УДК 519.6

Решение двумерных задач газовой динамики с использованием неявной схемы для метода Галеркина с разрывными базисными функциями на неструктурированных треугольных сетках*

Р.В. Жалнин[1], В.Ф. Масягин[1], В.Ф. Тишкин[2]

[1]ФГБОУ ВО "Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева" Большевистская ул., 68/1, Саранск, 430005

[2]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Миусская пл., д.4, Москва, 125047
E-mails: zhalnin@gmail.com (Жалнин Р.В.), vmasyagin@gmail.com (Масягин В.Ф.), v.f.tishkin@mail.ru (Тишкин В.Ф.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 1, Vol. 15, 2022.

Жалнин Р.В., Масягин В.Ф., Тишкин В.Ф. Решение двумерных задач газовой динамики с использованием неявной схемы для метода Галеркина с разрывными базисными функциями на неструктурированных треугольных сетках // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 1. — С. 19–32.

В работе построена неявная схема метода Галеркина с разрывными базисными функциями для решения уравнений газовой динамики на неструктурированных треугольных сетках. Неявная схема основана на представлении системы сеточных уравнений в так называемой "дельта-форме". Для решения результирующей СЛАУ на каждый момент времени применяются решатели из библиотеки NVIDIA AmgX. Для верификации численного алгоритма была произведена серия расчетов на обтекание симметричного аэродинамического профиля NACA0012 при различных углах атаки, а также решена задача об обтекании профиля RAE2822. Представлены результаты расчетов.

DOI: 10.15372/SJNM20220102

Ключевые слова: *уравнения газовой динамики, метод Галеркина с разрывными базисными функциями, неявная схема, NVIDIA AmgX.*

Zhalnin R.V., Masyagin V.F., Tishkin V.F. Solving two-dimensional problems of gas dynamics using an implicit scheme for the discontinuous Galerkin method on unstructured triangular grids // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2022. — Vol. 25, № 1. — P. 19–32.

An implicit scheme of the discontinuous Galerkin method for solving gas dynamics equations on unstructured triangular grids is constructed. The implicit scheme is based on the representation of a system of grid equations in the so-called "delta" form. To solve the resulting SLAE for each moment of time, solvers from the NVIDIA AmgX library are used. To verify the numerical algorithm, a series of calculations were performed for the flow over the NACA0012 symmetric airfoil profile at various angles of attack, and the problem of the flow over the RAE2822 airfoil profile was solved. The results of calculations are presented.

Keywords: *gas dynamics equations, discontinuous Glerkin method, implicit scheme, NVIDIA AmgX.*

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-71-00131).

1. Введение

При численном решении многих задач газовой динамики и гидродинамики необходимо учитывать процессы теплопроводности и диффузионные процессы.

Как правило, геометрические модели данных задач имеют сложную форму, что накладывает определенные ограничения на использование структурированных сеток. С другой стороны, актуальной задачей является получение решения с высоким порядком точности. Из-за большой размерности рассматриваемых задач, остро стоит задача об использовании средств параллельного программирования для нахождения решения за приемлемое время. Таким образом, нужен численный метод, который бы обладал высоким порядком точности, компактным шаблоном и при этом был бы хорошо адаптирован к неструктурированным сеткам. Одним из таких методов является активно развивающийся метод Галеркина с разрывными базисными функциями. Данный метод обладает целым рядом конкурентных достоинств: обладает высоким порядком точности получаемого решения, слабо зависит от вида используемой расчетной сетки, что позволяет работать с неструктурированными сеточными структурами и при этом обладает компактным вычислительным шаблоном. Это означает, что при любом выборе системы базисных функций на каждом шаге вычислений данному методу требуются значения из текущей ячейки сетки и ее соседей по ребру. При всех перечисленных достоинствах метод Галеркина с разрывными базисными функциями требует существенных вычислительных затрат, что, при использовании явных схем, приводит к значительным затратам вычислительного времени. Одним из перспективных направлений исследований сегодня является разработка эффективных неявных схем для разрывного метода Галеркина на неструктурированных сетках. Однако данный подход, несмотря на снятие существенных ограничений с шага по времени, требует значительных ресурсов для работы со СЛАУ огромных размерностей, поэтому встает вопрос о максимально эффективном использовании всех возможностей вычислительной техники [1].

Данная работа посвящена разработке неявной схемы метода Галеркина с разрывными базисными функциями для решения уравнений газовой динамики на треугольных сетках с учетом вязкости. Численный алгоритм решения при таком подходе сводится к решению одной системы линейных уравнений на каждом шаге по времени. Для параллельного исполнения этой операции на сегодняшний день разработано много эффективных решений для различных архитектур параллельного программирования. Но при этом стоит отметить, что неявная схема при всех ее достоинствах, имеет значительную сложность в реализации. Это связано с тем, что неявная схема требует существенно более сложного численного алгоритма, эффективного подхода при работе с памятью и особого внимания к матричным структурам, возникающим при выполнении расчетов.

В настоящий момент все более популярными становятся параллельные вычисления на устройствах GPU. Несмотря на то, что перенос алгоритмов на архитектуру графических процессоров, существенно отличающуюся от архитектуры центральных процессоров, представляет собой достаточно сложную задачу, GPU все чаще используются в вычислительной механике, задачах газовой динамики и в вычислительной математике в целом [2]. Благодаря своей архитектуре, основанной на большом числе вычислительных ядер, и новому подходу к организации вычислений, применение GPU в вычислениях является очень востребованным. Организация таких вычислений требует мощной, гибкой и при этом простой по своей логике технологии, которая бы дала возможность использовать все возможности GPU в уже существующих алгоритмах. В данной работе для этих целей будем использовать средства библиотеки NVIDIA AmgX, написанной на языке CUDA C.

