

КОМБИНИРОВАННЫЙ ПОДХОД ПРИ АНАЛИЗЕ ПРОЦЕССА ВЫПУЧИВАНИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ЗАДАННЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

УДК 539.3

Н. С. Астапов, В. М. Корнев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск

Неизбежные начальные неправильности, возникающие при изготовлении конструкций, или возмущения при нагружении вызывают преждевременную потерю устойчивости (по сравнению с нагрузкой Эйлера) упругих конструкций и являются основной причиной разброса экспериментальных данных. Исследованиям в этой области посвящено много работ (см., например, [1, 2]).

В данной работе на примере изучения выпучивания замкнутых идеальных цилиндрических оболочек при поперечном или гидростатическом нагружении с учетом малых возмущений излагается комбинированный (численно-аналитический) подход при решении нелинейных краевых задач. Численный анализ процесса выпучивания показывает, что процесс последовательного догружения оболочки при поперечном и гидростатическом нагружении сопровождается искажением начального участка спектра критических нагрузок и перестройкой форм выпучивания.

1. Классификация задач и описание комбинированного подхода. Практические рекомендации [1] по расчету на устойчивость стержней, пластин и оболочек чаще всего ориентируются на классическую критическую нагрузку Эйлера с некоторым поправочным множителем, который рекомендуется выбирать в пределах от 1 до 1/10 в зависимости как от типа задачи, так и от возможных начальных неправильностей конструкции и возмущений при реализации процесса нагружения. Задачи потери устойчивости упругих стержней, пластин и оболочек при наличии внешних возмущений описываются уравнением (или системой уравнений)

$$A\Phi - \lambda B\Phi = \varphi \quad (1.1)$$

при соответствующих краевых условиях

$$C\Phi|_{\Gamma} = 0, \quad (1.2)$$

где Φ — искомая функция; φ — заданная функция, характеризующая малые внешние возмущения; A, B — квазилинейные операторы уравнений; C — линейные операторы краевых условий, заданные на контуре Γ ; λ — параметр нагружения. Функция φ , определенная на срединной поверхности тонкостенной конструкции, описывает внешние возмущения при нагружении. Подчеркнем, что краевая задача геометрически нелинейной теории оболочек (1.1), (1.2) отличается от исходной, так как имеет однородные краевые условия.

Далее рассматриваются только такие исходные задачи выпучивания, краевые условия которых сводятся к виду (1.2) путем подбора или построения соответствующего (типа

безмоментного) решения исходной задачи. Операторы A и B имеют достаточно сложную структуру. Так, после обезразмеривания оператор A содержит естественный малый параметр ϵ , характеризующий тонкостенность оболочки. Отметим, что этот параметр ϵ входит множителем при членах, содержащих старшие производные системы уравнений. Можно ожидать, что наличие малого параметра ϵ и квазилинейности операторов A и B приведет к сложному устройству спектров критических нагрузок линейных задач потери устойчивости тонкостенных конструкций и разнообразию закритического поведения нелинейной системы после потери устойчивости.

Труды Лондонского симпозиума (1982 г.) [2], посвященные вопросам теории и практики потери устойчивости деформируемых элементов конструкций, выявили разнообразие подходов при решении теоретических задач и толкований получаемых результатов. По нашему мнению, такое разнообразие подходов и толкований результатов связано с упомянутыми двумя обстоятельствами, поэтому введем классификацию задач устойчивости по устройству спектров критических нагрузок и по закритическому поведению деформируемой системы при конечных прогибах.

Критические нагрузки $\lambda_i^{(0)}$ и собственные формы $\Phi_i^{(0)}$ линейных задач потери устойчивости — собственные числа и функции следующей задачи:

$$A_0 \Phi_i^{(0)} - \lambda_i^{(0)} B_0 \Phi_i^{(0)} = 0; \quad (1.3)$$

$$C \Phi_i^{(0)}|_{\Gamma} = 0. \quad (1.4)$$

Здесь A_0 и B_0 — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, причем для оболочек оператор A_0 содержит малый параметр $\epsilon \ll 1$, определяемый тонкостенностью конструкции. Вид краевых условий (1.4) совпадает с краевыми условиями (1.2). Пусть (1.3), (1.4) — самосопряженная задача. Собственные числа (критические нагрузки) упорядочены стандартным образом [3]:

$$0 < \lambda_1^{(0)} \leq \lambda_2^{(0)} \leq \lambda_3^{(0)} \leq \dots \leq \lambda_i^{(0)} \leq \dots, \quad (1.5)$$

а собственные функции ортогональны:

$$(\Phi_i^{(0)}, B_0 \Phi_j^{(0)}) = \delta_{ij}; \quad (1.6)$$

(δ_{ij} — символы Кронекера). Наибольший практический интерес при классификации спектров критических нагрузок представляет окрестность наименьшего собственного значения $\lambda_1^{(0)}$, соответствующего классической критической нагрузке Эйлера. Поэтому классифицируем спектры по кратности первого собственного значения и наличию точки сгущения в начале спектра (когда в малой окрестности $\lambda_1^{(0)}$ находится много других собственных значений).

