

УДК 519.676

Точное вычисление погрешности аппроксимации кратных стохастических интегралов Ито*

К.А. Рыбаков

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Волоколамское шоссе, д. 4, Москва, 125993

E-mail: rkoffice@mail.ru

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 16, 2023.

Рыбаков К.А. Точное вычисление погрешности аппроксимации кратных стохастических интегралов Ито // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 2. — С. 205–213.

В статье представлены формулы для точного вычисления погрешности аппроксимации кратных стохастических интегралов Ито на основе их ортогонального разложения. В качестве примера рассмотрены стохастические интегралы Ито кратностей 2–4, которые используются при построении численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений с порядками сильной сходимости 1–2.

DOI: 10.15372/SJNM20230207

Ключевые слова: *аппроксимация, ортогональное разложение, кратный стохастический интеграл, численный метод, стохастические дифференциальные уравнения.*

Rybakov K.A. Exact calculation of the approximation error of multiple Itô stochastic integrals // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 2. — P. 205–213.

In the article, formulas for exact calculation of the approximation error of multiple Itô stochastic integrals based on their orthogonal expansion are obtained. As an example, stochastic Itô integrals with multiplicities 2–4 are considered, which are used in the numerical methods for solving stochastic differential equations with orders of strong convergence 1–2.

Keywords: *approximation, orthogonal expansion, multiple stochastic integral, numerical method, stochastic differential equations.*

1. Введение

При применении численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений на основе разложений Тейлора–Ито возникает необходимость моделирования повторных стохастических интегралов определенного вида [1–4]. Один из подходов основан на переходе от повторных стохастических интегралов к кратным с последующим представлением их ядер в виде частичных сумм ортогональных рядов [4]. В [5] получены ортогональное разложение кратного стохастического интеграла Ито и точное выражение его второго момента через квадрат нормы соответствующим образом симметризованного ядра. Этот результат позволяет вывести точные формулы для вычисления погрешности аппроксимации таких интегралов при условии, что ядра представляются в виде частичных сумм ортогональных рядов. Их вид отличается от формул, приведенных в [4], однако

*Работа была представлена на международной конференции “Марчуковские научные чтения – 2022”.

можно показать эквивалентность представленного здесь результата и формул из [4]. Эти результаты необходимы и для точного вычисления погрешности аппроксимации кратных стохастических интегралов Стратоновича, поскольку последние представляются в виде суммы кратных стохастических интегралов Ито, причем эта сумма дает ортогональное разложение [6]. В качестве примера вычислены погрешности аппроксимации некоторых типовых повторных стохастических интегралов Ито кратностей 2–4 при использовании пяти базисных систем: полиномов Лежандра, косинусоид, функций Уолша и Хаара, тригонометрических функций. Ранее аналогичные расчеты проводились только для полиномов Лежандра и тригонометрических функций [7].

2. Представление кратных стохастических интегралов Ито

Введем линейный оператор ${}^I\mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(j_1 \dots j_k)}: L_2(\mathbf{T}^k) \rightarrow \mathcal{L}_2$, ставящий в соответствие функции $f(\cdot)$ кратный стохастический интеграл Ито по винеровским процессам (интеграл кратности k , $\mathbf{T} = [t_0, T]$):

$${}^I\mathcal{J}_{\mathbf{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = \int_{\mathbf{T}^k} f(t_1, \dots, t_k) dW_{j_1}(t_1) \cdots dW_{j_k}(t_k), \quad (1)$$

где $j_1, \dots, j_k = 1, 2, \dots, s$ (s — заданное натуральное число), $W_1(\cdot), \dots, W_s(\cdot)$ — независимые стандартные винеровские процессы, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P})$. Здесь $L_2(\mathbf{T}^k)$ — пространство квадратично интегрируемых функций k переменных [8], $\mathcal{L}_2$ — пространство гильбертовых случайных величин [9].

Важно отметить, что если $j_l = j_m$ для некоторых $l, m \in \{1, 2, \dots, s\}$, т. е. два винеровских процесса $W_{j_l}(\cdot)$ и $W_{j_m}(\cdot)$ совпадают, то совпадают и кратные стохастические интегралы от функции $f(\cdot)$ и функции, которая получается из $f(\cdot)$ перестановкой ее аргументов с номерами l и m . Более того, можно задать отношение эквивалентности в пространстве $L_2(\mathbf{T}^k)$ и выделить классы эквивалентности, образованные функциями, для которых кратные стохастические интегралы Ито совпадают.