К достоинствам библиотеки следует отнести поддержку параллелизма как на уровне нескольких графических процессоров, так и на уровне нескольких вычислительных кластеров, что обеспечивается посредством поддержки технологии MPI. Также библиотека AmgX предоставляет гибкую систему конфигурации, и благодаря этому появляется возможность создавать иерархию решающих алгоритмов с произвольной глубиной, в которой внешний решающий алгоритм будет использовать внутренние в качестве предобработчиков и предобуславливателей, которые сами могут быть обработаны другими методами. Такой подход позволяет пользователю быстро экспериментировать с различными схемами [3].

В настоящий момент библиотека находит все более широкое применение в современном промышленном и научном численном анализе. В частности, AmgX является составной частью коммерческого вычислительного программного обеспечения ANSYS Fluent [4]. Показателем актуальности и эффективности используемой библиотеки является и тот факт, что на данный момент она используется в качестве стандарта для сравнения эффективности и скорости работы новых численных алгоритмов для решения систем линейных уравнений, наряду с такими мощными средствами как библиотека HYPRE [4].

Ранее авторы в работах [5, 6] разработали численную методику для неявной схемы метода Галеркина с разрывными базисными функциями применительно к решению задач газовой динамики. В приведенных работах рассматривалась математическая модель движения невязкой жидкости. Неявная схема записывалась в так называемой “дельта-форме”, когда рассматриваются не сами искомые функции, а их приращения на каждом шаге по времени [7]. Для решения результирующей СЛАУ применялись решатели из библиотеки HYPRE. Данная работа продолжает ранние работы и расширяет их, рассматривая модель, описывающую движение вязкой жидкости. Для решения СЛАУ применяются решатели из библиотеки NVIDIA AmgX.

2. Неявная схема для разрывного метода Галеркина

Рассмотрим двумерную систему уравнений Навье–Стокса, записанную в консервативной форме:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u^2+p)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}-\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}-\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v^2+p)}{\partial y}-\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}-\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial\rho E}{\partial t}+\frac{\partial((\rho E+p)u)}{\partial x}+\frac{\partial((\rho E+p)v)}{\partial y}-\frac{\partial(\tau_{xx}u+\tau_{xy}v)}{\partial x}-\frac{\partial(\tau_{yx}u+\tau_{yy}v)}{\partial y}=0,$$

где ρ — плотность, $\mathbf{v}=(u,v)$ — вектор скорости, p — давление, $E=e+\frac{u^2+v^2}{2}$ — удельная полная энергия, e — удельная внутренняя энергия, τ_{ij} $(i,j=x,y)$ — компоненты тензора вязких напряжений.

Система уравнений замыкается уравнением состояния $p = \rho e\,(\gamma - 1)$, где γ — показатель адиабаты. Эти уравнения должны быть дополнены начальными и граничными условиями, вид которых зависит от конкретной задачи, и будут конкретизированы далее.

Тензор вязких напряжений представлен в виде

$$\boldsymbol{\tau} = -\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\mathbf{v})I + \mu(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T),$$

где μ — коэффициент динамической вязкости, I — единичный тензор.

Компоненты тензора вязких напряжений находятся как

$$\tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$\tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Введем обозначения

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix},$$

$$F^{(1)}(U) = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} \\ F_4^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}, \qquad F^{(2)}(U) = \begin{pmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \\ F_4^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix},$$

$$H^{(1)}(U,\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} H_1^{(1)} \\ H_2^{(1)} \\ H_3^{(1)} \\ H_4^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{xx}u + \tau_{xy}v \end{pmatrix}, \qquad H^{(2)}(U,\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} H_1^{(2)} \\ H_2^{(2)} \\ H_3^{(2)} \\ H_4^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yx}u + \tau_{yy}v \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{W} = \nabla U,$$

$$\mathbf{G}(U,\mathbf{W}) = \Big(F^{(1)}(U) - H^{(1)}(U,\mathbf{W}),\ F^{(2)}(U) - H^{(2)}(U,\mathbf{W})\Big).$$

Дискретизация по пространству вязкого члена уравнений Навье–Стокса в методе Галеркина с разрывными базисными функциями [8] строится с помощью обращения к смешанной конечно-элементной формулировке. Производные первого порядка от консервативных переменных приводят к производным второго порядка, когда мы преобразуем дивергенцию вязких потоков. Однако производные второго порядка не могут быть согласованы напрямую в слабой вариационной формулировке, используя пространство разрывных функций. Следовательно, мы рассматриваем $\nabla U = \mathbf{W}$ как вспомогательные неизвестные уравнений Навье–Стокса [9], которые переформулируются в следующую систему для неизвестных $\mathbf{W}$ и U:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{G}(U, \mathbf{W}) = 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{W} - \nabla U = 0. \tag{2}$$

Для аппроксимации уравнений область Ω, на которой ищется решение, покроем неструктурированной сеткой $K_h : \Omega = \cup K_i$. Все треугольники K_i имеют ненулевую площадь и пересекаются не более чем по образующим их ребрам или вершинам. Каждое внутреннее ребро одной ячейки является целиком ребром другой ячейки.