По наличию кратности возможны два случая: 1) Ia — первое собственное значение отделено от второго, т. е. $\lambda_1^{(0)}$ — простое собственное значение:

$$0 < \lambda_1^{(0)} < \lambda_2^{(0)} \leq \lambda_3^{(0)} \leq \dots \leq \lambda_i^{(0)} \leq \dots; \quad (1.7)$$

2) Ib — первые $j \geq 2$ собственных значений совпадают, т. е. $\lambda_1^{(0)}$ имеет кратность j :

$$0 < \lambda_1^{(0)} = \lambda_2^{(0)} = \dots = \lambda_j^{(0)} < \lambda_{j+1}^{(0)} \leq \dots \quad (1.8)$$

По наличию точки сгущения в начале спектра возможны также два случая: Па, когда точка сгущения в начале спектра отсутствует; Пб, когда спектр начинается с точки

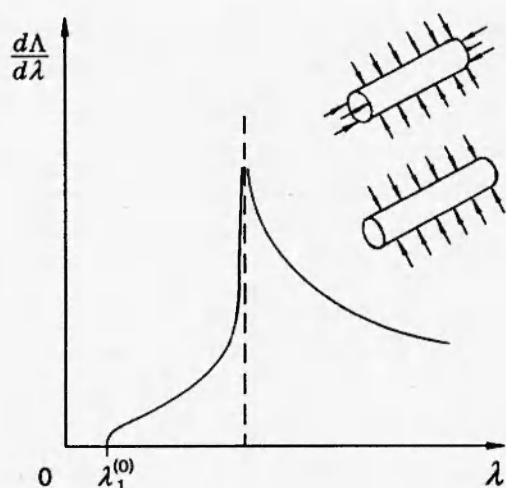


Рис. 1

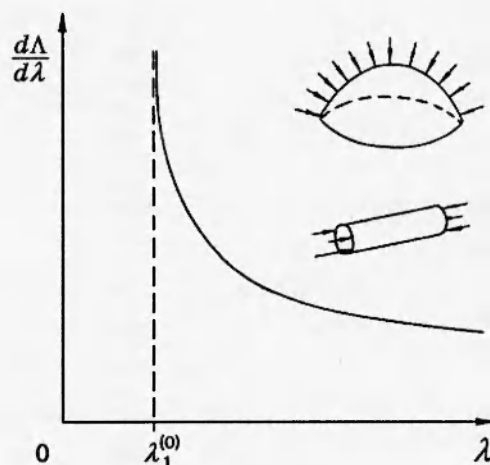


Рис. 2

сгущения критических нагрузок [4, 5].

Напомним, что к случаям Ia, На относится задача о потере устойчивости продольно сжатого шарнирно опертого стержня [1] (все собственные значения различны, спектр редкий в окрестности $\lambda_1^{(0)}$). Задача о потере устойчивости продольно сжатого шарнирно опертого стержня, лежащего на упругом основании, по предложенной классификации может принадлежать в зависимости от геометрических и жесткостных параметров [1, 6] к одному из следующих типов: Ia, На, или Ib, На, или Ia, IIb, или Ib, IIb (отметим, что наличие точки сгущения именно в этой задаче скорее всего не имеет практического значения, так как соотношение жесткостных параметров в этом случае очень экзотично).

В задачах устойчивости тонких оболочек существуют три типа спектров критических нагрузок [4]. На рис. 1 и 2 схематически изображены спектры упомянутых задач соответственно при отсутствии точки сгущения в окрестности $\lambda_1^{(0)}$ и при наличии точки сгущения в начале спектра ($d\Lambda/d\lambda$ — функция, характеризующая плотность собственных значений). На рис. 1 показаны схемы нагружения цилиндрических оболочек гидростатическим и поперечным давлением; спектры критических нагрузок, соответствующие этим задачам, не начинаются с точки сгущения.

На рис. 2 изображены схемы нагружения сферической оболочки гидростатическим давлением и цилиндрической оболочки продольными сжимающими усилиями; спектры критических нагрузок, соответствующие этим одномерным и двумерным задачам, начинаются с точки сгущения. Обратим внимание на условия разрешимости $(\varphi, \vec{B}_0 \vec{\Psi}_i^{(0)}) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, j$) задачи (1.1), (1.2), когда $A \equiv A_0$, $B \equiv B_0$, а $\lambda \rightarrow \lambda_1^{(0)}$; число этих условий j совпадает с кратностью первого собственного значения (см. (1.8)).