Определим множество $J = \{j_1, \dots, j_k\}$, а упорядоченный набор $(j_1 \dots j_k)$ (кортеж, мультииндекс) будем обозначать $\bar{J}$ и рассматривать его как мультимножество — множество, которое может содержать одинаковые элементы, $\#(j, \bar{J})$ — кратность элемента j в мультимножестве $\bar{J}$. Также будем использовать обозначение $|\cdot|$ для количества разных элементов множеств или всех элементов мультимножеств: $|J| \leq k$, $|\bar{J}| = k$ ($|\bar{J}|$ — размерность кортежа). Например, пусть $k = 4$, $s = 5$ и $\bar{J} = (2521)$, тогда

$$J = \{1, 2, 5\}, \quad |J| = 3, \quad |\bar{J}| = 4, \quad \#(1, \bar{J}) = 1, \quad \#(2, \bar{J}) = 2, \quad \#(5, \bar{J}) = 1.$$

Введем отношение эквивалентности “ $\sim$ ” для переменных из множества $\mathbf{T} = \{t_1, \dots, t_k\}$:

$$t_l \sim t_m \iff j_l = j_m, \quad l, m = 1, \dots, k,$$

и обозначим через $\mathbf{T}/\sim$ множество всех классов эквивалентности $\mathbf{T}_j$, $j \in J$:

$$\mathbf{T} = \bigcup_{j \in J} \mathbf{T}_j, \quad \mathbf{T}_{j_l} \cap \mathbf{T}_{j_m} = \emptyset \quad \forall j_l, j_m \in J: j_l \neq j_m.$$

Далее будем использовать обозначение $\sum_{(\mathbf{T}/\sim)}$, которое предполагает суммирование функций по всем перестановкам переменных в каждом классе эквивалентности $\mathbf{T}_j$, $j \in J$.

Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$. Определим функцию $f_{\bar{J}}(\cdot)$ с помощью симметризации:

$$f_{\bar{J}}(t_1, \dots, t_k) = \langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}} = \frac{1}{M_{\bar{J}}^2} \sum_{(\mathbf{T}/\sim)} f(t_1, \dots, t_k), \quad (2)$$

где величина $M_{\bar{J}}^2$ равна числу слагаемых в правой части выражения (2):

$$M_{\bar{J}}^2 = \prod_{j \in J} (\#(j, \bar{J}))!. \quad (3)$$

В примере, приведенном выше, классы эквивалентности для множества $\mathbf{T} = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ определяются следующим образом:

$$\mathbf{T}_1 = \{t_4\}, \quad \mathbf{T}_2 = \{t_1, t_3\}, \quad \mathbf{T}_5 = \{t_2\},$$

и

$$M_{\bar{J}}^2 = 1!2!1! = 2, \quad f_{\bar{J}}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{f(t_1, t_2, t_3, t_4) + f(t_3, t_2, t_1, t_4)}{2}.$$

Для функции $f_{\bar{J}}(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ справедлива следующая оценка нормы:

$$\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \left\| \frac{1}{M_{\bar{J}}^2} \sum_{(\mathbf{T}/\sim)} f(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{T}^k)} \leq \frac{1}{M_{\bar{J}}^2} \sum_{(\mathbf{T}/\sim)} \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}. \quad (4)$$

Симметризованные функции (2) образуют линейное подпространство в $L_2(\mathbb{T}^k)$, которое будем обозначать $L_2^{s(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$, симметризирующий оператор $\langle \cdot \rangle_{\bar{J}}: L_2(\mathbb{T}^k) \rightarrow L_2^{s(j_1 \dots j_k)}(\mathbb{T}^k)$ является линейным ограниченным оператором, его норма равна единице, что следует из оценки (4). Если значения $j_1, \dots, j_k$ попарно различны, т.е. $|J| = k$, то $\langle \cdot \rangle_{\bar{J}}$ — это тождественный оператор. Кратные интегралы Ито ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot)$ и ${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} g(\cdot)$ совпадают, если $\langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}} = \langle g(\cdot) \rangle_{\bar{J}}$.