В качестве базисных функций на каждом элементе K_i выберем всевозможные многочлены вида

$$\varphi_{il} = \left(\frac{x - x_{ci}}{\Delta x_i}\right)^{\alpha_{K_i l}} \left(\frac{y - y_{ci}}{\Delta y_i}\right)^{\beta_{K_i l}}$$

такие, что сумма степеней $\alpha_{K_i l} + \beta_{K_i l}$ не превышает некоторого заданного числа p. Здесь x_{ci}, y_{ci} — координаты центра масс ячейки, а Δx_i, Δy_i — характерные размеры ячейки K_i.

Дискретный аналог системы (1), (2) получаем, полагая, что внутри каждого элемента K_i сетки приближенное решение U_{ih} и $\mathbf{W}_{ih}$ представляется в виде

$$U_{ih}(t, x, y) = \sum_{k=0}^{N} U_{ik}(t)\varphi_{ik}(x, y),$$

$$\mathbf{W}_{ih}(t, x, y) = \sum_{k=0}^{N} \mathbf{W}_{ik}(t)\varphi_{ik}(x, y).$$

Умножим уравнения системы (1), (2) на пробные функции, взятые из пространства базисных функций, и проинтегрируем по каждому элементу сетки. В результате получаем систему

$$\int\limits_{K_i} \sum_{k=0}^{N} \frac{dU_{ik}}{dt} \varphi_{ik}\varphi_{il} dS + \oint\limits_{\partial K_i} (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{G}}^{\sigma})\varphi_{il} d\sigma - \int\limits_{K_i} \mathbf{G}(U_{ih}, \mathbf{W}_{ih}) \cdot \nabla\varphi_{il} dS = 0, \tag{3}$$

$$\int\limits_{K_i} \sum_{k=0}^{N} \mathbf{W}_{ik}\varphi_{ik}\varphi_{il} dS - \oint\limits_{\partial K_i} \mathbf{n}\hat{U}^{\sigma}\varphi_{il} d\sigma + \int\limits_{K_i} U_{ih}\nabla\varphi_{il} dS = 0, \tag{4}$$

где $\hat{\mathbf{G}}^{\sigma}$, $\hat{U}^{\sigma}$ — потоковые функции, которые будут определены позже.

Заменим производную $\frac{dU_{ik}}{dt}$ дискретным аналогом и с учетом шага по времени Δt перепишем систему (3), (4) в операторном виде

$$M_i \frac{U_{ih}^{m+1} - U_{ih}^{m}}{\Delta t} + \mathcal{L}_U\big(U_{ih}^{m+1}, \mathbf{W}_{ih}^{m+1}\big) = 0, \tag{5}$$

$$\mathcal{L}_{\mathbf{W}}\big(U_{ih}^{m+1}, \mathbf{W}_{ih}^{m+1}\big) = 0, \tag{6}$$

где M_i обозначает матрицу масс в ячейке K_i.

Для решения полученной нелинейной системы воспользуемся методом Ньютона. Выполним линеаризацию

$$\mathcal{L}_\alpha(U_{ih}^{m+1}, \mathbf{W}_{ih}^{m+1}) = \mathcal{L}_\alpha(U_{ih}^{m}, \mathbf{W}_{ih}^{m}) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial U}\right)_i^m (U_{ih}^{m+1} - U_{ih}^{m}) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial \mathbf{W}}\right)_i^m (\mathbf{W}_{ih}^{m+1} - \mathbf{W}_{ih}^{m}),$$

где $\alpha = U, \mathbf{W}$,

$$\left(\frac{1}{\Delta t} M_i + \left(\frac{\partial \mathcal{L}_U}{\partial U}\right)_i^m\right)(U_{ik}^{m+1} - U_{ik}^{m}) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}_U}{\partial \mathbf{W}}\right)_i^m (\mathbf{W}_{ih}^{m+1} - \mathbf{W}_{ih}^{m}) = -\mathcal{L}_U(U_{ih}^{m}, \mathbf{W}_{ih}^{m}), \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}_\mathbf{W}}{\partial U}\right)_i^m (U_{ih}^{m+1} - U_{ih}^{m}) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\mathbf{W}}{\partial \mathbf{W}}\right)_i^m (\mathbf{W}_{ih}^{m+1} - \mathbf{W}_{ih}^{m}) = -\mathcal{L}_\mathbf{W}(U_{ih}^{m}, \mathbf{W}_{ih}^{m}). \quad (8)$$

Обозначим приращения за шаг по времени как

$$\Delta U_{ih}^{m+1} = U_{ih}^{m+1} - U_{ih}^{m}, \quad \Delta \mathbf{W}_{ih}^{m+1} = \mathbf{W}_{ih}^{m+1} - \mathbf{W}_{ih}^{m}.$$

Приращения искомых функций будем искать в том же пространстве базисных функций, что и сами функции:

$$\Delta U_{ih}^{m+1} = \sum_{k=0}^{N} \Delta U_{ik}^{m+1} \varphi_{ik}, \quad \Delta \mathbf{W}_{ih}^{m+1} = \sum_{k=0}^{N} \Delta \mathbf{W}_{ik}^{m+1} \varphi_{ik}.$$

Перепишем систему (3), (4) в дельта-форме:

$$\mathbf{L} Q = B.$$

Вектор Q состоит из блоков

$$\begin{pmatrix} \Delta U_{ih}^{m+1} \\ \Delta \mathbf{W}_{ih}^{m+1} \end{pmatrix},$$

вектор B состоит из блоков

$$\begin{pmatrix} -\mathcal{L}_U\big(U_{ih}^{m}, \mathbf{W}_{ih}^{m}\big) \\ -\mathcal{L}_\mathbf{W}\big(U_{ih}^{m}, \mathbf{W}_{ih}^{m}\big) \end{pmatrix},$$

где $i = 1, \ldots, N_h$, N_h — число элементов сетки.