Введенная классификация линейных задач выпучивания была апробирована на сопоставлении поведения простейших решений [7], описывающих процесс потери устойчивости, с результатами массовых экспериментов по определению критической нагрузки конструктивно-ортотропных продольно сжатых цилиндрических оболочек [8]. Характером спектра в окрестности $\lambda_1^{(0)}$ линейных задач потери устойчивости продольно сжатых цилиндрических ортотропных оболочек (наличие или отсутствие точки сгущения) очень хорошо предсказываются воспроизводимостью и разброс экспериментальных результатов

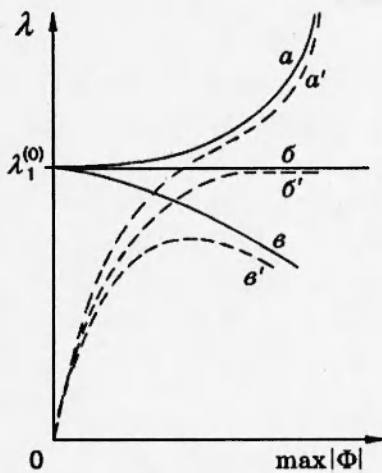


Рис. 3

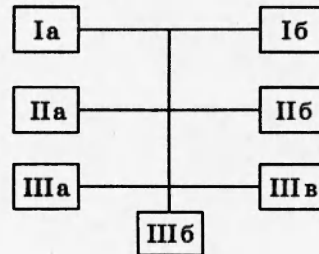


Рис. 4

по критическим нагрузкам тонкостенных оболочек [7, 8]. При конечных прогибах тонкостенной системы начальный участок спектра искажается.

Рассмотрим классификацию задач выпучивания деформируемых конструкций по за- критическому поведению, когда от некоторого тривиального решения ответвляются про- стое решение ($\lambda_1^{(0)}$ — простое собственное значение) или сложные решения ($\lambda_1^{(0)}$ имеет кратность $j = 2$). Возможны следующие случаи [1, 9]: IIIa — устойчивое закритическое поведение, IIIб — безразличное закритическое поведение, IIIв — неустойчивое закрити- ческое поведение (рис. 3, соответственно кривые $a - v$ для идеальной системы и кривые $a' - v'$ для системы с возмущениями). Все рассуждения верны только для малых откло- нений системы, т. е. при малых нормах $\|\Phi\|$ нормального прогиба системы. Предлагаемая классификация имеет место только при простых и двукратных собственных значениях, при $j > 2$ потребуются уточнения.

Итак, все разнообразие задач выпучивания деформируемых конструкций представ- ляет схема рис. 4. Устойчивость продольно сжатого шарнирного стержня Ia–IIIa есть наи- более простой случай: $\lambda_1^{(0)}$ — простое собственное значение, в окрестности $\lambda_1^{(0)}$ спектр редкий, устойчивое закритическое поведение при $\lambda > \lambda_1^{(0)}$. Вероятно, наиболее сложные задачи устойчивости — это задача об устойчивости тонкой сферической ортотропной обо- лочки при гидростатическом нагружении и задача об устойчивости тонкой продольно сжа- той цилиндрической ортотропной оболочки; по классификации, как правило, эти задачи соответствуют Ib, IIб, IIIв: $\lambda_1^{(0)}$ — кратное собственное значение, в окрестности $\lambda_1^{(0)}$ име- ется точка сгущения, неустойчивое закритическое поведение при $\lambda > \lambda_1^{(0)}$. Напомним, что эти задачи решены в классической постановке без определения форм потери устойчивости [10], причем критические нагрузки для одномерной и двумерной постановки совпадают.

Перейдем к описанию построения решения задачи (1.1), (1.2) при конечных малых прогибах деформируемой системы. Квазилинейные операторы A и B , когда имеются ма- лые прогибы, могут быть представлены в виде

$$A = A_0 + \mu A_1 + \mu^2 A_2 + \dots, \quad B = B_0 + \mu B_1 + \mu^2 B_2 + \dots,$$

где A_0 и B_0 — линейные операторы (см. уравнение (1.3)); A_i и B_i ($i > 0$) — необязательно линейные дифференциальные операторы; $\mu \ll 1$ — малый численный параметр, харак-

теризующий амплитуду нормального прогиба оболочки. Многие задачи об устойчивости механических систем можно свести [1–3, 9] к отысканию собственных чисел и функций уравнения типа (1.1) при некоторых краевых условиях. Например, уравнение равновесия изогнутой оси продольно сжатого стержня можно представить [6, 11] в виде (1.1) с малым параметром μ , характеризующим отклонение системы от прямолинейного (невыпученного) состояния и приближенно пропорциональным квадрату отношения амплитуды прогиба к длине стержня. Линеаризованную систему уравнений, связывающую функцию напряжений и нормальный прогиб неидеальной пологой оболочки, также можно [12] записать в виде (1.1) с малым параметром μ , пропорциональным амплитуде начальных неправильностей.

