ с подстановкой (32а).

В случае граничных условий (30б) для радиальной производной потенциала на земной поверхности имеет место выражение:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\bar{E}^{(0)}(R)}{dr}\right)^m &= \left(\frac{d\bar{E}^{(0)}(R_c)}{dr}\right)^m \frac{1}{M_2 \sqrt{R_c R}} + \left(\bar{E}^{(0)}(R)\right)^m \frac{M_1}{M_2} + \\
&+ \frac{1}{M_2 \sqrt{R}} \left[I_{R_c} \int_{R_c}^R \xi f_m(\xi) K_{m'+1/2}(k_{\perp} \xi) d\xi - K_{R_c} \int_{R_c}^R \xi f_m(\xi) I_{m'+1/2}(k_{\perp} \xi) d\xi \right],
\end{aligned} \tag{34б}$$

где $f_m(\xi) = \frac{k_{\perp}^2}{m'(m'+1)} \sum_n \bar{\Phi}_{0n}(\xi) g_{mn}$ с подстановкой (32б).

Таким образом, формулы (34) представляют аналитическое решение прямой задачи о возбуждении джерков тороидальными токами на границе внешнего ядра Земли с проводящей мантией. Они дают искомые выражения для расчета модельных коэффициентов разложений потенциала или его радиальной производной по сферическим гармоникам поля джерков на земной поверхности. При решении обратной задачи эти коэффициенты определяются параметрами подбираемой текущей модели среды.

Входными величинами в обратной задаче являются значения радиальной производной $\left(\frac{d\bar{E}^{(0)}(R)}{dr}\right)^m$ в случае граничных условий (30а) или сам потенциал $\left(\bar{E}^{(0)}(R)\right)^m$ при граничных условиях (30б). Эти коэффициенты могут быть определены, как указывалось ранее, по данным регистрации вариаций трех компонент геомагнитного поля на мировой сети обсерваторий. Расчетные модельные коэффициенты (34) в обоих случаях зависят также от величины $\left(\frac{d\bar{E}^{(0)}(R_c)}{dr}\right)^m$, которая задается на границе с внешним ядром Земли и определяется поверхностными токами (8), возбуждающими поле. Поскольку эти токи нам неизвестны, они также подлежат определению в ходе решения обратной задачи.

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ, ВАРИАНТЫ ПОСТАНОВКИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ И НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ

Для параметризации отыскиваемых величин можно воспользоваться известными моделями джерков, в частности, из работы [Ballani et al., 2010]. В каждой точке сферы зависимость от времени вековой вариации какой-либо компоненты $F(\vartheta, \varphi)$ магнитного поля представляется отрезками прямых линий с разными наклонами $F_{\pm}(\vartheta, \varphi)$ к оси времени, пересекающихся в момент джерка $t_0(\vartheta, \varphi)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\vartheta, \varphi, t)}{\partial t} &= F_{-}(\vartheta, \varphi)[t - t_0(\vartheta, \varphi)] + F_0(\vartheta, \varphi), \quad t < t_0(\vartheta, \varphi), \\ \frac{\partial F(\vartheta, \varphi, t)}{\partial t} &= F_{+}(\vartheta, \varphi)[t - t_0(\vartheta, \varphi)] + F_0(\vartheta, \varphi), \quad t > t_0(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (35)$$

где $-\frac{T}{2} \leq t$, $t_0(\vartheta, \varphi) \leq \frac{T}{2}$ и T — интервал наблюдений, полностью включающий все проявления рассматриваемого события в точках сферы. В частотном представлении (35) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\vartheta, \varphi, t)}{\partial t} &= \sum_n \bar{F}_n(\vartheta, \varphi) \exp(i\omega_n t), \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n, \\ \bar{F}_n(\vartheta, \varphi) &= \frac{F_{+}(\vartheta, \varphi) - F_{-}(\vartheta, \varphi)}{\omega_n} \frac{(-1)^n [1 - i\omega_n t_0(\vartheta, \varphi)] - \exp[-i\omega_n t_0(\vartheta, \varphi)]}{\omega_n T} - \\ &\quad - \frac{F_{+}(\vartheta, \varphi) + F_{-}(\vartheta, \varphi)}{2i\omega_n} (-1)^n, \quad n \neq 0, \\ \bar{F}_0(\vartheta, \varphi) &= F_0(\vartheta, \varphi) + \frac{F_{+}(\vartheta, \varphi) - F_{-}(\vartheta, \varphi)}{2} \left(\frac{T}{4} + \frac{[t_0(\vartheta, \varphi)]^2}{T} \right) - \\ &\quad - \frac{F_{+}(\vartheta, \varphi) + F_{-}(\vartheta, \varphi)}{2} t_0(\vartheta, \varphi), \quad n = 0, \end{aligned} \quad (36)$$