Элементами матрицы $\mathbf{L}$ являются блоки l_{ij}, $i, j = 1, \ldots, N_h$.

Рассмотрим внутреннее ребро σ, которое делят между собой ячейки с индексами i и j. В этом случае в матрице $\mathbf{L}$ будут заполнены блоки l_{ii}, l_{ij}, l_{jj} и l_{ji}. Если ребро σ является внешним и относится к ячейке с индексом i, то в этом случае будет заполнен только блок l_{ii}. Слагаемые, содержащие двойные интегралы, вносят вклад в блок l_{ii}.

Для нахождения матрицы $\mathbf{L}$ необходимо вычислять якобианы от потоковых величин в конвективных и диффузионных слагаемых. С учетом обозначений для вычисления якобиана от потоковой величины $(\hat{\mathbf{G}}^\sigma)^{m+1}$ необходимо вычислить якобианы от потоковой величины $(\hat{F}_n^\sigma)^{m+1}$ в конвективных и от величины $(\hat{H}_n^\sigma)^{m+1}$ в диффузионных слагаемых.

Потоковые значения от конвективных слагаемых в результирующей матрице $\mathbf{L}$ будем искать в виде

$$(\hat{F}_n^\sigma)^{m+1} = (\hat{F}_n^\sigma)^m + \mathbf{A}^+(U_{ih}^{m+1} - U_{ih}^m) + \mathbf{A}^-(U_{jh}^{m+1} - U_{jh}^m),$$

где

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial F_n}{\partial U}\right)^m \Bigg|_{U=U_{avg}^\sigma}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{L\Lambda R},$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^- + \mathbf{\Lambda}^+, \quad \mathbf{\Lambda}^- = \frac{1}{2}\left(\mathbf{\Lambda} - |\mathbf{\Lambda}|\right), \quad \mathbf{\Lambda}^+ = \frac{1}{2}\left(\mathbf{\Lambda} + |\mathbf{\Lambda}|\right),$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^- + \mathbf{A}^+, \quad \mathbf{A}^- = \mathbf{L\Lambda^- R}, \quad \mathbf{A}^+ = \mathbf{L\Lambda^+ R},$$

$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A}\,|_{\mathbf{n}=(1,0)}, \quad \mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{A}\,|_{\mathbf{n}=(0,1)}.$$

В формулах выше $\mathbf{R}, \mathbf{L}$ обозначают, соответственно, матрицы, составленные из правых и левых собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица, составленная из собственных значений матрицы $\mathbf{A}$, U_{avg}^σ — осредненное по Роу значение на границе между элементами [10]. Для нахождения значения $(\hat{F}_n^\sigma)^m$ используется потоковая функция Годунова.

Потоковые значения от диффузионных слагаемых в результирующей матрице $\mathbf{L}$ находим в виде

$$\begin{aligned}(\hat{H}_n^\sigma)^{m+1} \;\; = \;\; & (\hat{H}_n^\sigma)^m + \frac{1}{2}\Big(\mathbf{G}^{1+}(U_{ih}^{m+1} - U_{ih}^m) + \mathbf{G}^{1-}(U_{jh}^{m+1} - U_{jh}^m)\Big) + \\ & \frac{1}{2}\Big(\mathbf{G}^{2+}(\mathbf{W}_{ih}^{m+1} - \mathbf{W}_{ih}^m) + \mathbf{G}^{2-}(\mathbf{W}_{jh}^{m+1} - \mathbf{W}_{jh}^m)\Big),\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{G}^1 = \frac{\partial H_n}{\partial U}, \qquad \mathbf{G}^{1(1)} = \mathbf{G}^1\,|_{\mathbf{n}=(1,0)}, \qquad \mathbf{G}^{1(2)} = \mathbf{G}^1\,|_{\mathbf{n}=(0,1)},$$

$$\mathbf{G}^2 = \frac{\partial H_n}{\partial \mathbf{W}}, \qquad \mathbf{G}^{2(1)} = \mathbf{G}^2\,|_{\mathbf{n}=(1,0)}, \qquad \mathbf{G}^{2(2)} = \mathbf{G}^2\,|_{\mathbf{n}=(0,1)},$$

$$\mathbf{G}^{1-} = \mathbf{G}^1\,|_{U=U_{jh}^m, \mathbf{W}=\mathbf{W}_{jh}^m}, \qquad \mathbf{G}^{1+} = \mathbf{G}^1\,|_{U=U_{ih}^{m+1}, \mathbf{W}=\mathbf{W}_{ih}^{m+1}},$$

$$\mathbf{G}^{2-} = \mathbf{G}^2\,|_{U=U_{jh}^m, \mathbf{W}=\mathbf{W}_{jh}^m}, \qquad \mathbf{G}^{2+} = \mathbf{G}^2\,|_{U=U_{ih}^{m+1}, \mathbf{W}=\mathbf{W}_{ih}^{m+1}}.$$

Значение $(\hat{H}_n^\sigma)^m$ находится как среднее между двумя поверхностными состояниями:

$$(\hat{H}_n^\sigma)^m = \frac{1}{2}\left((H_n)_i^m + (H_n)_j^m\right).$$

Нормаль $\mathbf{n}$ к ребру σ направлена из ячейки с индексом i в ячейку с индексом j. Полученную СЛАУ решаем с использованием решателей из библиотеки NVIDIA AmgX.