Введем коммутативную бинарную операцию “*” для двух случайных величин $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{L}_2$ вида

$$\xi_1 = \prod_{m=1}^M H_{i_m}(\zeta_m), \quad \xi_2 = \prod_{m=1}^M H_{j_m}(\zeta_m)$$

следующим образом (произведение Вика [10]):

$$\xi_1 * \xi_2 = \prod_{m=1}^M H_{i_m + j_m}(\zeta_m), \quad (5)$$

где $M \geq 1$, $\{H_i(\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — полиномы Эрмита, ортогональные относительно плотности вероятности нормального распределения с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$, $\zeta_1, \dots, \zeta_M$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_m, j_m \in \{0, 1, 2, \dots\}$. В частности,

$$\begin{aligned} \zeta &= H_1(\zeta), & \zeta * \zeta &= H_2(\zeta) = \zeta^2 - 1, \\ \zeta * \zeta * \zeta &= H_3(\zeta) = \zeta^3 - 3\zeta, & \zeta * \zeta * \zeta * \zeta &= H_4(\zeta) = \zeta^4 - 6\zeta^2 + 3 \end{aligned}$$

и т. д.

Теорема [5]. Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ и $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ — базисная система пространства $L_2(\mathbb{T})$. Тогда

1) кратный стохастический интеграл Ито по винеровским процессам от функции $f(\cdot)$ представляется в виде

$${}^I\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{\infty} F_{i_1 \dots i_k} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}, \quad (6)$$

где $F_{i_1 \dots i_k}$ — коэффициенты разложения функции $f(\cdot)$ относительно базисной системы $\{q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot)\}_{i_1, \dots, i_k=0}^\infty$:

$$\begin{aligned} F_{i_1 \dots i_k} &= (q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot), f(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^k)} \\ &= \int_{\mathbb{T}^k} q(i_1, t_1) \dots q(i_k, t_k) f(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k, \quad i_1, \dots, i_k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

$\zeta_{i_l}^{(j_l)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_l = 0, 1, 2, \dots$ и $l = 1, \dots, k$;

2) норма кратного стохастического интеграла Ито удовлетворяет соотношению

$$\|{}^I\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2} = M_{\bar{J}} \|\langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}}\|_{L_2(\mathbb{T}^k)} \leq M_{\bar{J}} \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}, \quad (8)$$

где величина $M_{\bar{J}}$ определяется формулой (3), $\langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}}$ — симметризованная функция (2).

В части разложения (6) эта теорема аналогична одному из основных результатов в [4], но в дополнение предлагает более компактную запись на основе произведения Вика и устанавливает соотношение между нормой кратного стохастического интеграла Ито и нормой его симметризованного ядра, или между вторым начальным моментом кратного стохастического интеграла Ито и квадратом нормы симметризованного ядра.

3. Аппроксимация кратных стохастических интегралов Ито

Предположим, что $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ и выполняется приближенное равенство

$$\tilde{f}(t_1, \dots, t_k) \approx \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{L-1} F_{i_1 \dots i_k} q(i_1, t_1) \dots q(i_k, t_k), \quad (9)$$

где величина L задана, $F_{i_1 \dots i_k}$ — коэффициенты разложения (7). Тогда

$$\|f(\cdot) - \tilde{f}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 = \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 - \|F\|^2, \quad \|F\|^2 = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{L-1} F_{i_1 \dots i_k}^2, \quad (10)$$

и согласно теореме справедливо разложение (6):

$${}^I\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) \approx {}^I\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \tilde{f}(\cdot) = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{L-1} F_{i_1 \dots i_k} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \dots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}, \quad (11)$$

где $\zeta_{i_l}^{(j_l)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $l = 1, \dots, k$.

Среднеквадратическая погрешность аппроксимации кратного стохастического интеграла Ито определяется точно по формуле (8):

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 \dots j_k)} &= E \left(I_{\mathcal{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) - I_{\mathcal{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \tilde{f}(\cdot) \right)^2 = E \left(I_{\mathcal{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} (f(\cdot) - \tilde{f}(\cdot)) \right)^2 \\ &= M_{\bar{J}}^2 \| \langle f(\cdot) - \tilde{f}(\cdot) \rangle_{\bar{J}} \|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 = M_{\bar{J}}^2 \| \langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}} - \langle \tilde{f}(\cdot) \rangle_{\bar{J}} \|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2, \end{aligned}$$

где $\langle \cdot \rangle_{\bar{J}}$ — симметризирующий оператор.