При $\mu \neq 0$ получаем родственную (1.3), (1.4) задачу о собственных числах λ_i и функциях Φ_i :

$$A\Phi_i - \lambda_i B\Phi_i = 0; \quad (1.9)$$

$$C\Phi_i|_{\Gamma} = 0. \quad (1.10)$$

Величины собственных чисел λ_i и собственные функции Φ_i определяются при заданных конечных прогибах системы, т. е. считаются известными малый параметр μ и операторы A_j и B_j при $j \geq 1$. Представления собственных функций и чисел разыскиваются в виде асимптотических рядов по параметру μ :

$$\Phi_n = \Phi_n^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \Phi_n^{(k)}, \quad \lambda_n = \lambda_n^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_n^{(k)}, \quad \Phi_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{nj}^{(k)} \Phi_j^{(0)}. \quad (1.11)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ и учитывая условия нормировки (1.6), можно формально [13, 14] найти коэффициенты разложений (1.11). Таким образом, получим вблизи $\lambda_n^{(0)}$ параметрическую зависимость Φ_n и λ_n , выраженную через малый параметр μ . Результаты тестирования изложенного подхода на хорошо изученной классической задаче вычисления прогиба Φ идеального стержня при продольной сжимающей нагрузке λ_1 вблизи первой критической нагрузки $\lambda_1^{(0)}$ (кривая *a* на рис. 3) приведены в [15]. Исследование методом возмущений выпучивания идеального стержня на упругом основании [6, 11] показало возможность неустойчивого закритического поведения (кривая *b* на рис. 3), а эксперименты на реальных стержнях [16] подтвердили эту возможность и отметили перестройку форм выпучивания, особенно, когда соответствующая задача на собственные функции и числа имеет кратные собственные значения или сравнительно густой спектр в окрестности $\lambda_1^{(0)}$. В задачах устойчивости оболочек упрощенный подход без учета плотности спектра [5, 7] обычно не дает достаточной информации о поведении тонкостенной конструкции при выпучивании.

Решение задачи (1.1), (1.2) разыскиваем в виде ряда по специально построенным собственным функциям Φ_i задачи (1.9), (1.10) (см. [3]):

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \Phi_i. \quad (1.12)$$

Целесообразно в (1.12) удерживать все члены одного порядка малости [5]. Выпучивание реальных конструкций при наличии возмущений при нагружении сопровождается постепенным увеличением амплитуды начального прогиба (кривые *a'* — *b'* на рис. 3). Поэтому предлагается совмещать процесс последовательного догружения деформируемой системы с построением искаженного участка спектра деформированной системы при конечном прогибе на каждом шаге догружения. По наименьшему собственному значению $\lambda_1^{(n)}$ линейной

задачи потери устойчивости выбирается шаг догружения $\Delta\lambda$. На первом шаге догружения ($\lambda = \Delta\lambda$) в соотношениях (1.11), (1.12) используется полная информация о собственных функциях $\Phi_i^{(0)}$ и числах $\lambda_i^{(0)}$ классической задачи устойчивости (1.3), (1.4); по построенному решению (1.12) отыскивается малый параметр $\mu^{(1)}$ (как правило, он связан с амплитудой нормального прогиба деформированной системы). На втором шаге догружения ($\lambda = 2\Delta\lambda$) сначала получаем исчерпывающую информацию о начальном участке спектра задачи (1.9), (1.10) для неидеальной системы с параметром $\mu^{(1)}$, далее в (1.12) используются подправленные собственные функции Φ_i и числа λ_i задачи (1.9), (1.10); по построенному решению (1.12) отыскивается малый параметр $\mu^{(2)}$ и т. д. Предложенный подход целесообразно применять только тогда, когда для задачи (1.3), (1.4) имеются аналитические выражения решения.

Какие-либо оценки точности предлагаемого приближенного способа построения решения в общем случае дать затруднительно. Однако в частном случае [15] оценки точности могут быть получены из сравнения точного решения задачи с предложенным приближенным. В [15] подробно исследована задача о выпучивании эксцентрично сжатого стержня, т. е. неидеальной конструкции, имеющей устойчивое закритическое поведение (кривая a' на рис. 3). В данной работе этот же комбинированный подход применяется для анализа выпучивания конструкции, имеющей неустойчивое закритическое поведение (кривая b' на рис. 3).