где $\bar{F}_n(\vartheta, \varphi)$ — амплитуды временных гармоник вековой вариации на частоте ω_n . Как видно из (12), потенциал $E^{(0)}$ и его радиальная производная $\frac{\partial E^{(0)}}{\partial r}$ определяются соответственно вековыми вариациями радиальной компоненты магнитного поля H_r и магнитного потенциала $H^{(1)}$. Представляя (12) в виде рядов по сферическим и частотным гармоникам и учитывая (36), имеем:

$$\left(\frac{\partial \bar{E}_n^{(0)}}{\partial r} \right)^m = -\mu_0 \left(\bar{H}_n^{(1)} \right)^m, \quad (37a)$$

$$\frac{1}{r^2} m'(m'+1) \left(\bar{E}_n^{(0)} \right)^m = \mu_0 \left(\bar{H}_{rn} \right)^m, \quad (37b)$$

где $\bar{E}_n^{(0)}(\vartheta, \varphi)$, $\frac{\partial \bar{E}_n^{(0)}(\vartheta, \varphi)}{\partial r}$, $\bar{H}_n^{(1)}(\vartheta, \varphi)$, $\bar{H}_{rn}(\vartheta, \varphi)$ соответственно комплексные амплитуды n -х частотных гармоник $\sim e^{i\omega_n t}$ потенциала $E^{(0)}$, его производной $\frac{\partial E^{(0)}}{\partial r}$, вековых вариаций магнитного потенциала $H^{(1)}$ и радиальной компоненты H_r . Скобки с верхним индексом m в (37) и далее указывают на принадлежность к m -му члену ряда по сферическим гармоникам.

Нижнее граничное условие (11) при $r = R_c$ с учетом (9) имеет такой же вид, как (37a). Входящие сюда неизвестные величины $\left[\bar{H}_n^{(1)}(R_c) \right]^m$ подлежат определению в ходе решения обратной задачи. Они характеризуют источник — сторонние тороидальные токи на поверхности внешнего ядра, возбуждаю-

шие поле джерка. Применяя метод возмущений, эти величины можно найти в нулевом приближении, не учитывая последние члены в (34) с малыми коэффициентами $\sim g_{mn}$. Действительно, в этом случае формулы (34а) и (34б) с учетом связей потенциалов (37а) и (37б) имеют одинаковый вид:

$$\frac{[\bar{H}_n^{(1)}(R_c)]^m}{\sqrt{R_c R}} = c_1^{m'} [\bar{H}_{rn}(R)]^m + c_2^{m'} \frac{[\bar{H}_n^{(1)}(R)]^m}{R}, \quad (38)$$

$$c_1^{m'} = \frac{R^2 M_1}{m'(m'+1)}, \quad c_2^{m'} = R M_2.$$

Поскольку магнитное поле внутренних источников в атмосфере с высотой убывает, на земной поверхности должно выполняться условие:

$$\left(\frac{d\bar{E}^{(0)}(R)}{dr} \right)^m + \frac{m'}{R} [\bar{E}^{(0)}(R)]^m = 0, \quad (39)$$

следующее из соотношений (28), (29) при $k_{\perp} = 0$. Поэтому с учетом (37а), (37б) и (39) можно записать (38) в виде:

$$\frac{[\bar{H}_n^{(1)}(R)]^m}{[\bar{H}_n^{(1)}(R_c)]^m} = \frac{\sqrt{R/R_c}}{(m'+1)c_1^{m'} + c_2^{m'}} = \frac{m'}{\sqrt{R_c R} (R M_1 + m' M_2)}, \quad (40а)$$

$$\frac{R [\bar{H}_{rn}(R)]^m}{[\bar{H}_n^{(1)}(R_c)]^m} = \frac{\sqrt{R/R_c} (m'+1)}{(m'+1)c_1^{m'} + c_2^{m'}} = \frac{m'(m'+1)}{\sqrt{R_c R} (R M_1 + m' M_2)}. \quad (40б)$$