Пусть $f_{\bar{J}}(\cdot) = \langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}}$ и $\tilde{f}_{\bar{J}}(\cdot) = \langle \tilde{f}(\cdot) \rangle_{\bar{J}}$ — соответствующие симметризованные функции (2), а $\tilde{F}_{i_1 \dots i_k}$ — коэффициенты разложения (7) функции $f_{\bar{J}}(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{i_1 \dots i_k} &= (q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot), f_{\bar{J}}(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \left(q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot), \frac{1}{M_{\bar{J}}^2} \sum_{(\mathbf{I}/\sim)} f(\cdot) \right)_{L_2(\mathbb{T}^k)} \\ &= \frac{1}{M_{\bar{J}}^2} \sum_{(\mathbf{I}/\sim)} (q(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes q(i_k, \cdot), f(\cdot))_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \frac{1}{M_{\bar{J}}^2} \sum_{(\mathbf{I}/\sim)} F_{i_1 \dots i_k}, \end{aligned} \quad (12)$$

где обозначение $\sum_{(\mathbf{I}/\sim)}$ предполагает суммирование коэффициентов разложения по всем перестановкам индексов $\mathbf{I} = \{i_1, \dots, i_k\}$ в каждом классе эквивалентности $\mathbf{I}_j$, которые определяются аналогично классам эквивалентности $\mathbf{T}_j$, $j \in J$. Вообще говоря, коэффициенты разложения $\tilde{F}_{i_1 \dots i_k}$ зависят от мультимножества $\bar{J} = (j_1 \dots j_k)$, но эта зависимость явно не указана для упрощения обозначений. Тогда, используя формулу (10), находим

$$I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 \dots j_k)} = M_{\bar{J}}^2 \left(\|f_{\bar{J}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 - \|\tilde{F}_{\bar{J}}\|^2 \right), \quad \|\tilde{F}_{\bar{J}}\|^2 = \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{L-1} \tilde{F}_{i_1 \dots i_k}^2. \quad (13)$$

На основе неравенства (4) можно предложить следующую оценку среднеквадратической погрешности аппроксимации кратного стохастического интеграла Ито:

$$I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 \dots j_k)} \leq M_{\bar{J}}^2 \left(\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 - \|F\|^2 \right) \leq k! \left(\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 - \|F\|^2 \right).$$

В этой оценке правая часть не зависит от значений $j_1, \dots, j_k$.

Возможна ситуация, когда коэффициенты разложения (7) функции $f(\cdot)$ найдены неточно (обозначим их $\bar{F}_{i_1 \dots i_k}$) и

$$\begin{aligned} \|f(\cdot) - \bar{f}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 &= \|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 - \|F\|^2 + \|F - \bar{F}\|^2, \\ \|F - \bar{F}\|^2 &= \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{L-1} (F_{i_1 \dots i_k} - \bar{F}_{i_1 \dots i_k})^2, \end{aligned} \quad (14)$$

тогда при использовании формулы (12) неточно будут найдены и коэффициенты разложения симметризованной функции $f_{\bar{J}}(\cdot)$. Введем для них обозначение $\tilde{F}_{i_1 \dots i_k}^*$. Далее остается применить формулу (14) для среднеквадратической погрешности аппроксимации:

$$I_{\varepsilon_f}^{W(j_1 \dots j_k)} = E \left(I_{\mathcal{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} f(\cdot) - I_{\mathcal{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \tilde{f}(\cdot) \right)^2 = M_{\bar{J}}^2 \| \langle f(\cdot) \rangle_{\bar{J}} - \langle \tilde{f}(\cdot) \rangle_{\bar{J}} \|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon_f}^W(j_1 \dots j_k) &= M_{\tilde{f}}^2 \left(\|f_{\tilde{f}}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 - \|\tilde{F}_{\tilde{f}}\|^2 + \|\tilde{F}_{\tilde{f}} - \tilde{F}_{\tilde{f}}^*\|^2 \right), \\ \|\tilde{F}_{\tilde{f}} - \tilde{F}_{\tilde{f}}^*\|^2 &= \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^{L-1} (\tilde{F}_{i_1 \dots i_k} - \tilde{F}_{i_1 \dots i_k}^*)^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Кроме того, справедлива следующая оценка среднеквадратической погрешности аппроксимации:

$$I_{\varepsilon_f}^W(j_1 \dots j_k) \leq M_{\tilde{f}}^2 \left(\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 - \|F\|^2 + \|F - \bar{F}\|^2 \right) \leq k! \left(\|f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T}^k)}^2 - \|F\|^2 + \|F - \bar{F}\|^2 \right).$$

4. Вычислительный эксперимент

Вычислим погрешности аппроксимации стохастических интегралов Ито кратностей $k = 2, 3, 4$ для функций:

$$\begin{aligned} \mathbb{k}(t_1, t_2) &= 1(t_2 - t_1), \quad \mathbb{k}(t_1, t_2, t_3) = 1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2), \\ \mathbb{k}(t_1, t_2, t_3, t_4) &= 1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2)1(t_4 - t_3), \end{aligned}$$

где $1(\cdot)$ — единичная ступенчатая функция, полагая $t_0 = 0$, $T = 1$ и выбирая в качестве базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ пространства $L_2(\mathbb{T})$ полиномы Лежандра $\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$, косинусоиды $\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$, функции Уолша $\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$, функции Хаара $\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ и тригонометрические функции $\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$. Все перечисленные базисные системы приведены, например, в [11].

Отметим, что кратные стохастические интегралы Ито $I_{\mathcal{T}}^W(j_1 j_2) \mathbb{k}(\cdot)$, $I_{\mathcal{T}}^W(j_1 j_2 j_3) \mathbb{k}(\cdot)$ и $I_{\mathcal{T}}^W(j_1 j_2 j_3 j_4) \mathbb{k}(\cdot)$ — это повторные стохастические интегралы Ито, которые используются при построении численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений с порядками сильной сходимости 1–2 [4].

Результаты вычислений по формуле (13), т. е. при точном нахождении коэффициентов разложения функций $\mathbb{k}(\cdot)$, указаны в таблицах 1–5. Таблицы 1, 2 и 4 соответствуют кратным стохастическим интегралам Ито относительно независимых винеровских процессов, а табл. 3 и 5 соответствуют кратным стохастическим интегралам Ито относительно винеровских процессов, часть из которых совпадают. В таблицах приведены абсолютные и относительные значения погрешности аппроксимации. Анализ полученных результатов показывает, что наибольшую точность аппроксимации обеспечивают косинусоиды. Далее следуют полиномы Лежандра, обеспечивающие погрешность, примерно в два раза меньшую по сравнению с функциями Уолша и функциями Хаара. Тригонометрические функции либо немного лучше, либо немного хуже функций Уолша и Хаара. Для сравнения важно, что среднеквадратическая погрешность аппроксимации, соответствующая функциям Уолша и Хаара, совпадает с погрешностью, которую обеспечивает численное интегрирование с шагом $h = 1/L$ при условии $L = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Увеличение величины L в два раза приводит к уменьшению погрешности аппроксимации примерно в два раза. Аналогичный вывод справедлив для любых вариантов задания величин $j_1, \dots, j_k$ (результаты вычислений для части вариантов в статье не приведены из-за ограничений на объем).

Таблица 1. Погрешности аппроксимации $I_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_2)}$ ($k = 2, j_1 \neq j_2$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.035714(7.14%)	0.016667(3.33%)	0.008065(1.61%)	0.003968(0.79%)	0.001969(0.39%)
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.034075(6.81%)	0.014937(2.99%)	0.006936(1.39%)	0.003328(0.67%)	0.001627(0.33%)
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.062500(12.50%)	0.031250(6.25%)	0.015625(3.13%)	0.007813(1.56%)	0.003906(0.78%)
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.062500(12.50%)	0.031250(6.25%)	0.015625(3.12%)	0.007812(1.56%)	0.003906(0.78%)
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.072688(14.54%)	0.036803(7.36%)	0.018651(3.73%)	0.009406(1.88%)	0.004725(0.95%)