2. Основные уравнения. Для изучения процесса выпучивания пологих цилиндрических оболочек воспользуемся классической нелинейной системой уравнений относительно нормального прогиба и функции напряжений [17]. Проведем стандартное обезразмеривание: прогиб отнесем к толщине оболочки h , длины по продольной координате x и окружной y отнесем к радиусу цилиндра R , функцию напряжений обезразмерим множителем $(ERh^2)^{-1}$. После обезразмеривания известный нормальный прогиб представим в виде

$$w = \eta w^0(x, y), \quad \max |w^0(x, y)| = 1, \quad (2.1)$$

где η — параметр, характеризующий амплитуду прогиба w .

Пусть соотношение (2.1) выполняется в нелинейных членах преобразованной классической системы уравнений теории пологих оболочек, но только для одного из сомножителей, тогда имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta \Delta w + f_{xx} - \mu (f_{yy} w_{xx}^0 + f_{xx} w_{yy}^0 - 2f_{xy} w_{xy}^0) - \lambda (a_1 w_{xx} + a_2 w_{yy}) &= z, \\ \Delta \Delta f - w_{xx} + (1/2) \mu (w_{xx} w_{yy}^0 + w_{yy} w_{xx}^0 - 2w_{xy} w_{xy}^0) &= 0, \quad \Delta w = w_{xx} + w_{yy}, \quad (2.2) \\ \varepsilon^2 = [12(1 - \nu^2)]^{-1} (h/R)^2, \quad \mu = \eta h/R, \quad 0 \leq x \leq L/R, \quad 0 \leq y \leq 2\pi \end{aligned}$$

при соответствующих краевых условиях (1.2). Здесь w и f — нормальный прогиб и функция напряжений; L — длина цилиндрической оболочки; λ — параметр нагружения, пропорциональный постоянной составляющей усилий в продольном и окружном направлении; a_1 и a_2 — коэффициенты (при поперечном нагружении $a_2 = -1$, $a_1 = 0$, при гидростатическом давлении $a_2 = -1$, $a_1 = -1/2$); z — известная добавочная нагрузка; E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона; μ — малый параметр, характеризующий неидеальность системы (при $\mu = 0$ получается линейная теория оболочек). Нелинейные члены во втором уравнении системы (2.2) записаны в симметричном виде.

3. Описание методики построения решения. Систему (2.2) можно записать в

операторном виде

$$A \begin{bmatrix} w \\ f \end{bmatrix} - \lambda B \begin{bmatrix} w \\ f \end{bmatrix} = Z, \quad (3.1)$$

где операторы A и B и правая часть Z определяются следующими соотношениями:

$$A = A_0 + \mu A_1, \quad B = B_0, \quad (3.2)$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon^2 \Delta \Delta & ()_{xx} \\ -()_{xx} & \Delta \Delta \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} a_1 ()_{xx} + a_2 ()_{yy} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -[w_{xx}^0 ()_{yy} + w_{yy}^0 ()_{xx} - 2w_{xy}^0 ()_{xy}] \\ (1/2)[w_{yy}^0 ()_{xx} + w_{xx}^0 ()_{yy} - 2w_{xy}^0 ()_{xy}] & 0 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что оператор A состоит из основной части и членов с естественным малым параметром μ . В тех случаях, когда рассматривается деформирование неидеальной цилиндрической оболочки, функция $w^0(x, y)$ в соотношениях (3.2) описывает начальный прогиб, а в операторе A_1 в последней строчке вместо коэффициента $1/2$ появляется 1 .

Допустим, что все коэффициенты оператора A_1 известны, т. е. разыскивается решение уравнения (3.1) на заданной функции w^0 , имеющей непрерывные вторые производные. Тогда решение естественно строить в виде ряда

$$\begin{bmatrix} w \\ f \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \begin{bmatrix} w_i \\ f_i \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

по собственным формам потери устойчивости, если последние нам известны или достаточно легко могут быть построены. Подставим представление решения (3.3) в уравнение (3.1). После очевидных преобразований получим соотношение для определения коэффициентов a_i ряда Фурье:

$$a_i = z_i / (\lambda_i - \lambda). \quad (3.4)$$

Здесь λ_i — собственные числа задачи потери устойчивости

$$A \begin{bmatrix} w_i \\ f_i \end{bmatrix} - \lambda_i B \begin{bmatrix} w_i \\ f_i \end{bmatrix} = 0, \quad C \begin{bmatrix} w_i \\ f_i \end{bmatrix} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (3.5)$$

которым соответствуют собственные функции w_i, f_i ; A и B — операторы, определенные в (3.2); C — оператор краевых условий, соответствующий условиям шарнирного опирания торцов и безмоментного докритического состояния; постоянные z_i определяются из простых соотношений

$$z_i = \left(\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_i \\ f_i \end{bmatrix} \right). \quad (3.6)$$