Выражения (38) и (40) связывают амплитуды гармоник магнитного поля на земной поверхности и на границе внешнего ядра (или что эквивалентно, с амплитудами возбуждающих токов на ней, см. (9)). Как видно, амплитуды токов источника могут быть найдены по данным о пространственно-временных гармониках вековых вариаций как горизонтальных компонент (40а), так и вертикальной компоненты (40б) магнитного поля. Однако для единственности определения источника по каждой из формул (40а) или (40б) электропроводность мантии должна быть известной. Физически это связано с тем, что поле на земной поверхности зависит от параметров внутреннего источника, и от электропроводности мантии. Более того, в рассматриваемом случае сферически-симметричной мантии определить ее электропроводность по отношениям парциальных амплитуд компонент магнитного поля на земной поверхности невозможно. Действительно, если исключить $[\bar{H}_n^{(1)}(R_c)]^m$ из соотношений (40а) и (40б), получим выражение:

$$[\bar{H}_n^{(1)}(R)]^m = \frac{R [\bar{H}_{rn}(R)]^m}{(m'+1)},$$

где электропроводность мантии не участвует.

Преодолеть возникшее затруднение оказывается возможным (см. ниже), если для совместного определения параметров источника и электропроводности мантии по соотношениям (40а) или (40б) использовать данные о нескольких временных периодах вариаций.

Возвращаясь к полученным коэффициентам $c_1^{m'}$ и $c_2^{m'}$, можно сказать, что они характеризуют решение рассмотренной задачи о возбуждении джерков тороидальными токами на границе внешнего ядра и определяют ослабление амплитуд гармоник в проводящей мантии. Чем больше значения этих коэффициентов, тем больше ослабевает поле к земной поверхности при одних и тех же токах, возбуждающих джерки. Для наглядности и оценок этих коэффициентов были рассчитаны их зависимости от величин электропроводности мантии, временного периода и степени m' сферических гармоник, которые показаны на рис. 1. Зависимости модулей коэффициентов $c_1^{m'}$ и $c_2^{m'}$ от временного периода построены для сферических гармоник малых степеней m' , указанных над каждым графиком. Как и следовало ожидать, чем больше электропроводность, тем больше ослабление магнитного поля в мантии. Нижние два

