УДК 532.59+519.63

УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННОЙ МОДЕЛИ МЕЛКОЙ ВОДЫ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРЕ И ВЫПОЛНЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

З. И. Федотова, Г. С. Хакимзянов

Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mails: zf@ict.nsc.ru, khak@ict.nsc.ru

Получены нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на сфере без использования предположения о потенциальности течения. Выведены уравнения типа уравнений Буссинеска для слабонелинейных волн над подвижным дном. Установлено, что для всех полученных нелинейно-дисперсионных уравнений на сфере имеет место баланс полной энергии.

Ключевые слова: уравнения мелкой воды на сфере, поверхностные волны, нелинейно-дисперсионные уравнения, уравнения типа уравнений Буссинеска, закон сохранения энергии.

Введение. Приближенные гидродинамические модели, описывающие длинноволновые процессы в жидкой среде, активно развиваются на протяжении нескольких десятилетий: изучаются математические свойства соответствующих систем дифференциальных уравнений и увеличивается количество практических приложений, что позволяет совершенствовать модели и распространять их на более общие случаи. Среди опубликованных в последнее время работ, посвященных созданию нелинейно-дисперсионных (НЛД) моделей гидродинамики, следует отметить работы [1–3], в которых изучаются модели, учитывающие завихренность, эффекты сферичности и вращения Земли. Усложнение НЛД-моделей обусловлено необходимостью численного моделирования современных задач о распространении поверхностных волн в океане и прибрежной зоне.

Проблемы обоснования постановок начально-краевых задач, поиска аналитических решений изучены лишь для некоторых классов НЛД-уравнений на плоскости в случае ровного дна [4, 5]. Следует отметить, что для НЛД-моделей в сферической геометрии результаты, аналогичные полученным для бездисперсионных моделей мелкой воды на сфере [6, 7], практически отсутствуют. Таким образом, имеет место разрыв между активным применением НЛД-уравнений в расчетах распространения океанических волн и обоснованием используемых моделей.

Важным свойством системы уравнений физического происхождения является выполнение законов сохранения. В случае идеальной однородной жидкости уравнения Эйлера удовлетворяют законам сохранения массы, импульса, полной энергии. При переходе к приближенным уравнениям возможна потеря этих свойств. Известная модель Перегрина [8]

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-00721-а) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ–5006.2014.9).

для НЛД-уравнений на плоскости даже в случае ровного дна не имеет закона сохранения энергии и не инвариантна относительно преобразования Галилея. Закон сохранения энергии для полностью нелинейных НЛД-моделей в плоском случае для стационарной донной поверхности рассмотрен в [9, 10], а в работе [11] законы изменения энергии и сохранения потенциального вихря описаны и в случае подвижного дна.

Наличие указанных свойств у приближенных гидродинамических моделей имеет большое значение при построении вычислительных алгоритмов, главным образом для контроля точности расчетов.

Целью настоящей работы является совершенствование НЛД-моделей гидродинамики на вращающейся притягивающей сфере. Первой задачей является вывод уравнений без использования условия потенциальности исходного течения. Как правило, при выводе известных НЛД-моделей, основанном на предварительном разложении основных функций в ряды по глубине или по малому параметру, это условие применяется. Завихренность допускается при выводе модели Грина — Нагди [12], но при этом предполагается независимость компонент горизонтальной скорости от вертикальной координаты.

В работе [13] на основе предварительного масштабирования трехмерных уравнений гидродинамики на вращающейся сфере в предположении малости толщины океанического слоя воды и наличия малых параметров, учитывающих длинноволновый характер рассматриваемых процессов, получены НЛД-модели мелкой воды на сфере. При выводе использовалось условие потенциальности течения. В работе [11] для случая плоской геометрии показано, что НЛД-уравнения можно получить без использования предположения о потенциальности течения, введя условие независимости главной части горизонтальной составляющей вектора скорости от вертикальной координаты, естественное для длинноволновых течений. В настоящей работе аналогичный результат получен для случая сферической геометрии.