Предполагается, что для собственных функций выполняются условия ортогональности и нормировки:

$$\left(B \begin{bmatrix} w_i \\ f_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_j \\ f_j \end{bmatrix} \right) = \delta_{ij}, \quad \left(A \begin{bmatrix} w_i \\ f_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_j \\ f_j \end{bmatrix} \right) = \lambda_i \delta_{ij}. \quad (3.7)$$

В соотношениях (3.6) и (3.7) под скалярным произведением понимается функционал

$$\left(\begin{bmatrix} w_i \\ f_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_j \\ f_j \end{bmatrix} \right) = \int_0^{2\pi} \int_0^{L/R} (w_i w_j + f_i f_j) dx dy.$$

Если решение (3.3) уже построено для произвольного параметра нагружения λ и определен критический параметр нагружения λ^* , при котором система теряет устойчивость, то это решение легко поддается анализу при конкретном λ , так как убывание коэффициентов a_i ряда Фурье определяется заданной поперечной нагрузкой и спектром задачи (3.5) (см. [4, 7, 18]).

4. Исследование начального участка спектра критических нагрузок. Рассмотрим численное построение спектра. Операторы A и B задачи (3.5) имеют члены с малым параметром μ , поэтому естественно воспользоваться классической теорией возмущений [13, 14] и представить собственные функции w_i, f_i и числа λ_i в виде асимптотических рядов по параметру μ :

$$w_i = w_i^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k w_i^{(k)}, \quad f_i = f_i^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k f_i^{(k)}, \quad \lambda_i = \lambda_i^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_i^{(k)}, \quad \mu \ll 1. \quad (4.1)$$

В соотношениях (4.1) ограничимся членами первого порядка малости.

Для эффективного построения начального участка спектра методом возмущений желательно иметь аналитические выражения для собственных функций $w_i^{(0)}, f_i^{(0)}$ и чисел $\lambda_i^{(0)}$ невозмущенной задачи (1.3), (1.4), которая имеет, по крайней мере, двукратные собственные значения

$$\lambda_1^{(0)} = \lambda_2^{(0)} \leq \lambda_3^{(0)} = \lambda_4^{(0)} \leq \dots \leq \lambda_i^{(0)} = \lambda_{i+1}^{(0)} \leq \dots, \quad (4.2)$$

потому что, например, компонента

$$w_i^{(0)} = \begin{cases} \gamma_{n_i} \cos n_i y \cdot \sin \pi R x / L, \\ \gamma_{n_i} \sin n_i y \cdot \sin \pi R x / L, \end{cases} \quad \gamma_{n_i} = \frac{1}{n_i} \sqrt{\frac{2R}{\pi L}}, \quad (4.3)$$

причем нечетным i в (4.2) и (4.3) соответствуют $\cos n_i y$, а четным $\sin n_i y$ (n_i — число волн по окружной координате). Согласно введенной в п. 1 классификации, задачи о выпучивании цилиндрической оболочки средней длины относятся к классу Ib, IIa, IIIb, поэтому при численной реализации принимается во внимание ограниченное число степеней свободы с учетом неустойчивости закритического поведения системы. При наличии возмущений кратные собственные значения (4.2) распадаются на простые, если в разложениях (4.1) удерживать все члены вплоть до $\cos 2n_i y, \sin 2n_i y$. Поправки для кратных собственных значений имеют разные знаки. Следовательно, наименьшая критическая нагрузка неидеальной системы меньше наименьшей критической нагрузки идеальной системы, и поэтому при последовательном догружении реальная система теряет устойчивость раньше, чем идеальная.

Результаты расчетов начального участка спектра, когда используется теория возмущений, согласуются с аналитическими исследованиями этого участка методом Р. Куранта [4, 7, 19].

5. Численное построение решения и обсуждения. При численном построении решения необходимо урезать ряд (3.3) таким образом, чтобы основная информация была сохранена. Для этого проще всего сравнивать абсолютные величины коэффициентов a_i ряда Фурье: будем удерживать все члены разложения, для которых

$$|a_j| \geq \rho \max_i |a_i|. \quad (5.1)$$

В проведенных расчетах постоянная ρ выбиралась равной 1/2, 1/3, 1/10. Удерживая конечное число членов ряда (3.3), подменяем систему с распределенными параметрами (с

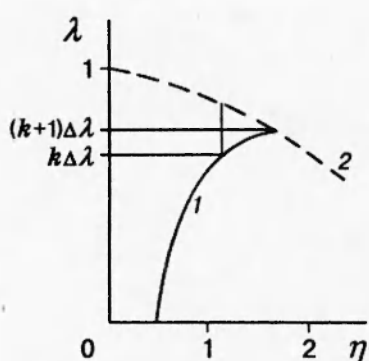


Рис. 5

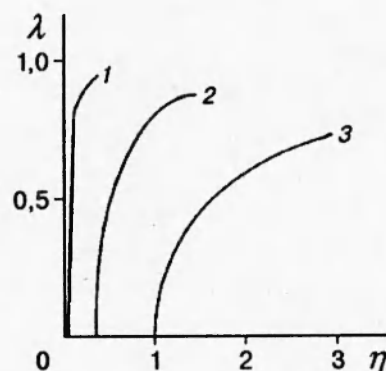


Рис. 6

бесконечным числом степеней свободы) системой с конечным числом степеней свободы, которые все равноправны.