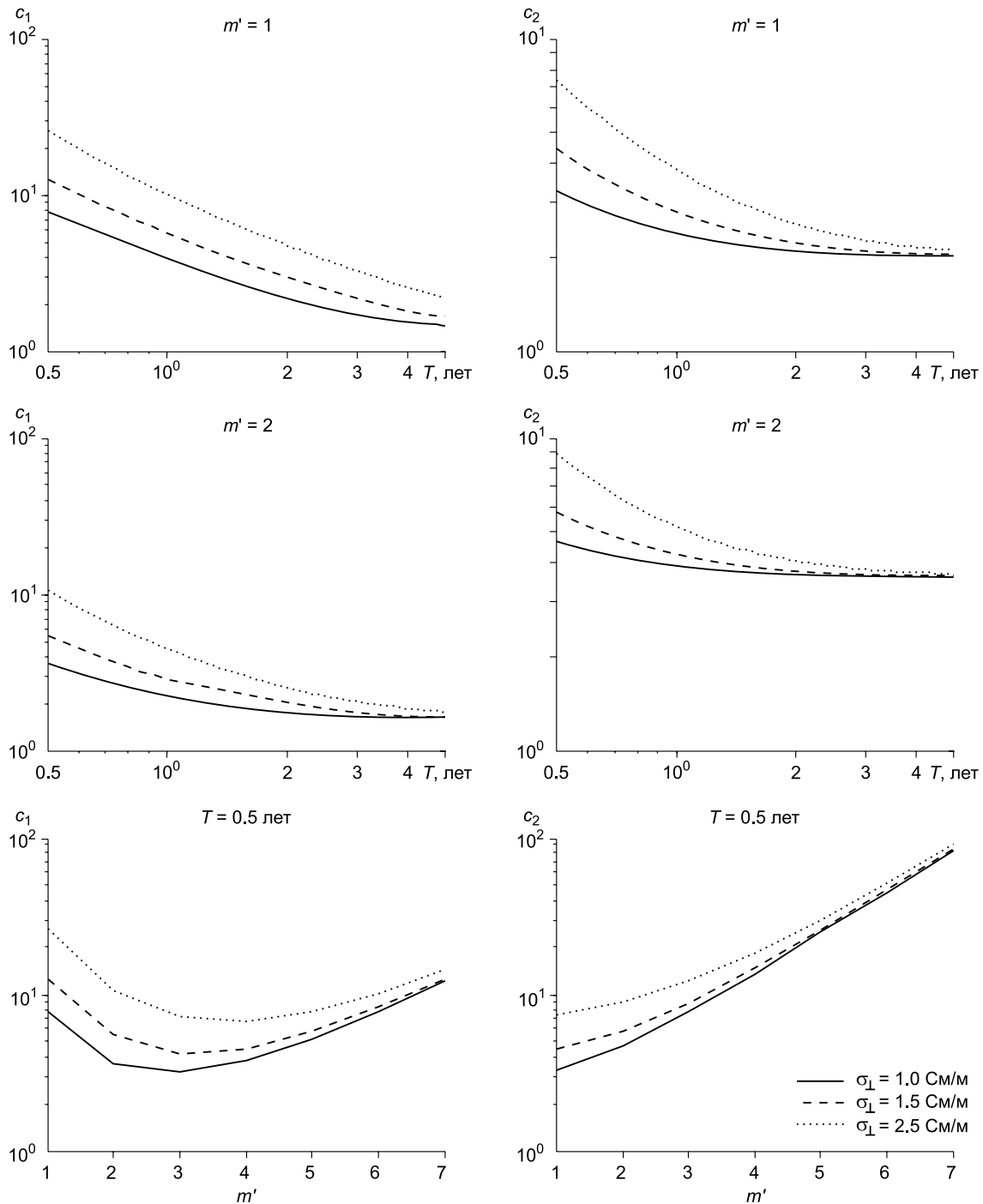


Рис. 1. Модули коэффициентов связи $c_1^{m'}$ и $c_2^{m'}$ амплитуд гармоник магнитного поля на земной поверхности с амплитудами возбуждающих джерки токов на границе внешнего ядра в зависимости от электропроводности мантии, временного периода и степени сферических гармоник m' .

графика на рис. 1 отображают зависимость коэффициентов от степени m' для полугодового временного периода. Интересно заметить, что коэффициенты $c_1^{m'}$ имеют немонотонную зависимость от степени m' . Они начинают расти лишь при $m' > 4$. Диапазон значений m' , временных периодов и величин электропроводности в нижней мантии при расчетах выбран в соответствии с известными моделями [Ballani et al., 2010].

Результирующее (с учетом частотной зависимости коэффициентов $c_1^{m'}$ и $c_2^{m'}$) влияние проводящей мантии на изменения формы вековой вариации в джерке для сферических гармоник степени m' отраже-

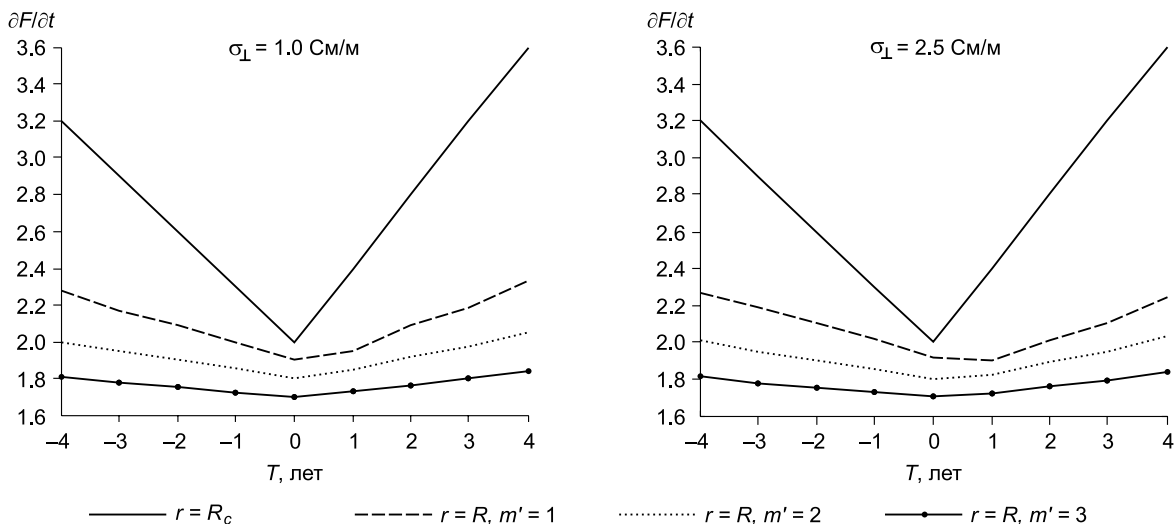


Рис. 2. Изменения формы вековой вариации в период джерка, вызванные влиянием проводящей мантии.