3. Результаты расчетов

3.1. Используемые вычислительные средства и библиотеки

Для проведения вычислительных экспериментов использовался персональный компьютер с процессором Intel Core i5-8265U и видеокартой NVIDIA GeForce MX250. В расчетах использовались решатели из библиотеки AmgX версии 2.1.0.131-opensource. Для построения геометрических моделей и сеток использовался свободно распространяемый конечно-элементный генератор сетки Gmsh.

3.2. Обтекание симметричного профиля NACA0012 дозвуковым потоком газа

Был выполнен расчет течения вязкого сжимаемого газа в окрестности аэродинамического профиля NACA0012 с числом Маха $\mathrm{M} = 0.7$ под углом атаки 1.49° и числом Куранта, равным 10. Параметры расчетов обтекания профиля NACA0012 соответствуют параметрам эксперимента [11]. Число Рейнольдса для данной задачи равно $8.3 \cdot 10^6$. Хорда профиля равна 1 м, длина и ширина расчетной области равны 16 м. На рисунке 1 представлена геометрия задачи и показана расчетная сетка. Использовалась треугольная сетка, состоящая из 5970 ячеек. Характеристический размер ребра на границе профиля порядка $2.5 \cdot 10^{-3}$ м.

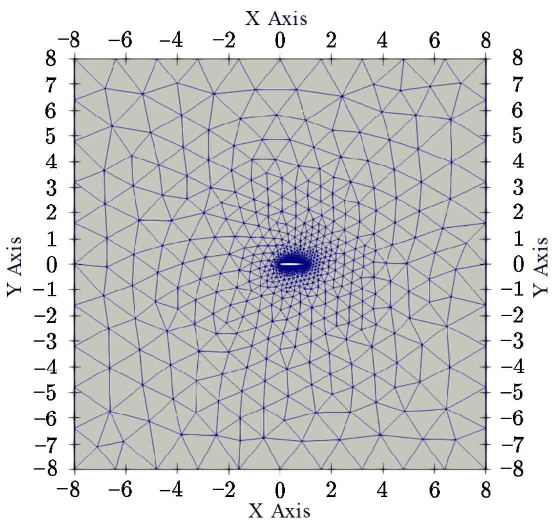


Рис. 1. Геометрия задачи и расчетная сетка

На левой границе области ставилось граничное условие втекания ($u = 220.8502$ м/с, $v = 5.7407$ м/с, $T = 248$K, $p = 46066.16$ Па), на верхней, нижней и правой границах ставилось граничное условие свободного вытекания. На профиле крыла ставилось граничное условие стенки с прилипанием.

Выполнены два расчета: с использованием решателей FGMRES и pBICGStab. Результаты вычислений представлены на рис. 2. Как видно, оба решателя демонстрируют сходимость к одной и той же картине установившегося течения, что является ожидаемым результатом.

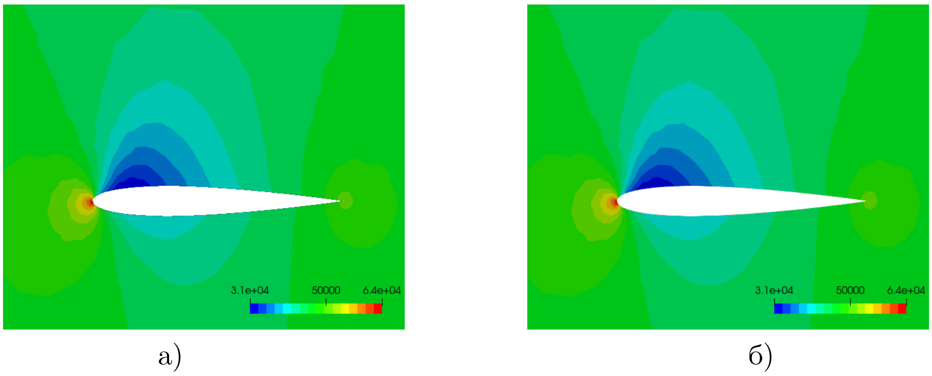


Рис. 2. Поле распределения давления около профиля: а) FGMRES; б) pBICGStab

График распределения коэффициента давления по поверхности (рис. 3) показывает достаточно хорошее совпадение с экспериментом [12]. Небольшое расхождение в нижней части графика объясняется тем, что при расчетах не учитывались эффекты турбулентности и использовалась довольно грубая сетка в окрестности профиля.

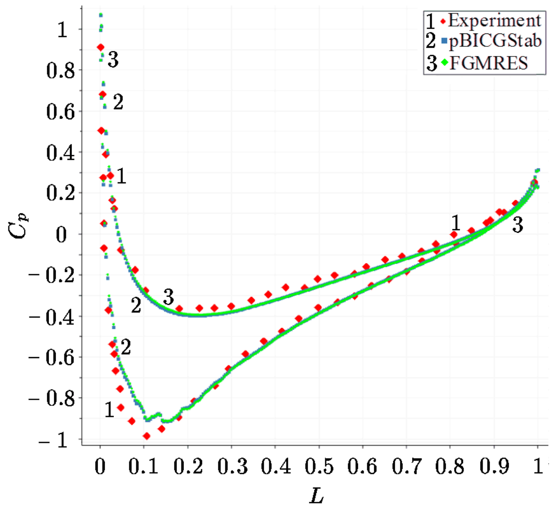


Рис. 3. Распределения коэффициента давления на поверхности профиля NACA0012

В таблице представлены средние времена выполнения одного шага по времени. Видно, что решатель pBICGStab демонстрирует лучшие результаты.