Второй задачей, рассмотренной в данной работе для сферического случая, является обеспечение НЛД-моделей балансовыми соотношениями, согласованными с законами сохранения массы, импульса и энергии исходной гидродинамической системы уравнений. Заметим, что полученные ниже уравнения баланса при “проектировании” их на касательную плоскость переходят в известные уравнения [11].

С учетом необходимости численного моделирования практических задач при наличии волн с умеренными амплитудами выведены две слабонелинейные НЛД-модели, для которых сохраняется основное свойство исходных моделей, т. е. имеет место баланс полной энергии.

1. Постановка задачи для уравнений Эйлера. Введем систему координат $O\lambda\theta r$, начало которой находится в центре сферы, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω ($0 \leqslant \lambda < 2\pi$ — долгота, отсчитываемая к востоку от некоторого меридиана; $\theta = \pi/2 - \varphi$ — дополнение до широты $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$; r — радиальная координата, отсчитываемая от центра сферы). Ньютоновская сила притяжения $\boldsymbol{g}$, действующая на частицу жидкости единичной массы, считается направленной к центру Земли. Толщина слоя воды предполагается малой по сравнению с радиусом Земли R, поэтому величина $g = |\boldsymbol{g}|$ и плотность воды ρ принимаются постоянными во всем слое. Введем следующие обозначения: $J = -r^2 \sin\theta$ — якобиан преобразования декартовых координат в сферические; v^γ ($\gamma = 1, 2, 3$) — контравариантные компоненты скорости ($v^1 = \dot{\lambda}$, $v^2 = \dot{\theta}$, $v^3 = \dot{r}$); v_γ ($\gamma = 1, 2, 3$) — ковариантные компоненты скорости, связанные с контравариантными известными формулами [13, 14]

$$v_1 = \Omega r^2 \sin^2\theta + r^2 \sin^2\theta\, v^1, \qquad v_2 = r^2 v^2, \qquad v_3 = v^3 = w. \tag{1}$$

Используя эти обозначения, уравнения идеальной несжимаемой жидкости можно записать в виде, предложенном в [13]:

$$(Jv^1)_\lambda + (Jv^2)_\theta + (Jw)_r = 0; \tag{2}$$

$$\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + w\boldsymbol{v}_r + \nabla p = \boldsymbol{r}; \tag{3}$$

$$w_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla w + ww_r + p_r = -g + r_3. \tag{4}$$

Здесь w — радиальная, или "вертикальная", составляющая скорости v^3; $\boldsymbol{u} = (v^1, v^2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^{\mathrm{T}}$ — векторы, составленные соответственно из контравариантных и ковариантных компонент "горизонтальной" составляющей вектора скорости; p — давление; $\nabla = (\partial/\partial\lambda; \partial/\partial\theta)$; $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2)^{\mathrm{T}}$,

$$r_1 = 0, \quad r_2 = (\Omega + v^1)^2 r^2 \sin\theta\cos\theta, \quad r_3 = (\Omega + v^1)^2 r \sin^2\theta + (v^2)^2 r. \tag{5}$$

Для сокращения записи в уравнениях (2)–(4), а также во всех последующих формулах, в том числе в формулах обезразмеривания, плотность воды ρ отсутствует ($\rho \equiv 1$).

При постановке задачи о поверхностных волнах на воде считаем, что слой жидкости ограничен снизу непроницаемым подвижным дном $r = R - h(\lambda, \theta, t)$, а сверху — свободной поверхностью $r = R + \eta(\lambda, \theta, t)$. Условия на этих участках границы записываются в виде [14]

$$(\eta_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\eta - w)\big|_{r=R+\eta} = 0, \quad p\big|_{r=R+\eta} = 0, \quad (h_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla h + w)\big|_{r=R-h} = 0. \tag{6}$$

Задавая дополнительно начальные данные и условия на боковых границах, получаем полную формулировку задачи для системы уравнений (2)–(4).