Сплошной линией показана исходная форма вариации на границе внешнего ядра. Остальные линии — формы вариации амплитуд сферических гармоник степени m' на земной поверхности (для наглядности графики сдвинуты вдоль оси ординат).

но на рис. 2. Видно, что с увеличением электропроводности мантии время возникновения джерка на земной поверхности начинает запаздывать по отношению к началу изменений токов на поверхности внешнего ядра Земли. Понятно, что учет зависимости сферической функции от широты и долготы, и тем более представление полей несколькими сферическими гармониками, будет приводить в различных пунктах земной поверхности к формам вековой вариации, заметно отличающимся от исходной ее формы на ядре. Из (1) также следует, что изменения формы вековой вариации в джерке будут отличаться и в разных компонентах магнитного поля.

Данная модель временной зависимости вековой вариации в джерке позволяет также проверить устойчивость и однозначность решения задачи одновременного определения токового источника и электропроводности мантии с помощью оптимизации соотношений (40), взятых для всех частот выбранного временного спектра. Обратная задача ставится следующим образом. На границе внешнего ядра задаются параметры токового источника в виде амплитуд гармоник $[\bar{H}_n^{(1)}(R_c)]^m$, соответствующих той же временной зависимости, что и на рис. 2, и пространственной зависимости, описываемой сферическими гармониками (с $m' \leq 4$). Электропроводность мантии взята $\sigma_{\perp} = 1$ См/м. С помощью соотношений (40а) затем вычисляются амплитуды $[\bar{H}_n^{(1)}(R)]^m$ пространственно-временных вариаций магнитного поля на земной поверхности. К ним добавляется нормальный шум $\sim 3\%$. Так получают синтетические экспериментальные данные (50 сеансов наблюдений).

Обратная задача решается методами оптимизации с целевой функцией, оценивающей относительные отклонения текущих модельных значений $[\bar{H}_n^{(1)}(R)]^m$ от их экспериментальных величин. Об устойчивости полученного решения можно судить по кривым рис. 3. Видно,

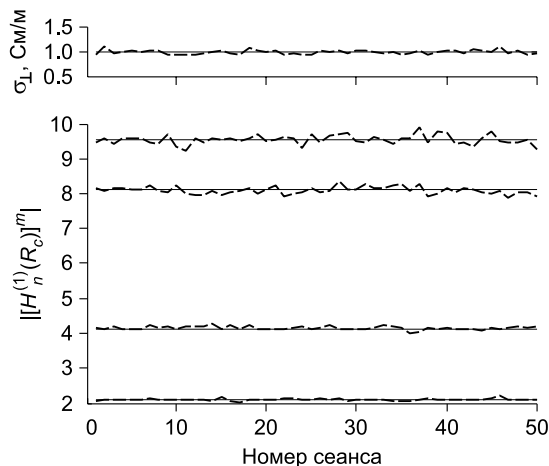


Рис. 3. Результаты совместного определения электропроводности мантии и амплитуд сферических гармоник на границе внешнего ядра для модели токового источника по синтетическим экспериментальным данным о вековой вариации на земной поверхности.

Сплошные линии — модельные значения, штриховые — результаты решения обратной задачи, $m' = 1-4$.

что разброс оценок найденных величин не превышает уровня шума. Это подтверждает высказанную выше возможность совместного определения параметров источника и электропроводности мантии по данным о спектре временных частот.

Считая далее параметры источника известными, в следующем приближении осуществляем уточнение кажущейся электропроводности σ_{\perp} и подбор параметров анизотропии электропроводности мантии. Здесь важную роль играет учет «зацепления» сферических гармоник, поскольку возникают связи их амплитуд, зависящие от степени анизотропии среды.

Напомним, что верхнее граничное условие определяется характеристиками вековых вариаций на земной поверхности и представляется экспериментальными данными наблюдений величин: либо $(\bar{H}_n^{(1)})^m$, либо $(\bar{H}_{rn})^m$.

Если в качестве исходных данных использовать $(\bar{H}_n^{(1)})^m$ и, соответственно, $\left(\frac{\partial \bar{E}_n^{(0)}}{\partial r}\right)^m$ в (37а), то по формуле (34а) можно вычислить модельные значения потенциала $(\bar{E}_n^{(0)})^m$ и по формуле (37б) — модельные значения $(\bar{H}_{rn})^m$. Тогда для решения обратной задачи применяется целевая функция, сравнивающая модельные и экспериментальные значения по вертикальной компоненте $(\bar{H}_{rn})^m$.

