О РАСЧЕТЕ ТОЧЕЧНОГО ВЗРЫВА В РАЗЛИЧНЫХ ГАЗАХ

Н. С. Мельникова, Т. М. Саламахин (*Москва*)

Автомодельная задача о точечном взрыве в газе без учета противодавления была решена Л. И. Седовым [1, 2]. Численные решения неавтомодельной задачи о точечном взрыве для случая сферической симметрии ($\nu = 3$) с показателем адиабаты $\gamma = 1.4$ даны в работах [3–5].

В литературе предложен ряд приближенных методов расчета неавтомодельных течений, пригодных в основном для описания распространения по газу ударных волн большой интенсивности; укажем, например, метод Г. Г. Черного [6, 7], основанный на разложении газодинамических величин по степеням параметра $\varkappa$, характеризующего отношение плотности газа перед волной к плотности газа за волной.

Для решения ряда неавтомодельных задач при исследовании ударных волн большой интенсивности во многих работах использовался метод линеаризации исходных уравнений около неавтомодельного решения [8–13]; в этом методе линеаризация велась по безразмерному параметру q, характеризующему интенсивность ударной волны и равному отношению квадрата скорости звука в невозмущенном газе к квадрату скорости ударной волны [1].

Т. М. Саламахин предложил приближенный метод решения неавтомодельных задач о неустановившихся движениях газа внутри одномерных ударных волн при помощи введенного им замыкающего уравнения, формулирующего гипотезу о том, что для любого фиксированного момента времени распределение плотности по пространственной координате может быть описано степенным законом. Ниже приводится изложение этого метода, а также некоторое его развитие и результаты выполненных расчетов неавтомодельной задачи о точечном взрыве в случаях плоской ($\nu = 1$), цилиндрической ($\nu = 2$) и сферической ($\nu=3$) симметрии для широкого диапазона значений $\gamma = 1.2$, 1.4, $^5/_3$, 2, 2.17, 3, 4, 7. Представленные в работе результаты указывают на существенную зависимость решения от значений параметров ν и γ.

1. Рассматривается совершенный газ, не вязкий и не теплопроводный. Предполагается, что газ находится в покое, начальная плотность ρ_1, начальное давление p_1. В момент времени $t = 0$ в центре симметрии мгновенно происходит взрыв с конечной энергией E_0.

Как известно [2], систему уравнений газовой динамики, описывающих одномерные движения газа за фронтом ударной волны при взрыве, можно взять в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial r} + \frac{(\nu - 1)\rho v}{r} = 0$$

$$\frac{dE}{dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = 0 \tag{1.1}$$

где t — время, r — эйлерова координата, v — скорость, p — давление, ρ — плотность, E — внутренняя энергия единицы массы газа, ν — параметр, характеризующий симметрию движения ($\nu = 1, 2, 3$ соответственно для плоской, цилиндрической и сферической симметрии).

На ударной волне (при $r = r_2$) должны выполняться три граничных условия

$$v(r_2, t) = v_2, \quad \rho(r_2, t) = \rho_2, \quad p(r_2, t) = p_2 \tag{1.2}$$

Здесь

$$v_2 = \frac{2c}{\gamma+1}\left[1 - \frac{a_1^2}{c^2}\right], \qquad \rho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1\left[1 + \frac{2}{\gamma-1}\frac{a_1^2}{c^2}\right]^{-1}$$

$$p_2 = \frac{2\rho_1 c^2}{\gamma+1}\left[1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{a_1^2}{c^2}\right], \qquad c = \frac{dr_2}{dt}$$

При этом r_2 — радиус ударной волны, γ — показатель адиабаты, a_1 — скорость звука в невозмущенном газе.

В центре симметрии имеем граничное условие для скорости

$$v(0, t) = 0 \tag{1.3}$$

В момент $t = 0$ в центре выделяется конечная энергия E_0 и заданы начальные условия

$$v(r, 0) = 0, \qquad \rho(r, 0) = \rho_1 = \text{const}, \qquad p(r, 0) = p_1 = \text{const}, \qquad r_2(0) = 0 \tag{1.4}$$

---

[1] Этот метод предложен в диссертации Н. С. Бурновой (Мельниковой), защищенной в МГУ в 1953 г. (см. РЖМех. 1954, № 3, 2535).