Одним из следствий уравнений (2)–(4) является закон сохранения полной энергии в слое воды на сфере

$$(JE)_t + (J(E+p)v^1)_\lambda + (J(E+p)v^2)_\theta + (J(E+p)w)_r = 0, \tag{7}$$

где E — полная энергия, U — потенциал центробежной силы:

$$E = \frac{1}{2}\left[(v^1 r\sin\theta)^2 + (v^2 r)^2 + w^2\right] + g(r - R) - U, \qquad U = \frac{1}{2}\,\Omega^2 r^2 \sin^2\theta. \tag{8}$$

2. Переход к безразмерным переменным. Для получения уравнений мелкой воды на сфере введем характерные масштабы и перейдем к безразмерным величинам, чтобы оценить относительнй вклад каждого слагаемого в исходных уравнениях (2)–(4). Пусть L, h_0 — характерные масштабы в горизонтальном и вертикальном направлениях соответственно, a_0 — характерная амплитуда волны, $\alpha = a_0/h_0$ — параметр нелинейности. С величиной L свяжем характерный горизонтальный масштаб λ_0, измеренный в радианах:

$$\lambda_0 = \frac{L}{R} = \frac{\varepsilon}{\mu}$$

($\varepsilon = h_0/R \ll 1$ — относительная толщина океанического слоя воды; $\mu = h_0/L$ — параметр частотной дисперсии). Масштаб времени t_0 определим следующим образом:

$$t_0 = \frac{L}{\sqrt{gh_0}}.$$

Тогда характерный масштаб угловой скорости распространения волны будет определяться формулой

$$\omega_0 = \frac{\lambda_0}{t_0} = \frac{\varepsilon}{\mu}\,\frac{\sqrt{gh_0}}{L} = \frac{\sqrt{gh_0}}{R}.$$

В качестве масштаба "горизонтальной" угловой скорости частиц жидкости в волне примем величину ω_0, через $s = r - R$ обозначим новую переменную в радиальном направлении.

В соответствии с введенными масштабами определим безразмерные переменные:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \bar{\theta} = \frac{\theta}{\lambda_0}, \quad \bar{h} = \frac{h}{h_0}, \quad \bar{s} = \frac{s}{h_0}, \quad \bar{H} = \frac{H}{h_0}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{a_0}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_0}; \tag{9}$$

$$\bar{v}^\beta = \frac{v^\beta}{\omega_0}, \quad \bar{v}_\beta = \frac{v_\beta}{R\sqrt{gh_0}} \; (\beta = 1, 2), \quad \bar{w} = \frac{w}{\mu\sqrt{gh_0}}, \quad \bar{p} = \frac{p}{gh_0}, \quad \bar{E} = \frac{E}{gh_0}. \tag{10}$$

Формулы (10) для обезразмеривания компонент скорости непосредственно следуют из соотношений (9) и отличаются от рассмотренных в [13].

Далее для упрощения обозначений черта над безразмерными переменными опускается.

3. Уравнения Эйлера в приближении тонкого слоя на поверхности сферы. В работе [13] приведены уравнения Эйлера для случая, когда отброшены члены порядка $O(\varepsilon)$ вследствие предположения о малости толщины океанического слоя воды. При использовании для обезразмеривания формул (9), (10) эти модифицированные уравнения записываются в виде

$$(J_0 v^1)_\lambda + (J_0 v^2)_\theta + (J_0 w)_s = 0; \tag{11}$$

$$\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + w\boldsymbol{v}_s + \nabla p = \boldsymbol{r}; \tag{12}$$

$$\mu^2 (w_t + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla) w + w w_s) + p_s = -1, \tag{13}$$

где $J_0 = -\sin(\lambda_0\theta)$; $\boldsymbol{u} = (v^1, v^2)^{\rm т}$; $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^{\rm т}$; $\nabla = (\partial/\partial\lambda, \partial/\partial\theta)$; $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2)^{\rm т}$,

$$v_1 = (\Omega + v^1)\sin^2(\lambda_0\theta), \qquad v_2 = v^2; \tag{14}$$

$$r_1 = 0, \qquad r_2 = \frac{\varepsilon}{\mu}\,(\Omega + v^1)^2 \sin(\lambda_0\theta)\cos(\lambda_0\theta). \tag{15}$$