Таблица 2. Погрешности аппроксимации $I_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_2 j_3)}$ ($k = 3; j_1, j_2, j_3$ различны)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.036141(21.68%)	0.016948(10.17%)	0.008180(4.91%)	0.004008(2.41%)	0.001981(1.19%)
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.033988(20.39%)	0.015055(9.03%)	0.006996(4.20%)	0.003350(2.01%)	0.001634(0.98%)
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.055556(33.33%)	0.029514(17.71%)	0.015191(9.11%)	0.007704(4.62%)	0.003879(2.33%)
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.055556(33.33%)	0.029514(17.71%)	0.015191(9.11%)	0.007704(4.62%)	0.003879(2.33%)
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.050378(30.23%)	0.025162(15.10%)	0.012636(7.58%)	0.006334(3.80%)	0.003169(1.90%)

Таблица 3. Погрешности аппроксимации $I_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_2 j_1)}$ ($k = 3, j_1 = j_3 \neq j_2$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.036568(21.94%)	0.017229(10.34%)	0.008295(4.98%)	0.004048(2.43%)	0.001994(1.20%)
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.034092(20.46%)	0.015199(9.12%)	0.007059(4.24%)	0.003373(2.02%)	0.001641(0.98%)
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.053819(32.29%)	0.029080(17.45%)	0.015082(9.05%)	0.007677(4.61%)	0.003872(2.32%)
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.053819(32.29%)	0.029080(17.45%)	0.015082(9.05%)	0.007677(4.61%)	0.003872(2.32%)
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.048076(28.85%)	0.024732(14.84%)	0.012574(7.54%)	0.006331(3.80%)	0.003172(1.90%)

Таблица 4. Погрешности аппроксимации $I_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)}$ ($k = 4; j_1, j_2, j_3, j_4$ различны)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.017174(41.22%)	0.008390(20.14%)	0.004096(9.83%)	0.002012(4.83%)	0.000994(2.39%)
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.016013(38.43%)	0.007428(17.83%)	0.003495(8.39%)	0.001679(4.03%)	0.000819(1.97%)
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.023248(55.79%)	0.013513(32.43%)	0.007270(17.45%)	0.003769(9.05%)	0.001919(4.60%)
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.023248(55.79%)	0.013513(32.43%)	0.007270(17.45%)	0.003769(9.05%)	0.001919(4.60%)
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.020123(48.30%)	0.010404(24.97%)	0.005269(12.65%)	0.002645(6.35%)	0.001323(3.18%)

Таблица 5. Погрешности аппроксимации $I_{\varepsilon_k}^{W(j_1 j_1 j_3 j_3)}$ ($k = 4, j_1 = j_2 \neq j_3 = j_4$)

Базис	$L = 4$	$L = 8$	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$
$\{\hat{P}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.006660(15.98%)	0.003207(7.70%)	0.001555(3.73%)	0.000760(1.82%)	0.000375(0.90%)
$\{\hat{C}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.005424(13.02%)	0.002447(5.87%)	0.001150(2.76%)	0.000554(1.33%)	0.000271(0.65%)
$\{\hat{W}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.009657(23.18%)	0.005005(12.01%)	0.002552(6.12%)	0.001289(3.09%)	0.000648(1.55%)
$\{\hat{X}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.009657(23.18%)	0.005005(12.01%)	0.002552(6.12%)	0.001289(3.09%)	0.000648(1.55%)
$\{\hat{F}(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$	0.011005(26.41%)	0.005863(14.07%)	0.003047(7.31%)	0.001555(3.73%)	0.000785(1.88%)