Из системы определяющих параметров ρ_1, p_1, E_0, r, t, ν, γ ясно, что искомые безразмерные функции

$$f(\lambda, q) = \frac{v}{v_2}, \quad g(\lambda, q) = \frac{\rho}{\rho_2}, \quad h(\lambda, q) = \frac{p}{p_2} \qquad \left(\lambda = \frac{r}{r_2}, \; q = \frac{a_1}{c}\right) \tag{1.5}$$

будут зависеть от постоянных ν и γ.

Введем соотношение, которое связывало бы энергию взрыва E_0 с параметрами на фронте ударной волны. Сумма внутренней и кинетической энергии в каждый момент времени должна равняться начальной энергии газа, вовлеченного в движение, и энергии взрыва E_0

$$E_0 + \delta_\nu \int_0^{r_2} \frac{p_1}{\gamma - 1} r^{\nu-1} dr = \delta_\nu \int_0^{r_2} \left[\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\gamma - 1}\right] \rho r^{\nu-1} dr$$

$$\delta_\nu = 2\pi(\nu - 1) + (\nu - 2)(\nu - 3) \tag{1.6}$$

Выпишем интегральный закон сохранения массы

$$\int_0^{r_2} \rho r^{\nu-1} dr = \int_0^{r_2} \rho_1 r^{\nu-1} dr = \frac{\rho_1 {r_2}^\nu}{\nu} \tag{1.7}$$

Если перейти к безразмерным переменным (1.5), то интегральные соотношения (1.6), (1.7) можно записать в виде

$$E_0 + \delta_\nu \frac{p_1 {r_2}^\nu}{\nu(\gamma - 1)} = \delta_\nu {r_2}^\nu \left[\frac{\rho_2 {v_2}^2}{2} \int_0^1 g f^2 \lambda^{\nu-1} d\lambda + \frac{p_2}{\gamma - 1} \int_0^1 h \lambda^{\nu-1} d\lambda\right] \tag{1.8}$$

$$\int_0^1 g \lambda^{\nu-1} d\lambda = \frac{\rho_1}{\nu \rho_2} \tag{1.9}$$

Для определения вида функции $g(\lambda, q)$ к уравнению (1.9) присоединим следующие условия. Так как плотность — положительная величина, то

$$g \geqslant 0 \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1) \tag{1.10}$$

Из условия (1.2) на фронте ударной волны имеем

$$g = 1 \quad \text{при } \lambda = 1 \tag{1.11}$$

При вырождении ударной волны в звуковую должно выполняться условие

$$[dg / d\lambda]_{t\to\infty} \equiv 0 \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1) \tag{1.12}$$

В принятой постановке задачи из асимптотического поведения решения вблизи центра взрыва имеем

$$g = 0 \quad \text{при } \lambda = 0 \tag{1.13}$$

Если взять функцию g в виде

$$g = A(t) \lambda^{\alpha(t)} + B \tag{1.14}$$

то при соответствующем выборе коэффициентов A, B и $\alpha(t)$ можно удовлетворить уравнению (1.9) и условиям (1.10) — (1.13). После подстановки g из (1.14) в уравнение (1.9) найдем

$$\frac{A(t)}{\alpha(t) + \nu} = \frac{\rho_1}{\nu \rho_2} - \frac{B}{\nu} \tag{1.15}$$

Соответственно из условий (1.10) — (1.13) получим

$$A(t) \lambda^{\alpha(t)} + B \geqslant 0, \qquad A(t) + B = 1, \qquad A(\infty)\, \alpha(\infty)\, \lambda^{\alpha(\infty)-1} \equiv 0, \qquad B = 0 \tag{1.16}$$