Граничные условия (6) для системы уравнений (11)–(13) принимают следующий вид:

$$(\alpha\eta_t + \alpha\boldsymbol{u} \cdot \nabla\eta - w)\big|_{s=\alpha\eta} = 0; \tag{16}$$

$$p\big|_{s=\alpha\eta} = 0; \tag{17}$$

$$(h_t + \boldsymbol{u} \cdot \nabla h + w)\big|_{s=-h} = 0. \tag{18}$$

В безразмерных переменных выражение (8) в приближении тонкого слоя записывается следующим образом:

$$E = \frac{1}{2}\,[(v^1\sin(\lambda_0\theta))^2 + (v^2)^2 + \mu^2 w^2] + s - U, \qquad U = \frac{1}{2}\,\Omega^2 \sin^2(\lambda_0\theta), \tag{19}$$

а уравнение для полной энергии получается из (7) в результате замены J на J_0:

$$(J_0 E)_t + (J_0(E + p)v^1)_\lambda + (J_0(E + p)v^2)_\theta + (J_0(E + p)w)_s = 0. \tag{20}$$

Заметим, что уравнение (20) можно получить и как следствие уравнений (11)–(13).

4. Вывод НЛД-уравнений мелкой воды на сфере. В моделях мелкой воды искомыми величинами являются полная глубина жидкости H и вектор скорости $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(\lambda, \theta, t)$, связанный с вектором скорости трехмерного течения. В настоящей работе в качестве величины $\boldsymbol{c}$ выберем безразмерную осредненную по глубине “горизонтальную” составляющую скорости:

$$\boldsymbol{c} = (c^1, c^2)^{\rm т} = \frac{1}{H}\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} \boldsymbol{u}\, ds. \tag{21}$$

Здесь $H = \alpha\eta + h$.

4.1. *Уравнение неразрывности приближенной модели.* При использовании формулы (21) и оператора дивергенции

$$\nabla \cdot \boldsymbol{c} = \frac{(J_0 c^1)_\lambda + (J_0 c^2)_\theta}{J_0} \tag{22}$$

уравнение неразрывности для НЛД-модели принимает вид

$$H_t + \nabla \cdot (H\boldsymbol{c}) = 0. \tag{23}$$

Это уравнение соответствует закону сохранения массы и следует из уравнения несжимаемости (11), проинтегрированного по толщине слоя жидкости с учетом граничных условий (16), (18) (см. [13]).

4.2. *Основное предположение, используемое при выводе приближенной модели. Вспомогательные формулы.* Для вывода приближенной модели будем использовать разложение компонент вектора скорости в ряды по степеням параметра μ^2:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^0 + \mu^2 \boldsymbol{u}^1 + O(\mu^4), \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \mu^2 \boldsymbol{v}_1 + O(\mu^4), \quad w = w_0 + \mu^2 w_1 + O(\mu^4). \tag{24}$$

Определив величины

$$\boldsymbol{K}_0 = \begin{pmatrix} \Omega \sin^2(\lambda_0 \theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \sin^2(\lambda_0\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

из соотношений (14) получаем представление

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{K}_0 + M\boldsymbol{u}. \tag{25}$$

Так как в длинноволновом приближении изменение величин в направлении оси Os незначительно по сравнению с изменением в “горизонтальной” плоскости, будем считать, что главный член $\boldsymbol{u}^0$ разложения “горизонтальной” составляющей $\boldsymbol{u}$ вектора скорости не зависит от “вертикальной” координаты s:

$$(\boldsymbol{u}^0)_s = 0. \tag{26}$$

При выводе НЛД-уравнений с использованием разложений (24) прежде всего выразим функции $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, w через скорость $\boldsymbol{c}$ приближенной модели. Сначала выразим w_0 через $\boldsymbol{u}^0$. Подставляя функции $\boldsymbol{u}$ и w в виде (24) в уравнение (11), находим соотношение $\nabla \cdot \boldsymbol{u}^0 + (w_0)_s = 0$, интегрируя которое по радиальной координате в пределах от $-h$ до s с учетом того, что функция $\boldsymbol{u}^0$ не зависит от s, получаем

$$(s+h)\nabla \cdot \boldsymbol{u}^0 + w_0(s) - w_0\big|_{s=-h} = 0. \tag{27}$$

Далее используем условие (18), из которого с помощью разложений (24) находим

$$w_0\big|_{s=-h} = -D_0 h, \qquad D_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u}^0 \cdot \nabla.$$