Численный анализ процесса выпучивания проводится следующим образом. Сначала выбирается шаг по нагрузке λ (например, $\Delta\lambda = 0,01 \min \lambda_i^{(0)}$). На каждом k -м шаге проводится построение решения (3.3): определяется параметр η (см. (2.1)), вычисляется малый параметр $\mu = \eta h/R$, уточняются методом возмущений собственные формы потери устойчивости и критические нагрузки неидеальной системы при известных с $(k-1)$ -го шага нормальных прогибах.

Далее переходим к $(k+1)$ -му шагу по нагрузке, равной $(k+1)\Delta\lambda$, причем функция w^0 для этого шага берется с k -го шага. Вычисления начинаются с первого шага ($k=1$), а $w^0 \equiv 0$ для нулевого шага. Численные расчеты заканчиваются, когда параметр нагружения $(k+1)\Delta\lambda$ на последующем $(k+1)$ -м шаге превосходит или совпадает с наименьшей критической нагрузкой λ_1 , определенной на предыдущем k -м шаге, для неидеальной системы, т. е. $(k+1)\Delta\lambda \geq \lambda_1$, причем этой форме выпучивания соответствует неустойчивое закритическое поведение системы. За критическую нагрузку принимаем $\lambda^* = k\Delta\lambda$ (рис. 5, кривая 1 описывает деформирование системы, а 2 — изменение λ_1).

Ниже приводятся результаты расчетов оболочек, нагруженных равномерным внешним поперечным давлением и сравнительно небольшим добавочным внешним нормальным

Таблица 1

θ	R/h					
	25 ($n^* = 6$)		50 ($n^* = 7$)		100 ($n^* = 8$)	
	λ^*	n_j	λ^*	n_j	λ^*	n_j
0,01	0,97	5с, 5s, 6с, 6s	0,97	7с, 7s	0,96	8с, 8s
0,1	0,92	5s, 6с, 6s	0,90	6с, 7с, 7s	0,86	7с, 8s, 9s
1	0,62	4с, 5s, 6с	0,53	5с, 6с, 7с	0,42	7с, 8с

Таблица 2

θ	η	λ^*	n_j
0,1	1,56	0,86	7s, 8s, 9s
0,3	3,56	0,75	7s, 8s, 9s
0,5	5,17	0,65	7s, 8s
0,6	5,70	0,60	7s, 8s
0,7	5,80	0,55	7s, 8s
0,8	5,82	0,50	6s, 7s, 8s
0,9	6,31	0,46	6s, 7s, 8s
1,0	6,68	0,42	7s, 8s

давлением:

$$z = \theta \sum_{n=4}^{100} a_n (\cos ny + \sin ny) \sin \frac{\pi Rx}{L}, \quad a_n = \frac{2R}{n^2 \pi L \gamma_n}, \quad \gamma_n = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2R}{\pi L}}. \quad (5.2)$$

Так как для изучения выбраны классические нелинейные уравнения, то из рассмотрения исключены все состояния с малым показателем изменчивости ($n < 4$) по окружной координате. Отметим, что на каждом k -м шаге ($k > 1$) проводится переразложение функции z , определенной в (5.2), по уточненным собственным формам потери устойчивости.

Таблица 3

ρ	λ^*	n_j
1/2	0,43	7s
1/3	0,42	7s, 8s
1/10	0,42	4s, ..., 7s, ..., 11s

На рис. 6 приведены характерные кривые деформирования 1-3 ($\theta = 0,01; 0,1; 0,3$) при $R/h = 100$, $\rho = 1/3$, $L/R = 1$. В табл. 1-3 сведены результаты расчетов по определению критической нагрузки λ^* . Здесь n^* — число волн по окружной координате для наименьшей критической нагрузки линейной задачи, n_j — номера форм, удовлетворяющие соотношению (5.1) на последнем шаге догружения, s, с означают sin, cos, подчеркнутый номер формы соответствует $\max |a_i|$. Вычисления для табл. 1 и 2 проведены при $\rho = 1/3$, $L/R = 1$, а для табл. 2 и 3 — при $R/h = 100$ ($n^* = 8$). Обнаружена перестройка форм выпучивания при догружении. Эта перестройка связана с искажением спектра нелинейной системы при конечных прогибах по сравнению с исходной системой. Все результаты вычислений табл. 1 были продублированы при $\rho = 1/2$ и $1/10$ ($L/R = 1$). Наиболее интересные, по нашему мнению, результаты приведены в табл. 3; они позволяют утверждать, что чаще всего достаточно ограничиться параметром $\rho \leq 1/3$ при определении числа равноправных степеней свободы (см. соотношение (5.1)). Те результаты расчетов, что не приведены в табл. 3, полностью совпали по величине критической нагрузки. Так как использовалась теория возмущений при определении λ , то желательно уточнение расчетов в тех случаях, когда $\lambda < 0,6$.