Из последних трех условий (1.16) следует

$$A(t) \equiv 1, \quad \alpha(\infty) = 0 \tag{1.17}$$

При этом первое условие (1.16) удовлетворяется автоматически. Из соотношения (1.15) получаем

$$\alpha(t) = \nu(\rho_2 / \rho_1 - 1) \tag{1.18}$$

Таким образом, используя (1.14) и (1.16), из (1.9) получим

$$g(\lambda, q) = \lambda^{\alpha(t)} \tag{1.19}$$

причем функция $\alpha(t)$ однозначно определяется по формуле (1.18). В дальнейшем при решении задачи будем считать, что распределение плотности внутри ударной волны определяется соотношениями (1.18) и (1.19); тогда из второго уравнения (1.1) можно определить скорость, а из первого — давление в газе; при этом в системе уравнений (1.1) не удовлетворяется третье из них — уравнение энергии. В дальнейшем закону сохранения энергии будем удовлетворять в интегральной форме для всей области возмущенного движения, заключенного внутри ударной волны.

Пользуясь соотношениями (1.5), запишем выражение для плотности (1.19) в виде

$$\rho = \rho_2 (r / r_2)^{\alpha(t)} \tag{1.20}$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} - \rho\left[\frac{d\ln\rho_2}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}\ln\frac{r}{r_2} - \frac{\alpha(t) d\ln r_2}{dt}\right], \qquad \frac{\partial\rho}{\partial r} = \alpha(t)\frac{\rho}{r} \tag{1.21}$$

Подставляя эти выражения во второе уравнение (1.1), получим

$$\frac{\partial v}{\partial r} - (1-\alpha-\nu)\frac{v}{r} - \left(\frac{\alpha}{r_2}\frac{dr_2}{dt} - \frac{d\ln\rho_2}{dt}\right) + \frac{d\alpha}{dt}\ln\frac{r}{r_2} = 0 \tag{1.22}$$

Решая это уравнение, получим выражение для скорости

$$v(r, t) = -\frac{r\ln(r / r_2)}{(\alpha+\nu)}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{r}{(\alpha+\nu)^2}\frac{d\alpha}{dt} + A(t)\frac{r}{\alpha+\nu} + \frac{\varphi(t)}{r^{\alpha+\nu-1}} \tag{1.23}$$

где

$$A(t) = \frac{\alpha}{r_2}\frac{dr_2}{dt} - \frac{1}{\rho_2}\frac{d\rho_2}{dt}$$

Из граничного условия в центре (1.3) получаем, что произвольная функция $\varphi(t) \equiv 0$; поэтому, подставив в (1.23) выражение для $\alpha(t)$ из (1.18), получим

$$v(r, t) = v_2\left(1 - \frac{r_2}{\rho_2 v_2}\frac{d\rho_2}{dt}\ln\frac{r}{r_2}\right)\frac{r}{r_2} \tag{1.24}$$

Отсюда видно, что условие для скорости (1.2) автоматически выполняется. Подставив $v(r, t)$, $\rho(r, t)$ в первое уравнение (1.1), согласно (1.20) и (1.24), получим

$$\frac{dp}{dr} = -\rho_2\left(\frac{r}{r_2}\right)^{\alpha(t)+1}\left[K + L\ln\frac{r}{r_2} + M\left(\ln\frac{r}{r_2}\right)^2\right] \tag{1.25}$$

Здесь

$$K = \frac{v_2^2}{r_2} + \frac{dv_2}{dt} - \frac{v_2}{\rho_2}\frac{d\rho_2}{dt} - \frac{v_2}{r_2}\frac{dr_2}{dt} + \frac{1}{\rho_2}\frac{d\rho_2}{dt}\frac{dr_2}{dt}$$

$$L = 2M - \frac{2v_2}{\rho_2}\frac{d\rho_2}{dt} - \frac{r_2}{\rho_2}\frac{d^2\rho_2}{dt^2}, \qquad M = \frac{r_2}{\rho_2^2}\left(\frac{d\rho_2}{dt}\right)^2 \tag{1.26}$$

Решая уравнение (1.25), найдем

$$p(r, t) = -\frac{\rho_2 r_2}{\alpha+\nu}\left(\frac{r}{r_2}\right)^{\alpha+2}\left[H_1 + H_2\ln\frac{r}{r_2} + H_3\left(\ln\frac{r}{r_2}\right)^2\right] + f(t) \tag{1.27}$$

$$\left(H_1 = K - \frac{H_2}{\alpha+2}, \quad H_2 = L - \frac{2M}{\alpha+2}, \quad H_3 = M\right)$$