С учетом этого выражения из (27) следует, что составляющая w_0 “вертикальной” компоненты скорости выражается через нулевое приближение “горизонтальной” компоненты скорости $\boldsymbol{u}^0$ в виде линейной зависимости от s:

$$w_0(s) = -D_0 h - (s+h)\nabla \cdot \boldsymbol{u}^0. \tag{28}$$

Далее необходимо установить связь между скоростями $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{c}$. Подставляя первое из разложений (24) в формулу (21), имеем

$$\boldsymbol{c} = \frac{1}{H}\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} (\boldsymbol{u}^0 + \mu^2 \boldsymbol{u}^1 + O(\mu^4))\, ds = \boldsymbol{u}^0 + \mu^2\, \frac{1}{H}\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} \boldsymbol{u}^1\, ds + O(\mu^4). \tag{29}$$

Тогда первую формулу в (24) можно записать в виде

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c} + \mu^2 \boldsymbol{V} + O(\mu^4), \tag{30}$$

где

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{u}^1 - \frac{1}{H} \int_{-h}^{\alpha\eta} \boldsymbol{u}^1 \, ds, \tag{31}$$

причем имеет место равенство

$$\int_{-h}^{\alpha\eta} \boldsymbol{V} \, ds = 0. \tag{32}$$

С учетом формулы (25) получаем

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{K}_0 + M\boldsymbol{c} + \mu^2 M\boldsymbol{V} + O(\mu^4). \tag{33}$$

Что касается “вертикальной” компоненты скорости, то далее потребуется ее представление с точностью лишь до членов порядка $O(\mu^2)$. Из представления (24) с учетом формулы (28) и следующей из (29) формулы $\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{c} + O(\mu^2)$ получаем соотношение

$$w = -Dh - (s+h)\nabla \cdot \boldsymbol{c} + O(\mu^2), \tag{34}$$

где D — оператор полной производной:

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{c} \cdot \nabla. \tag{35}$$

Формулы (30), (33), (34) используются ниже при вычислении давления и выводе уравнений движения в НЛД-модели.

4.3. *Формула для давления в НЛД-модели на сфере.* В классических НЛД-моделях функция давления в явном виде отсутствует. В силу условий вывода длинноволновых приближений давление исключается из уравнений движения, поскольку выражено через переменные $\boldsymbol{c}$, H и их производные. Однако иногда имеет смысл записать НЛД-уравнения, используя явно аналог давления.

Проинтегрируем уравнение (13) по “вертикальной” координате:

$$\mu^2 \int_s^{\alpha\eta} (w_t + \boldsymbol{u} \cdot \nabla w + w w_\zeta) \, d\zeta + \int_s^{\alpha\eta} p_\zeta \, d\zeta = - \int_s^{\alpha\eta} d\zeta, \qquad -h \leqslant s \leqslant \alpha\eta.$$

С учетом условия (17) и равенства $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c} + O(\mu^2)$, следующего из (30), получаем соотношение

$$\mu^2 \int_s^{\alpha\eta} \big(Dw + w w_\zeta + O(\mu^2)\big) \, d\zeta - p(s) = s - \alpha\eta, \tag{36}$$

в котором подынтегральное выражение вычисляется с использованием формулы (34) для w:

$$Dw + w w_s = -D^2 h - (s+h) D(\nabla \cdot \boldsymbol{c}) + (s+h)(\nabla \cdot \boldsymbol{c})^2 + O(\mu^2) =$$
$$= -R_2 - (s+h) R_1 + O(\mu^2).$$

Здесь

$$R_1 = D(\nabla \cdot \boldsymbol{c}) - (\nabla \cdot \boldsymbol{c})^2, \qquad R_2 = D^2 h. \tag{37}$$

С учетом полученных выражений из (36) следует формула распределения давления по координате $-h \leqslant s \leqslant \alpha\eta$:

$$p(s) = H - (s+h) - \mu^2\Big[\big(H - (s+h)\big)R_2 + \Big(\frac{H^2}{2} - \frac{(s+h)^2}{2}\Big)R_1\Big] + O(\mu^4). \tag{38}$$

Таким образом, в формуле для давления (38) главная часть $\tilde{p}(s)$, которую можно получить, отбрасывая в правой части члены порядка $O(\mu^4)$, является трехчленом, зависящим от координаты s, с коэффициентами, зависящими от переменных НЛД-модели H и $\boldsymbol{c}$.