Если же брать $(\bar{H}_{rn})^m$ и, соответственно, $(\bar{E}_n^{(0)})^m$ в (37б), то по формуле (34б) вычисляются модельные значения производной потенциала $\left(\frac{\partial \bar{E}_n^{(0)}}{\partial r}\right)^m$ и по формуле (37а) — модельные значения $(\bar{H}_n^{(1)})^m$. В этом случае используется целевая функция, сравнивающая модельные и экспериментальные значения по горизонтальным компонентам $(\bar{H}_n^{(1)})^m$. Выбор того или иного варианта обусловлен удобствами численной реализации алгоритма расчета.

Предварительно необходимо определить по данным о компонентах магнитного поля на земной поверхности параметры моделей джерка $\bar{H}_{rn}(\vartheta, \varphi)$, $\bar{H}_{\vartheta n}(\vartheta, \varphi)$ и $\bar{H}_{\varphi n}(\vartheta, \varphi)$, входящие в (36). Это можно сделать с помощью метода наименьших квадратов как по самим данным, применяя модель (35) и далее временной спектральный анализ, так и по модели (36), основанной на результатах предварительного временного спектрального анализа для каждого пункта наблюдения. К сожалению, пока сведений о конкретных значениях величин, описывающих указанную модель, не имеется.

Для оценки возможного вклада анизотропии электропроводности в характеристики джерков на земной поверхности в явном виде нужны коэффициенты, учитывающие члены в (34а) и (34б), пропорциональные различным компонентам тензора $\bar{\sigma}$. В частности, в (34б) это члены первого приближения $\sim \beta_{mn} \frac{[\bar{E}^{(0)}(R)]^n}{R} g_{mn}$ ($\xi_{R_c} = k_{\perp} R_c$, $\xi_R = k_{\perp} R$, m' и n' степени используемых сферических гармоник при сквозной нумерации [Плоткин и др., 2007]):

$$\beta_{mn} = \int_{\xi_{R_c}}^{\xi_R} \frac{[I_{R_c} K_{m'+1/2}(\xi) - K_{R_c} I_{m'+1/2}(\xi)]^{m'}}{[M_2]^{m'}} \times \\ \times \frac{[I_{R_c} K_{n'+1/2}(\xi) - K_{R_c} I_{n'+1/2}(\xi)]^{n'}}{[M_2]^{n'}} \frac{\xi d\xi}{m'(m'+1)}.$$

Зависимости модулей некоторых ненулевых ($g_{mn} \neq 0$, подробнее см. [Плоткин, 2014]) коэффициентов β_{mn} при небольших степенях сферических гармоник от величин электропроводности мантии и временного периода показаны на рис. 4. Для дальнейших оценок вклада анизотропии мантии в пространственно-временные характеристики магнитного поля джерков на земной поверхности нужны какие-либо эмпирические модели этого поля, которые, к сожалению, пока отсутствуют (например, в работе [Ballani et al., 2010] представлены только оценки распределений по земной поверхности времен

возникновения для джерка 1991 г.). Использование данных мировой сети и существующих моделей геомагнитного поля (например, CM4 [Sabaka et al., 2004] и C³FM [Wardinski, Holme, 2006]) для обработки по описанной схеме предполагается провести в дальнейшем и опубликовать полученные результаты в другой статье.