Функцию $f(t)$ определяем из граничного условия на ударной волне (1.2)

$$f(t) = p_2 + \frac{H_1\rho_2 r_2}{(\alpha+2)} \tag{1.28}$$

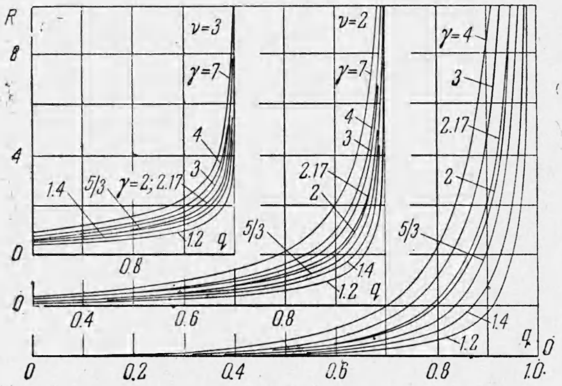
После некоторых упрощений формулы, дающие распределение безразмерных характеристик движения в возмущенной области, можно записать так

$$\frac{p}{p_2} = 1 + \frac{H_1\rho_2 r_2}{p_2(\alpha+2)}\left[1 - \left(\frac{r}{r_2}\right)^{\alpha+2}\right] - \frac{\rho_2 r_2}{p_2(\alpha+2)}\left(\frac{r}{r_2}\right)^{\alpha+2}\left(H_2 + H_3\ln\frac{r}{r_2}\right)\ln\frac{r}{r_2}$$

$$\frac{v}{v_2} = \left[1 - H_4\ln\frac{r}{r_2}\right]\frac{r}{r_2}, \qquad \frac{\rho}{\rho_2} = \left(\frac{r}{r_2}\right)^{\alpha(t)} \tag{1.29}$$

$$\left(H_4 = \frac{r_2}{\rho_2 v_2}\frac{d\rho_2}{dt}, \quad \alpha(t) = \nu\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)\right)$$

Решение (1.29) удовлетворяет всем граничным условиям; время t в это решение в явном виде не входит, а выражается через параметры на фронте ударной волны и координату фронта. Из (1.29), (1.2) ясно, что характеристики движения газа в возмущенной области выражаются через функцию $r_2(t)$, описывающую закон распространения ударной волны; если функция $r_2(t)$ известна, например, из эксперимента, то формулы (1.29) дают полное решение задачи о взрыве. Если функция $r_2(t)$ неизвестна, то, подчинив решение (1.29) интегральному закону сохранения энергии (1.8), получим уравнение, из которого можно найти закон движения ударной волны $r_2(t)$. Для этого, кроме величин (1.5), введем безразмерные величины



Фиг. 1

$$R = \frac{r}{r_0}, \qquad \tau = \frac{t}{t^\circ} \tag{1.30}$$

$$\left(r^\circ = \left(\frac{E_0}{p_1}\right)^{1/\nu}, \quad t^\circ = \left(\frac{E_0}{p_1}\right)^{1/\nu} \frac{1}{a_1}\right)$$

Здесь r° — динамическая длина, $[r^\circ] = L$, а t° — динамическое время, $[t^\circ] = T$. Тогда коэффициенты H_1, H_2, H_3, H_4 в формулах (1.29) в новых переменных могут быть представлены в виде

$$\begin{gathered} H_1 = -\frac{2a_1^2 (p_1 / E_0)^{1/\nu}}{(\gamma+1)\, q} \left\{ \frac{(1-q^2)(\gamma - 1 + 2q^2)}{q(\gamma+1) R} + \frac{(1+3q^2)}{q^2} \frac{dq}{dR} + \right. \\ + \frac{4(1-q^2)}{[\nu + \gamma - 1 + (2-\nu) q^2]} \frac{dq}{dR} + \frac{(\gamma+1) R}{[\nu + \gamma - 1 + (2-\nu) q^2]} \frac{d^2 q}{dR^2} - \\ \left. - \frac{4(\gamma+1) qR}{[\nu + \gamma - 1 + (2-\nu) q^2]^2} \left(\frac{dq}{dR}\right)^2 \right\} \end{gathered} \tag{1.31}$$