Таблица. Сравнение производительности

Решатель СЛАУ	Среднее время одного шага по времени, с
FGMRES	8
pBICGStab	5.94

Также была выполнена серия расчетов с описанной выше постановкой при углах атаки $\alpha_1 = 1.49°$, $\alpha_2 = 3.05°$, $\alpha_3 = 3.99°$ и $\alpha_4 = 4.8°$.

На рис. 4 представлены графики сходимости сил в зависимости от шага по времени. Видно, что сходимость по силам достигается примерно за 6000 шагов, что является приемлемым для данной постановки задачи.

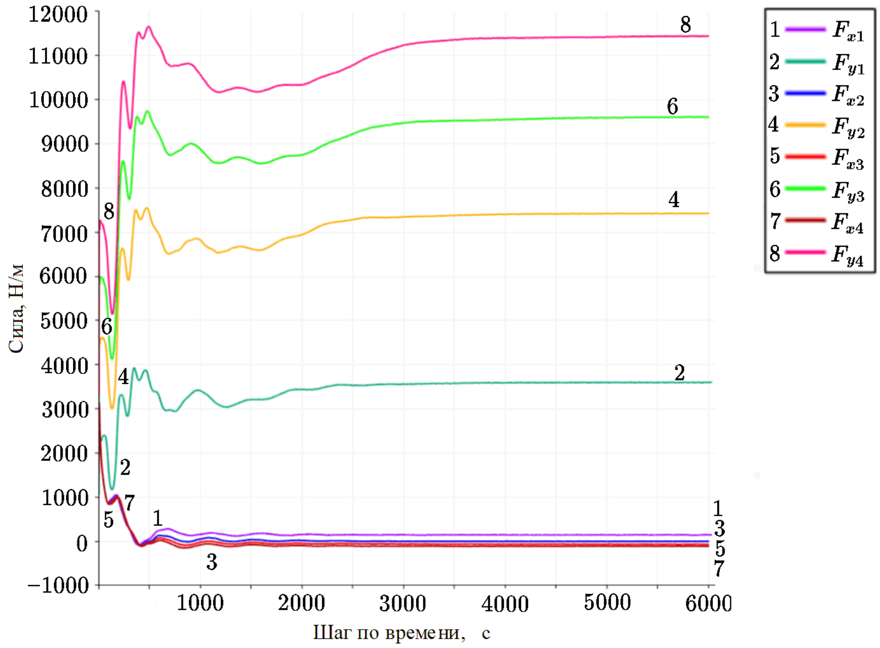


Рис. 4. Значения сил на каждой итерации по времени

На рис. 5 показана зависимость коэффициента подъемной силы от угла атаки. Незначительные отклонения от экспериментальных данных объясняются использованием довольно грубой сетки и тем, что не учитывались эффекты турбулентности, возникающей при рассматриваемых режимах течения, коэффициент динамической вязкости брался как постоянная величина.

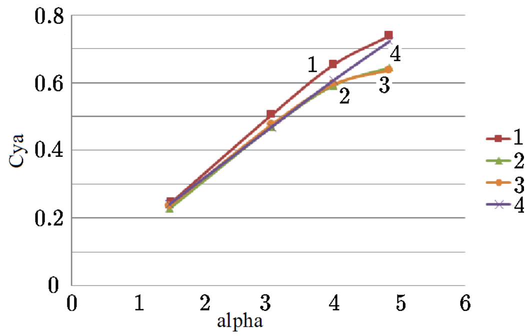


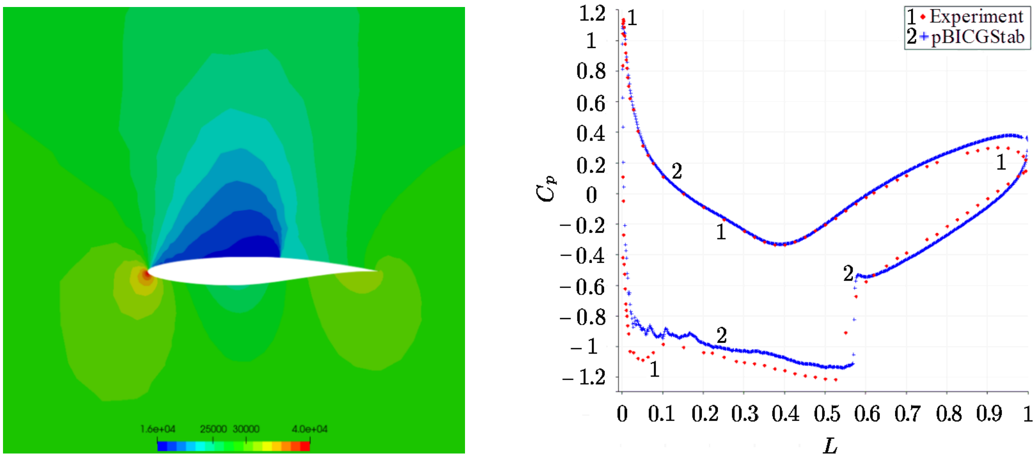
Рис. 5. Зависимость коэффициента подъемной силы от угла атаки (1 — эксперимент [12]; 2 — WENO-рек. без ограничителей, неявная схема [13]; 3 — WENO-рек. с ограничителями, неявная схема [13]; 4 — расчет на неструктурированной сетке неявной схемой РМГ)

3.3. Обтекание профиля RAE2822 дозвуковым потоком газа

Был выполнен расчет течения вязкого сжимаемого газа в окрестности аэродинамического профиля RAE2822 с числом Маха $M = 0.721$ под углом атаки $2.3°$. Число Рейнольдса для данной задачи равно $5.565 \cdot 10^6$. Хорда профиля равна 1 м, длина и ширина расчетной области равны 16 м. Использовалась расчетная сетка с характеристиками, аналогичными характеристикам из задачи об обтекании профиля NACA0012, разница в геометрии самого профиля. Использовалась треугольная сетка, состоящая из 7152 ячеек. Характеристический размер ребра на границе профиля порядка $2.3 \cdot 10^{-3}$ м.