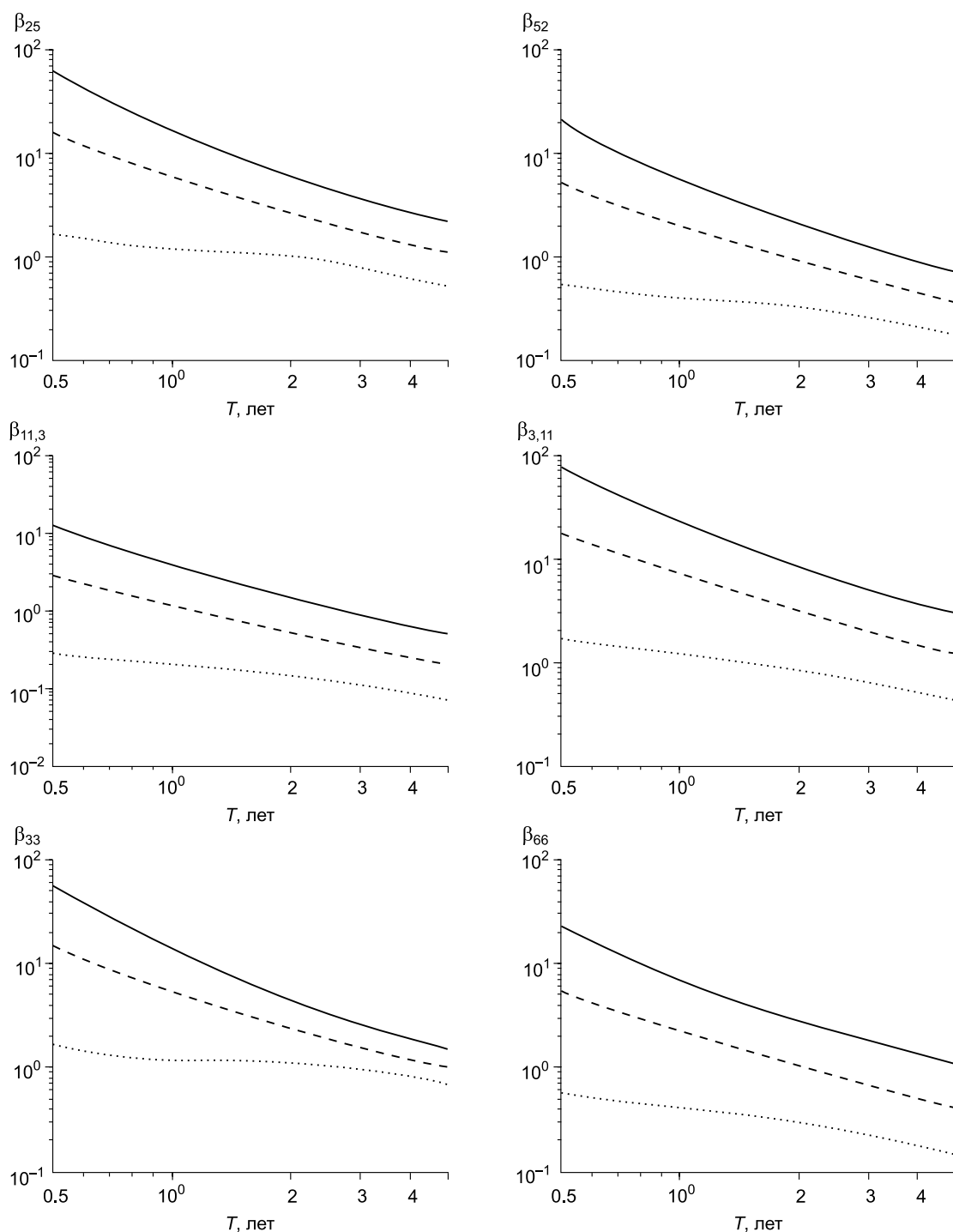


Рис. 4. Модули неравных нулю коэффициентов «зацепления» амплитуд сферических гармоник β_{mn} для анизотропно проводящей мантии в поле джерков на земной поверхности в зависимости от электропроводности и временного периода.

Усл. обозн. см. на рис. 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе джерки привлекаются для выявления анизотропии электропроводности в нижней мантии, обусловленной фазовым переходом магнезиовюстита из полупроводникового состояния в металлическое на глубинах 1500—2000 км. Теоретически изучены возможные особенности их проявлений на поверхности Земли. Задача рассматривалась для случая возбуждения джерков токами во внешнем жидком ядре при распространении их к поверхности через анизотропно проводящий слой в нижней мантии. С применением разложений по сферическим гармоникам получены уравнения для потенциала геомагнитного поля при слабой анизотропии среды.

Рассмотрены варианты решений этих уравнений как в частотном, так и во временном представлении. Получены выражения для коэффициентов связи амплитуд гармоник магнитного поля на земной поверхности и границе внешнего ядра и возбуждающих токов на ней. Построены графики зависимости этих коэффициентов от электропроводности мантии, временного периода и степени сферических гармоник.

Показано, что с увеличением электропроводности мантии время возникновения джерка на земной поверхности начинает запаздывать по отношению к началу изменений токов на поверхности внешнего ядра Земли. Представление полей несколькими сферическими гармониками приводит в различных пунктах земной поверхности к формам вековой вариации, существенно отличающимся от исходной формы на ядре. Кроме того, изменения формы вековой вариации в джерке отличаются и для разных компонент магнитного поля.

Установлена возможность устойчивого и однозначного решения задачи совместного определения токового источника и электропроводности мантии по наземным данным о пространственно-временных изменениях вековой вариации геомагнитного поля в периоды джерков.