4.4. *Уравнения движения НЛД-модели на сфере.* На основе выражений (30), (33), (34) и формулы для давления (38) выведем уравнения движения НЛД-модели. Согласно формуле (30)

$$r_2 = \frac{\varepsilon}{\mu}\,[\Omega + (c^1 + O(\mu^2))]^2 \sin(\lambda_0\theta)\cos(\lambda_0\theta) = \frac{\varepsilon}{\mu}\,(\Omega + c^1)^2 \sin(\lambda_0\theta)\cos(\lambda_0\theta) + O(\varepsilon\mu).$$

В силу предположения о малости ε будем считать

$$r_2 = \frac{\varepsilon}{\mu}\,(\Omega + c^1)^2 \sin(\lambda_0\theta)\cos(\lambda_0\theta), \tag{39}$$

сохранив для правой части уравнения (12) обозначение $\boldsymbol{r}$. В силу (39) вектор $\boldsymbol{r}$ не зависит от переменной s. Интегрируя уравнение (12) по толщине слоя жидкости и учитывая условие (17), получаем соотношение

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}(\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + w\boldsymbol{v}_s)\,ds + \nabla\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} p\,ds - p\big|_{s=-h}\nabla h = \boldsymbol{r}H. \tag{40}$$

Преобразуем это соотношение, используя представление $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, w, p через переменные $\boldsymbol{c}$, H. Для вычисления членов с давлением используем формулу (38):

$$\nabla\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} p\,ds - p\big|_{s=-h}\nabla h =$$

$$= \alpha H\nabla\eta - \mu^2\Big[\nabla\Big(\frac{H^3}{3}\,R_1 + \frac{H^2}{2}\,R_2\Big) - H\nabla h\Big(\frac{H}{2}\,R_1 + R_2\Big)\Big] + O(\mu^4), \tag{41}$$

а слагаемое с “вертикальной” компонентой скорости вычислим, применяя формулы (33), (34):

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} w\boldsymbol{v}_s\,ds = \mu^2 M\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} w\boldsymbol{V}_s\,ds = -\mu^2 MDh\boldsymbol{V}\big|_{s=-h}^{s=\alpha\eta} - \mu^2 M(\nabla\cdot\boldsymbol{c})\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}(s+h)\boldsymbol{V}_s\,ds + O(\mu^4).$$

Интеграл в правой части полученного соотношения вычисляем интегрированием по частям. В результате в силу равенства (32) имеем формулу

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}(s+h)\boldsymbol{V}_s\,ds = H\boldsymbol{V}\big|_{s=\alpha\eta},$$

с учетом которой получаем

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} w\boldsymbol{v}_s\,ds = \mu^2 MDh\boldsymbol{V}\big|_{s=-h} - \mu^2 M\big(Dh + H(\nabla\cdot\boldsymbol{c})\big)\boldsymbol{V}\big|_{s=\alpha\eta} + O(\mu^4). \tag{42}$$

Члены уравнения (40), содержащие "горизонтальные" компоненты скорости, преобразуются с помощью аналогичных приемов, включающих подстановку выражений (30), (33), перестановку операций дифференцирования и интегрирования и применение формулы (32):

$$\int_{-h}^{\alpha\eta} \big[\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\big]\,ds = \int_{-h}^{\alpha\eta} \big[M\boldsymbol{c}_t + (\boldsymbol{c}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\big]\,ds +$$