На левой границе области ставилось граничное условие втекания ($u = 219.52$ м/с, $v = 8.853$ м/с, $T = 226$ К, $p = 28263.73$ Па), на верхней, нижней и правой границах ставилось граничное условие свободного вытекания. На профиле крыла ставилось условие стенки с прилипанием.

Выполнен расчет с использованием решателя pBICGStab. Результаты вычислений представлены на рис. 6.



а) б)

Рис. 6. Результаты расчетов для профиля RAE2822: а) поле распределения давления около профиля; б) коэффициент давления на поверхности профиля (Experiment — эксперимент [14]; pBICGStab — расчет на неструктурированной сетке неявной схемой РМГ)

Поле давления и график распределения коэффициента давления по поверхности (рисунок 6) показывает достаточно хорошее совпадение с экспериментом [14]. Расхождение в нижней части графика также объясняется тем, что при расчетах не учитывались эффекты турбулентности, коэффициент динамической вязкости считался постоянным и использовалась довольно грубая сетка в окрестности профиля.

Заключение

В результате была создана численная методика на основе неявной схемы метода Галеркина с разрывными базисными функциями для решения уравнений газовой динамики с использованием библиотеки NVIDIA AmgX. Аппроксимация исходных уравнений производится на неструктурированной треугольной сетке. Была произведена серия верификационных расчетов с использованием известных модельных задач. В задаче об обтекании симметричного профиля NACA0012 лучший результат по скорости сходимости и среднему времени выполнения одного шага по времени показал решатель pBICGStab. Серия расчетов обтекания симметричного профиля NACA0012 при различных углах атаки показала, что предлагаемая методика адекватно воспроизводит картины рассматриваемых течений, о чем свидетельствует сравнение с известными численными решениями и с экспериментальными данными. Полученная картина течения при моделировании несимметричного профиля RAE2822 также свидетельствует о возможности применения развиваемой методики для решения рассматриваемых задач газовой динамики. Расхождение значений коэффициента давления на поверхности профиля с экспериментальными данными говорит о необходимости учета турбулентных эффектов и учета зависимости значения коэффициента динамической вязкости от температуры. Также авторы считают, что в численной схеме необходим контроль выполнения дискретного аналога энтропийного неравенства. В связи с этим дальнейшая работа предполагает создание двумерной версии энтропийного ограничителя наклонов, идея которого описана в работе [15].

Литература

1. **Краснов М.М., Кучугов П.А., Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф.** Разрывный метод Галеркина на трехмерных тетраэдральных сетках. Использование операторного метода программирования // Матем. моделирование. — 2017. — Т. 29, № 2. — С. 3–22.
2. **Богданов П.Б., Горобец А.В., Суков С.А.** Адаптация и оптимизация базовых операций газодинамического алгоритма на неструктурированных сетках для расчетов на массивно-параллельных ускорителях // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. — 2013. — Т. 53, № 8. — С. 1360–1373. — DOI: https://doi.org/10.1134/S096554251308004610.1134/S0965542513080046.
3. **Simoncini V., Szyld D.B.** Flexible inner-outer Krylov subspace methods // SIAM J. Numer. Anal. — 2003. — Vol. 40, № 6. — P. 2219–2239. — DOI: https://doi.org/10.1137/S003614290240107410.1137/S0036142902401074.
4. **Naumov M. et al.** AmgX: a library for GPU accelerated algebraic multigrid and preconditioned iterative methods // SIAM J. Sci. Comput. — 2015. — Vol. 37, № 5. — P. 602–626. — DOI: https://doi.org/10.1137/14098026010.1137/140980260.
5. **Жалнин Р.В., Максимкин А.В., Масягин В.Ф. и др.** Исследование порядка точности неявной схемы для метода Галеркина с разрывными базисными функциями для решения задач газовой динамики // Журнал СВМО. — 2015. — Т. 17, № 1. — С. 48–54.
6. **Жалнин Р.В., Максимкин А.В., Масягин В.Ф. и др.** Об использовании WENO-ограничителя в неявной схеме для метода Галеркина с разрывными базисными функциями // Журнал СВМО. — 2015. — Т. 17, № 3. — С. 75–81.
7. **Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.** Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2 томах. — М.: Мир, 1990.
8. **Cockburn B., Shu C.-W.** The Local Discontinuous Galerkin Method for Time-Dependent Convection-Diffusion Systems // SIAM J. Numer. Anal. — 1998. — Vol. 35, № 6. — P. 2440–2463. — DOI: https://doi.org/10.1137/S003614299731671210.1137/S0036142997316712.
9. **Bassi F.A., Rebay S.** A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier–Stokes Equations // J. of Computational Physics. — 1997. — Vol. 131, № 2. — P. 267–279. — DOI: https://doi.org/10.1006/jcph.1996.557210.1006/jcph.1996.5572.
10. **Roe P.L.** Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. of Computations Physics. — 1981. — Vol. 43. — P. 357–378. — DOI: https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90128-510.1016/0021-9991(81)90128-5.
11. **Holst T.L.** Viscous Transonic Airfoil Workshop Compendium of Results. — California, Moffett Field: NASA Ames Research Center, 1987.
12. **Harris C.D.** Two-dimensional Aerodynamic Characteristics of the NACA0012 Airfoil in the Langley 8-Foot Transonic Pressure Tunnel. — Hampton: NACA Technical Memorandum 81927, Langley Research Center, 1981.
13. **Жалнин Р.В., Веселова Е.А., Дерюгин Ю.Н. и др.** Пакет программ ЛОГОС. Методика повышенного порядка точности на блочно-структурированных сетках с использованием

реконструкции типа WENO // Современные проблемы науки и образования. — 2012. — № 6. — URL: http://science-education.ru/ru/article/view?id=7329.