$$\begin{gathered} H_2 = 16 a_1^2 \left(\frac{p_1}{E_0}\right)^{1/\nu} \left\{ \frac{(1-q^2)}{(\gamma+1)\, q\, (\gamma - 1 + 2q^2)} \frac{dq}{dR} + \right. \\ \left. + \frac{R}{4(\gamma - 1 + 2q^2)\, q} \frac{d^2 q}{dR^2} - \frac{R}{[\nu + \gamma - 1 + (2-\nu) q^2](\gamma - 1 + 2q^2)} \left(\frac{dq}{dR}\right)^2 \right\} \end{gathered} \tag{1.32}$$

$$H_3 = \frac{16 a_1^2 (p_1 / E_0)^{1/\nu} R}{(\gamma - 1 + 2q^2)^2} \left(\frac{dq}{dR}\right)^2, \qquad H_4 = -\frac{2(\gamma+1) qR}{(\gamma - 1 + 2q^2)(1-q^2)} \frac{dq}{dR} \tag{1.33}$$

Заменяя в уравнении сохранения энергии (1.8) функции $f(\lambda, q)$, $g(\lambda, q)$, $h(\lambda, q$ соответствующими им выражениями из решения (1.29) с учетом (1.31) — (1.33), для определения $q(R)$ получим

$$\begin{gathered} qR^2 \frac{d^2 q}{dR^2} - 4[\nu(\gamma - 1) + 2] \frac{q^2 R^2}{\omega} \left(\frac{dq}{dR}\right)^2 + \frac{(1+3q^2) R\omega}{2(\gamma+1)\, q} \frac{dq}{dR} + \\ + \frac{2qR}{(\gamma+1)} [\nu(\gamma-1) + 2](1-q^2) \frac{dq}{dR} + \frac{\nu(\gamma-1)\, \omega^2 q^2}{4\gamma(\gamma-1)\, \delta_\nu R^\nu} + \\ + \frac{\omega(1-q^2)}{2(\gamma+1)^2} [\psi - \omega - \nu(\gamma-1)(1-q^2)] = 0 \qquad \left(\begin{aligned} \psi &= \gamma - 1 + 2q^2, \\ \omega &= 2\nu + (\nu+2)(\gamma-1) + 4q^2 \end{aligned}\right) \end{gathered} \tag{1.34}$$

Нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка (1.34) в элементарных функциях не интегрируется. Для приближенного интегрирования уравнения (1.34) сведем его к системе двух обыкновенных уравнений первого порядка

$$\begin{gathered} \frac{d\sigma}{dq} = \frac{4[\nu(\gamma-1) + 2]\, q\sigma}{\omega} - \frac{2[\nu(\gamma-1)+2](1-q^2)}{(\gamma+1) R} - \frac{(1+3q^2)}{2(\gamma+1)\, q^2 R} - \\ - \frac{\nu(\gamma-1)\, \omega^2 q}{4\gamma(\gamma+1)\, \delta_\nu R^{\nu+2}} \frac{1}{\sigma} + \frac{\omega[\omega - \psi + \nu(\gamma-1)(1-q^2)](1-q^2)}{2(\gamma+1)^2 R^2 q\sigma}, \qquad \frac{dR}{dq} = \frac{1}{\sigma} \end{gathered} \tag{1.35}$$

Начальное условие для решения системы (1.35) нужно брать в точке ($q = 0$, $R = 0$), но эта точка для системы (1.35) будет особой точкой. В качестве асимптотики вблизи точки ($q = 0$, $R = 0$) при счете системы (1.35) брали решение линеаризованной задачи о взрыве, при этом решении $R(q)$ и $\sigma(q)$ определяются по формулам

$$R^{\nu} = \left(\frac{2}{2+\nu}\right)^2 \frac{1}{\gamma\alpha} q^2 e^{A_1 q^2}, \qquad \sigma(q) = \frac{\nu q}{2R(1 + A_1 q^2)} \tag{1.36}$$

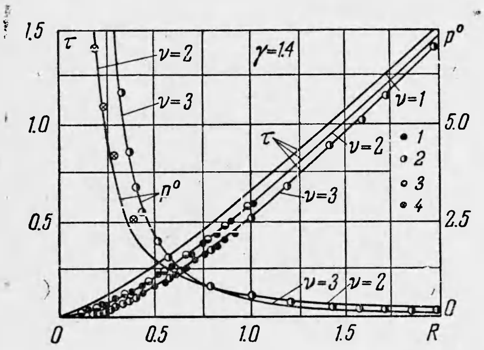
Здесь постоянные A_1 и α_1 в зависимости от ν и γ известны из решения линеаризированной задачи о взрыве [8, 13].