$$+ \mu^2 \int_{-h}^{\alpha\eta} \big[M\boldsymbol{V}_t + (\boldsymbol{c}\cdot\nabla)(M\boldsymbol{V}) + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\big]\,ds + O(\mu^4) = HM\boldsymbol{c}_t + H(\boldsymbol{c}\cdot\nabla)(\boldsymbol{K}_0 + M\boldsymbol{c}) +$$

$$+ \mu^2\big[-\alpha\eta_t M\boldsymbol{V}\big|_{s=\alpha\eta} - h_t M\boldsymbol{V}\big|_{s=-h} - \alpha(\boldsymbol{c}\cdot\nabla\eta)M\boldsymbol{V}\big|_{s=\alpha\eta} - (\boldsymbol{c}\cdot\nabla h)M\boldsymbol{V}\big|_{s=-h}\big] + O(\mu^4).$$

Объединяя эти формулы с выражением (42) и преобразуя члены при $O(\mu^2)$, с использованием уравнения неразрывности (23) в форме $DH+H\nabla\cdot\boldsymbol{c}=0$ и равенства $h_t+\boldsymbol{c}\cdot\nabla h-Dh=0$ находим

$$\int_{-h}^{\alpha\eta} (\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + w\boldsymbol{v}_s)\,ds = HM\boldsymbol{c}_t + H(\boldsymbol{c}\cdot\nabla)(\boldsymbol{K}_0 + M\boldsymbol{c}) + O(\mu^4).$$

Сравнивая это соотношение с интегралом (40) и учитывая (41), получаем уравнение движения НЛД-модели

$$\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{c}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \alpha\nabla\eta = \mu^2\Big[\frac{1}{H}\,\nabla\Big(\frac{H^3}{3}\,R_1 + \frac{H^2}{2}\,R_2\Big) - \nabla h\Big(\frac{H}{2}\,R_1 + R_2\Big)\Big] + \boldsymbol{r} + O(\mu^4). \qquad (43)$$

Здесь для упрощения записи введен новый вектор $\boldsymbol{v}$, который в отличие от вектора $\boldsymbol{v}$ в (25) не зависит от s и определяется через скорость $\boldsymbol{c}$:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{K}_0 + M\boldsymbol{c}.$$

Таким образом, без использования предположения о потенциальности исходного трехмерного течения выведена система НЛД-уравнений (23), (43), совпадающая с системой, полученной в [13].

Сравним процедуру вывода НЛД-модели, представленную в настоящей работе, с соответствующей процедурой, предложенной в работе [13] при использовании условия потенциальности. Нетрудно показать, что использование данного условия в [13] позволяет в явном виде получить выражение для коэффициента $\boldsymbol{u}^1$ разложения скорости $\boldsymbol{u}$ по формуле (24), а следовательно, вычислить $\boldsymbol{V}$ по формуле (31). В настоящей работе при выводе уравнения движения НЛД-модели указанные явные формулы не нужны, достаточно применить соотношение (32).

5. Уравнение баланса импульса. Отбрасывая в системе уравнений (23), (43) члены порядка $O(\mu^4)$ и переходя к размерным величинам, получаем

$$H_t + \nabla\cdot(H\boldsymbol{c}) = 0, \qquad H = \eta + h; \qquad (44)$$

$$\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{c}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + g\nabla\eta = \frac{1}{H}\nabla\Big(\frac{H^3}{3}\,R_1 + \frac{H^2}{2}\,R_2\Big) - \nabla h\Big(\frac{H}{2}\,R_1 + R_2\Big) + \boldsymbol{r}; \qquad (45)$$

$$v_1 = (\Omega + c^1)R^2\sin^2\theta, \quad v_2 = R^2c^2, \quad r_1 = 0, \quad r_2 = (\Omega + c^1)^2R^2\sin\theta\cos\theta,$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{c} = c^1_\lambda + \frac{1}{\sin\theta}\,(c^2\sin\theta)_\theta.$$

Приведем более компактную и физически содержательную форму записи уравнения (45). Из формулы (38) следует, что в качестве функции давления в НЛД-модели можно использовать

$$\tilde{p}(s) = g(H - (s+h)) - \big(H - (s+h)\big)R_2 - \Big(\frac{H^2}{2} - \frac{(s+h)^2}{2}\Big)R_1. \tag{46}$$