Литература

1. **Kloeden P.E., Platen E.** Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. — Springer, 1999.
2. **Milstein G.N., Tretyakov M.V.** Stochastic Numerics for Mathematical Physics. — Springer-Verlag, 2004.
3. **Аверина Т.А.** Статистическое моделирование решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2019.
4. **Kuznetsov D.F.** Mean-square approximation of iterated Itô and Stratonovich stochastic integrals: method of generalized multiple Fourier series. Application to numerical integration of Itô SDEs and semilinear SPDEs // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2021. — № 4. — Р. А.1–А.788.
5. **Рыбаков К.А.** Ортогональное разложение кратных стохастических интегралов Ито // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2021. — № 3. — С. 109–140.
6. **Рыбаков К.А.** Ортогональное разложение кратных стохастических интегралов Стратоновича // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2021. — № 4. — С. 81–115.
7. **Кузнецов Д.Ф.** Сравнительный анализ эффективности применения полиномов Лежандра и тригонометрических функций к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений Ито // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2019. — Т. 59, № 8. — С. 1299–1313. Перевод: Kuznetsov D.F. A comparative analysis of efficiency of using the Legendre polynomials and trigonometric functions for the numerical solution of Ito stochastic differential equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2019. — Vol. 59, № 8. — Р. 1236–1250.
8. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
9. **Гихман И.И., Скороход А.В.** Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977.
10. **Добрушин Р.Л., Минлос Р.А.** Полиномы от линейных случайных функций // Успехи математических наук. — 1977. — Т. 32, № 2(194). — С. 67–122. Перевод: Dobrushin R.L., Minlos R.A. Polynomials in linear random functions // Russian Mathematical Surveys. — 1977. — Vol. 32, № 2. — Р. 71–127.
11. **Рыбаков К.А.** Применение спектральной формы математического описания для представления повторных стохастических интегралов // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2019. — № 4. — С. 1–31.

Поступила в редакцию 25 октября 2022 г.

После исправления 16 ноября 2022 г.

Принята к печати 30 января 2023 г.

Литература в транслитерации

1. **Kloeden P.E., Platen E.** Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. — Springer, 1999.
2. **Milstein G.N., Tretyakov M.V.** Stochastic Numerics for Mathematical Physics. — Springer-Verlag, 2004.
3. **Averina T.A.** Statisticheskoe modelirovanie reshenii stokhasticheskikh differentsial'nykh uravnenii i sistem so sluchainoi strukturoi. — Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2019.
4. **Kuznetsov D.F.** Mean-square approximation of iterated Itô and Stratonovich stochastic integrals: method of generalized multiple Fourier series. Application to numerical integration of

- Itô SDEs and semilinear SPDEs // *Differentsial'nye uravneniya i protsessy upravleniya*. — 2021. — № 4. — P. A.1–A.788.
5. **Rybakov K.A.** Ortogonal'noe razlozhenie kratnykh stokhasticheskikh integralov Ito // *Differentsial'nye uravneniya i protsessy upravleniya*. — 2021. — № 3. — S. 109–140.
 6. **Rybakov K.A.** Ortogonal'noe razlozhenie kratnykh stokhasticheskikh integralov Stratonovicha // *Differentsial'nye uravneniya i protsessy upravleniya*. — 2021. — № 4. — S. 81–115.
 7. **Kuznetsov D.F.** Sravnitel'nyi analiz effektivnosti primeneniya polinomov Lezhandra i trigonometricheskikh funktsii k chislennomu integrirovaniyu stokhasticheskikh differentsial'nykh uravnenii Ito // *Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki*. — 2019. — T. 59, № 8. — S. 1299–1313.
Perevod: Kuznetsov D.F. A comparative analysis of efficiency of using the Legendre polynomials and trigonometric functions for the numerical solution of Ito stochastic differential equations // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2019. — Vol. 59, № 8. — P. 1236–1250.
 8. **Kolmogorov A.N., Fomin S.V.** *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza*. — M.: Nauka, 1976.
 9. **Gikhman I.I., Skorokhod A.V.** *Vvedenie v teoriyu sluchainykh protsessov*. — M.: Nauka, 1977.
 10. **Dobrushin R.L., Minlos R.A.** Polinomy ot lineinykh sluchainykh funktsii // *Uspekhi matematicheskikh nauk*. — 1977. — T. 32, № 2(194). — S. 67–122.
Perevod: Dobrushin R.L., Minlos R.A. Polynomials in linear random functions // *Russian Mathematical Surveys*. — 1977. — Vol. 32, № 2. — P. 71–127.
 11. **Rybakov K.A.** Primenenie spektral'noi formy matematicheskogo opisaniya dlya predstavleniya povtornykh stokhasticheskikh integralov // *Differentsial'nye uravneniya i protsessy upravleniya*. — 2019. — № 4. — S. 1–31.