Намечены пути решения обратной задачи для получения оценок анизотропии по данным о распределении характеристик джерков на поверхности. Получены аналитические выражения коэффициентов связи амплитуд сферических гармоник для анизотропно проводящей мантии в поле джерков на земной поверхности и построены графики их зависимости от электропроводности и временного периода.

Показано также, что поле магнитной моды не зависит от величины электропроводности σ_0 в радиальном направлении. Для получения дополнительной информации о компонентах тензора электропроводности в мантии можно было бы привлечь поля электрической моды $E^{(1)}$ и E_r , но для этого необходимо на станциях мировой сети регистрировать также данные о горизонтальных компонентах электрического поля.

Работа выполнена в рамках междисциплинарного интеграционного проекта № 96 СО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

Овчинников С.Г. Металлизация и спиновый кроссовер при высоком давлении в магнезиовюстите ($Mg_{1-x}Fe_xO$) // Письма в ЖЭТФ, 2011, т. 94, № 3, с. 210—214.

Паркинсон У. Введение в геомагнетизм. М., Мир, 1986, 528 с.

Плоткин В.В. Глобальная электромагнитная индукция в анизотропно проводящей мантии // Геология и геофизика, 2014, т. 55 (10), с. 1550—1563.

Плоткин В.В., Белинская А.Ю., Гаврыш П.А. О возможностях оценки латеральной неоднородности верхней мантии с помощью глобального магнитовариационного зондирования // Геология и геофизика, 2007, т. 48 (7), с. 798—810.

Плоткин В.В., Дядьков П.Г., Овчинников С.Г. Возможный вклад фазового перехода магнезиовюстита в нижней мантии Земли в геомагнитные данные // Геология и геофизика, 2013, т. 54 (3), с. 345—356.

Плоткин В.В., Дядьков П.Г., Овчинников С.Г. Выявление фазового перехода магнезиовюстита в нижней мантии: инверсия геомагнитных данных // Геология и геофизика, 2014, т. 55 (9), с. 1436—1445.

Плоткин В.В., Дядьков П.Г., Овчинников С.Г. Оценки тензора анизотропии электропроводности в нижней мантии по геомагнитным данным // Геология и геофизика, 2015, т. 56 (12) с. 2240—2249.

Alexandrescu M., Gibert D., Le Mouel J.L., Hulot G., Saracco G. An estimate of average lower mantle conductivity by wavelet analysis of geomagnetic jerks // J. Geophys. Res., 1999, v. 104, № B8, p. 17735—17745.

Ballani L., Greiner-Mai H., Stromeyer D. Determining the magnetic field in the core—mantle boundary zone by non-harmonic downward continuation // Geophys. J. Int., 2002, v. 149, № 2, p. 374—389.

Ballani L., Hagedoorn J.M., Wardinski I., Stromeyer D., Greiner-Mai H. The 1991 geomagnetic jerk as seen at the Earth's surface and the core-mantle boundary // Geophys. J. Int., 2010, v. 183, № 2, p. 659—680.

Chambodut A., Manda M. Evidence for geomagnetic jerks in comprehensive models // Earth Planets Space, 2005, v. 57, № 2, p. 139—149.

Nagao H., Iyemori T., Higuchi T., Araki T. Lower mantle conductivity anomalies estimated from geomagnetic jerks // J. Geophys. Res., 2003, v. 108, № B5, p. EPM 8.1—8.18.

Ovchinnikov S.G., Ovchinnikova T.M., Dyad'kov P.G., Plotkin V.V., Litasov K.D. Metallic layer inside the Earth's lower mantle // JETP Lett., 2012, v. 96, № 2, p. 135—138.

Pinheiro K., Jackson A. Can a 1D mantle electrical conductivity model generate magnetic jerk differential time delays? // Geophys. J. Int., 2008, v. 173, № 3, p. 781—792.

Sabaka T., Olsen N., Purucker M.E. Extending comprehensive models of the Earth's magnetic field with Ørsted and CHAMP data // Geophys. J. Int., 2004, v. 159, № 2, p. 521—547.

Wardinski I., Holme R. A time-dependent model of the Earth's magnetic field and its secular variation for the period 1980 to 2000 // J. Geophys. Res., 2006, v. 111, № B12, p. 101.

Xu Y., Shankland T.J., Poe B.T. Laboratory-based electrical conductivity in the Earth's mantle // J. Geophys. Res., 2000, v. 105, № B12, p. 27865—27875.

*Рекомендована к печати 28 мая 2015 г.
М.И. Эповым*

*Поступила в редакцию 10 сентября 2014 г.,
после доработки — 2 апреля 2015 г.*