Для системы (1.35) вблизи особой точки ($q = 0$, $R = 0$) можно пользоваться асимптотическими выражениями

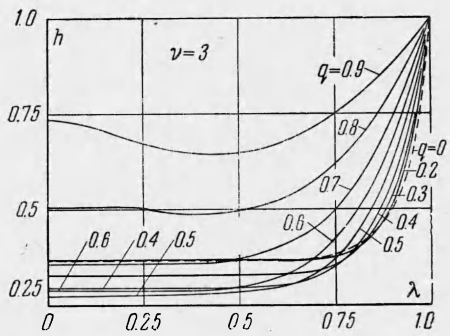
$$q = C_0 R^{\nu/2}, \qquad C_0^2 = \frac{[\nu(3\gamma - 1) + 2(\gamma - 1)]\,\delta_\nu \gamma}{\nu(\gamma^2 - 1)[2\nu + (\nu + 2)(\gamma - 1)]} \tag{1.37}$$

полученными как решение уравнения (1.34) с линеаризированными коэффициентами. Это асимптотическое представление до значений $q = 0.01$ практически совпадает с асимптотикой (1.36).

2. Для нахождения функции $R(q)$ нужно численно интегрировать систему уравнений (1.35) с асимптотикой (1.36) или при малых q (до $q = 0.01$) с асимптотикой (1.37).



Фиг 2



Фиг. 3

Для уравнения (1.34) приближенное аналитическое решение можно предложить в виде

$$q = C_0 R^{\nu/2}\left[\cos\frac{\pi q}{2}\right]^n \qquad \left(n = \frac{\nu + 1}{\nu + 2}\right) \tag{2.1}$$

Счет по формуле (2.1) в сравнении с точным численным счетом уравнений (1.35) при $\gamma = 1.4$ дает погрешность, равную 6—8%.

На фиг. 1 представлены зависимости $R(q)$ для $\nu = 1, 2, 3$ и $\gamma = 1.2, 1.4, 1.67, 2, 2.17, 3, 4, 7$, найденные численным интегрированием системы (1.35) методом Рунге — Кутта.

Пользуясь найденными значениями $R(q)$ и $\sigma(q)$, безразмерные характеристики движения газа рассчитываются по формулам

$$f(\lambda, q) = (1 + N_4 \ln\lambda)\lambda, \qquad g(\lambda, q) = \lambda^{2\nu(1-q^2)/\psi}$$

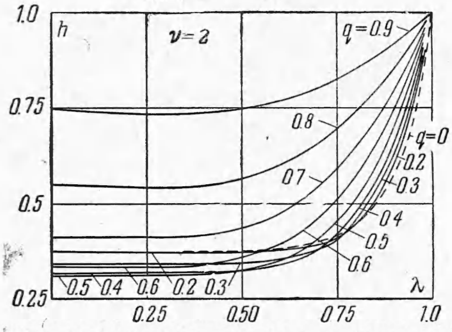
$$h(\lambda, q) = 1 - N_1(1 - \lambda^{2\xi/\psi}) - (N_2 + N_3\ln\lambda)\lambda^{2\xi/\psi}\ln\lambda, \qquad \tau = \int_0^R q(R)\,dR \tag{2.2}$$