14. **Cook P.H., McDonald M.A., Firmin M.C.P.** Aerofoil RAE 2822 — Pressure Distributions, and Boundary Layer and Wake Measurements. — AGARD Report AR 138, 1979.

15. **Брагин М.Д., Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф.** Разрывный метод Галеркина с энтропийным ограничителем наклонов для уравнений Эйлера // Матем. моделирование. — 2020. — Т. 32, № 2. — С. 113–128.

Поступила в редакцию 14 мая 2020 г.
После исправления 11 мая 2021 г.
Принята к печати 5 октября 2021 г.

Литература в транслитерации

1. **Krasnov M.M., Kuchugov P.A., Ladonkina M.E., Tishkin V.F.** Razryvnyj metod Galyorkina na tryohmernyh tetraedral'nyh setkah. Ispol'zovanie operatornogo metoda programmirovaniya // Matem. modelirovanie. — 2017. — T. 29, № 2. — S. 3–22.

2. **Bogdanov P.B., Gorobec A.V., Sukov S.A.** Adaptaciya i optimizaciya bazovyh operacij gazodinamicheskogo algoritma na nestrukturirovannyh setkah dlya raschetov na massivno-parallel'nyh uskoritelyah // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiz — 2013. — T. 53, № 8. — S. 1360–1373. — DOI: https://doi.org/10.1134/S096554251308004610.1134/S0965542513080046.

3. **Simoncini V., Szyld D.B.** Flexible inner-outer Krylov subspace methods // SIAM J. Numer. Anal. 2003. — Vol. 40, № 6. — P. 2219–2239. — DOI: https://doi.org/10.1137/S003614290240107410.1137/S0036142902401074.

4. **Naumov M. et al.** AmgX: a library for GPU accelerated algebraic multigrid and preconditioned iterative methods // SIAM J. Sci. Comput. 2015. — Vol. 37, № 5. — P. 602–626. — DOI: https://doi.org/10.1137/14098026010.1137/140980260.

5. **Zhalnin R.V., Maksimkin A.V., Masyagin V.F. i dr.** Issledovanie poryadka tochnosti neyavnoj skhemy dlya metoda Galerkina s razryvnymi bazisnymi funkciyami dlya resheniya zadach gazovoj dinamiki // Zhurnal SVMO. — 2015. — T. 17, № 1. — S. 48–54.

6. **Zhalnin R.V., Maksimkin A.V., Masyagin V.F. i dr.** Ob ispol'zovanii WENO-ogranichitelya v neyavnoj skheme dlya metoda Galerkina s razryvnymi bazisnymi funkciyami // Zhurnal SVMO. — 2015. — T. 17, № 3. — S. 75–81.

7. **Anderson D., Tannekhill Dzh., Pletcher R.** Vychislitel'naya gidromekhanika i teploobmen. V 2 tomah. — M: Mir, 1990.

8. **Cockburn B., Shu C.-W.** The Local Discontinuous Galerkin Method for Time-Dependent Convection-Diffusion Systems // SIAM J. Numer. Anal. — 1998. — Vol. 35, № 6. — P. 2440–2463. — DOI: https://doi.org/10.1137/S003614299731671210.1137/S0036142997316712.

9. **Bassi F.A., Rebay S.** A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier–Stokes Equations // J. of Computational Physics. — 1997. — Vol. 131, № 2. — P. 267–279. — DOI: https://doi.org/10.1006/jcph.1996.557210.1006/jcph.1996.5572.

10. **Roe P.L.** Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. of Computations Physics. — 1981. — Vol. 43. — P. 357–378. — DOI: https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90128-510.1016/0021-9991(81)90128-5.

11. **Holst T.L.** Viscous Transonic Airfoil Workshop Compendium of Results. — NASA Ames Research Center, Moffett Field, California, 1987.

12. **Harris C.D.** Two-dimensional Aerodynamic Characteristics of the NACA0012 Airfoil in the Langley 8-Foot Transonic Pressure Tunnel. — NACA Technical Memorandum 81927, Langley Research Center, 1981.
13. **Zhalnin R.V., Veselova E.A., Deryugin Yu.N. i dr.** Paket programm LOGOS. Metodika povyshennogo poryadka tochnosti na blochno-strukturirovannyh setkah s ispol'zovaniem rekonstrukcii tipa WENO // Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya. — 2012. — № 6. — URL: http://science-education.ru/ru/article/view?id=7329http://science-education.ru/ru/article/view?id=7329.
14. **Cook P.H., McDonald M.A., Firmin M.C.P.** Aerofoil RAE 2822 — Pressure Distributions, and Boundary Layer and Wake Measurements. — AGARD Report AR 138, 1979.
15. **Bragin M.D., Kriksin Yu.A., Tishkin V.F.** Razryvnyj metod Galerkina s entropijnym ogranichitelem naklonov dlya uravnenij Ejlera // Matem. modelirovanie. — 2020. — T. 32, № 2. — S. 113–128.