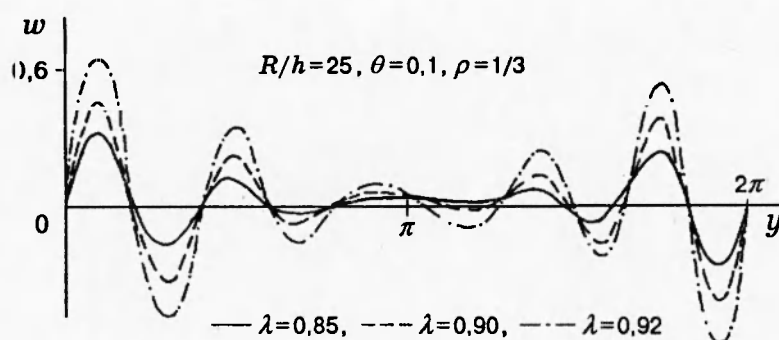


Рис. 7

При расчетах и анализе задач выпучивания принимались во внимание: 1) кратность первого собственного значения, 2) плотность спектра в окрестности первого собственного значения, 3) закритическое поведение системы (см. п. 1).

На рис. 7 представлены характерные прогибы по окружной координате для указанных параметров, что соответствует табл. 1; легко заметить перестройку форм выпучивания при последовательном догружении от 0,85 до 0,92 нагрузки Эйлера.

Проведенный анализ выпучивания цилиндрических оболочек показывает, что процесс догружения сопровождается искажением начального участка спектра критических нагрузок и перестройкой форм выпучивания. Искажение спектра связано как с возникающими дополнительными усилиями в срединной поверхности, так и с дополнительными нормальными прогибами. Перестройка форм выпучивания связана с искажением спектра нелинейной системы при конечных прогибах по сравнению со спектром исходной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прочность, устойчивость, колебания // Справочник в 3 т. М.: Машиностроение, 1968. Т. 2-3.
2. Потеря устойчивости и выпучивание конструкций: теория и практика / Под ред. Дж. Томпсона и Дж. Ханга: Пер. с англ. / Под ред. Э. И. Григолюка. М.: Наука, 1991.
3. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
4. Бендич Н. Н., Корнев В. М. О плотности собственных значений в задачах устойчивости тонких упругих оболочек // ПММ. 1971. Т. 35, № 2. С. 364-368.
5. Корнев В. М. О решении задач устойчивости оболочек с учетом плотности собственных значений // Теория оболочек и пластин. Л.: Судостроение, 1975.
6. Астапов Н. С., Корнев В. М. Закритическое поведение идеального стержня на упругом основании // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 2. С. 130-142.
7. Kornev V. M., Ermolenko V. M. Sensibility of shells to buckling disturbances in connection with parameters of critical loading spectrum // Int. J. Engn. Sci. 1980. V. 18. P. 379-388.
8. Milligan R., Gerard G., Lakshmikantham C. General instability of orthothropically stiffened cylinders under axial compression // AIAA J. 1966. V. 4, N 11. P. 1906-1913.
9. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. М.: Мир, 1974.
10. Власов В. З. Избранные труды. В 2 т. М.; Изд-во АН СССР, 1962. Т. 1.

11. Астапов Н. С. Закритическое поведение стержня на нелинейно-упругом основании // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1991. Вып. 103.
12. Астапов Н. С., Корнев В. М. Критические нагрузки неидеальных пологих цилиндрических оболочек // ПМТФ. 1984. № 2. С. 140–146.
13. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. Т. 2.
14. Найфе Ф. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
15. Астапов Н. С., Корнев В. М. Выпучивание эксцентрично сжатого упругого стержня // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 2. С. 162–169.
16. Астапов Н. С., Демешкин А. Г., Корнев В. М. Выпучивание стержня, лежащего на упругом основании // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С. 106–112.
17. Муштари Х. Н., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Тат. кн. изд-во, 1957.
18. Корнев В. М. Об аппроксимации в задачах устойчивости тонких упругих оболочек при сгущении собственных значений // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 2. С. 117–129.
19. Ермоленко В. М., Корнев В. М. Об устойчивости тонких пологих оболочек отрицательной гауссовой кривизны // ПМТФ. 1983. № 2. С. 134–137.

Поступила в редакцию 19/XII 1994 г.