при этом коэффициенты N_i ($i = 1, 2, 3, 4$) выражаются через H_i формулами

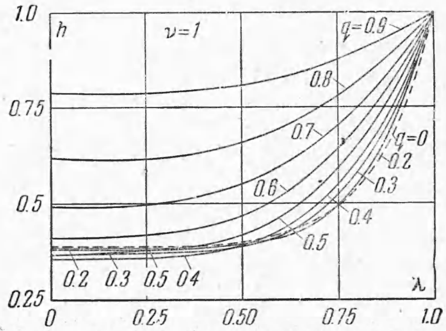
$$N_1 = -f_2 H_1, \qquad N_2 = f_2 H_2, \qquad N_3 = f_2 H_3, \qquad N_4 = -H_4 \tag{2.3}$$

$$f_2 = \frac{\rho_2 r_2}{p_2(\alpha + 2)} = \frac{a_1^{-2}(E_0/p_1)^{1/\nu}\gamma(\gamma + 1)^2 q^2 R}{2\xi[2\gamma + (1 - \gamma)q^2]}, \qquad \xi = \frac{\omega - \nu\psi}{2}$$

По формулам (2.2), (2.3) проведены расчеты функций $f(\lambda, q)$, $g(\lambda, q)$, $h(\lambda, q)$, $\tau(R)$, характеризующих движение газа, для $\nu = 1, 2, 3$ и $\gamma = 1.2, 1.4, 1.67, 2, 2.17, 3, 4, 7$. На фиг. 2—5 для примера приведены результаты расчета для $\nu = 1, 2, 3$ и $\gamma = 1.4$. На фиг. 2 представлен закон движения ударной волны $\tau(R)$ и избыточные давления на фронте $p^\circ = (p_2 - p_1) / p_1$. На фиг. 2 точками *2* показаны при $\nu = 3$, $\gamma = 1.4$ данные численного расчета Д.Е.Охоцимского и др. [3], основанного на использовании метода сеток.



Фиг. 4



Фиг. 5

При $\nu = 2, 3$ дано сравнение полученной в работе кривой $\tau(R)$ с экспериментальными данными В. И. Дешина и Т. М. Саламахина (*3* — экспериментальные данные В. И. Дешина, *1* — экспериментальные данные Т. М. Саламахина). Избыточные давления на фиг. 2 сравниваются с экспериментальными данными М. А. Цикулина (*4* — экспериментальные данные М. А. Цикулина). Как видно из фиг. 2, все экспериментальные данные группируются вдоль теоретических кривых; избыточные давления на фронте ударной волны, полученные в настоящей работе до $p^\circ = 0.6$, очень близки к полученным в работе [3], а для $p^\circ \leqslant 0.6$ кривая избыточных давлений, полученная в работе, лежит ниже данных численного расчета [3]; для закона движения ударной волны данные численного расчета методом сеток [3] практически совпадают с данными, полученными в настоящей работе.

Поступила 24 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, 4-е изд. Гостехиздат, М., 1957.
3. Охоцимский Д. Е., Кондрашова И. Л., Власова З. П., Казакова Р. К. Расчет точечного взрыва с учетом противодавления. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1957, т. 50.
4. Goldstine H., Neumann I. Blast Wave Calculation. Commun. Pure and Appl. Mathem., 1955, v. 8, p. 327—354.
5. Brode H. Numerical Solutions of Spherical Blast Waves. J. Appl. Phys., 1955, v. 26, No. 6, p. 766—775.
6. Черный Г. Г. Адиабатические движения совершенного газа с ударными волнами большой интенсивности. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 3.
7. Черный Г. Г. Применение интегральных соотношений в задачах о распространении сильных ударных волн. ПММ, 1960, т. 24, вып. 1.
8. Sakurai A. On the propagation and structure of the blast wave. J. Phys. Soc. Japan, 1953, v. 8, No. 5; 1957, v. 9, No. 2.
9. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. Физматгиз, М., 1961.
10. Коробейников В. П., Мельникова Н. С. О точных решениях линеаризированной задачи о точечном взрыве с противодавлением. Докл. АН СССР, 1957, т. 16, № 2; 1959, т. 126, № 1.
11. Кочина Н. Н., Мельникова Н. С. О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем, с учетом противодавления. ПММ, 1958, т.22, вып. 4.
12. Кочина Н. Н., Мельникова Н. С. О движении поршня в идеальном газе. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2.
13. Чушкин П. И., Коробейников В. П. Расчет начальной стадии точечного взрыва в различных газах. ПМТФ, 1963, № 4.