Обозначив через P среднее по толщине слоя давление (46):

$$P = \frac{1}{H}\int\limits_{-h}^{\eta} \tilde{p}\,ds = \frac{gH}{2} - \frac{H^2}{3}\,R_1 - \frac{H}{2}\,R_2, \tag{47}$$

уравнение движения (45) можно записать следующим образом:

$$\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{c}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \frac{\nabla(PH)}{H} = \boldsymbol{r} + q\nabla h, \tag{48}$$

при этом

$$q = \frac{1}{H}\,\tilde{p}\big|_{s=-h} = g - \frac{H}{2}\,R_1 - R_2. \tag{49}$$

Из уравнения (48) следует, что в состоянии покоя поверхность воды, распределенной по поверхности вращающегося шара радиусом R, отличается от сферической и описывается формулой

$$\eta(\lambda,\theta) = \frac{1}{2g}\,\Omega^2 R^2 \sin^2\theta + \mathrm{const}\,.$$

Положим для определенности $\eta(\lambda, 0) = 0$. Тогда рассматриваемая поверхность задается формулой

$$\eta(\lambda,\theta) = \frac{U_0}{g}, \qquad U_0 = \frac{1}{2}\,\Omega^2 R^2 \sin^2\theta, \tag{50}$$

где U_0 — потенциал центробежной силы уравнений Эйлера в приближении тонкого слоя. Заметим, что в этом случае уравнение свободной поверхности покоящейся жидкости совпадает с уравнением (50).

При использовании исходных уравнений Эйлера (2)–(4) уравнение поверхности покоящейся жидкости имеет вид

$$\eta(\lambda,\theta) = \frac{U_0}{g}\,\frac{4}{(1+\sqrt{1-4U_0/(gR)}\,)^2}.$$

При $\varepsilon \to 0$ это уравнение совпадает с уравнением (50).

Умножая уравнение (44) на $\boldsymbol{v}$, а (45) на H и складывая результаты, получаем уравнение баланса импульса с дивергентной левой частью

$$(H\boldsymbol{v})_t + \nabla\cdot(H\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{v}) + \nabla(HP) = qH\nabla h + H\boldsymbol{r}, \tag{51}$$

где $\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{v}$ — тензорное произведение векторов. Несмотря на то что правая часть уравнения (51) отлична от нуля, состояние покоя жидкости со свободной поверхностью (50) будет сохраняться со временем.

6. Уравнение баланса энергии. Для получения уравнения баланса энергии выполним ряд преобразований уравнения движения (48), умножив каждое из скалярных уравнений на соответствующую компоненту вектора скорости и сложив полученные уравнения:

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{c}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \frac{1}{H}\,\boldsymbol{c}\cdot\nabla(PH) = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r} + q\boldsymbol{c}\cdot\nabla h. \tag{52}$$

Группу членов, содержащих скорость, запишем в виде

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{v}_t+\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{c}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}=D(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}/2-U_0), \tag{53}$$

где $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(c^1R\sin\theta)^2+(c^2R)^2$; D — оператор полной производной (35). Для остальных членов имеет место равенство

$$\frac{1}{H}\,\boldsymbol{c}\cdot\nabla(PH)-q\boldsymbol{c}\cdot\nabla h=\frac{\nabla\cdot(\boldsymbol{c}PH)}{H}-P\nabla\cdot\boldsymbol{c}-qDh+qh_t \tag{54}$$

и справедливы следующие преобразования:

$$P\nabla\cdot\boldsymbol{c}+qDh=\frac{gH}{2}\,\nabla\cdot\boldsymbol{c}+gDh-\Big(\frac{H^2}{3}\,R_1+\frac{H}{2}\,R_2\Big)\nabla\cdot\boldsymbol{c}-Dh\Big(\frac{H}{2}\,R_1+R_2\Big)=$$
$$=-\frac{gDH}{2}+gDh-\frac{H}{3}\,(\nabla\cdot\boldsymbol{c})^2DH-\frac{H^2}{3}\,D\frac{(\nabla\cdot\boldsymbol{c})^2}{2}-\frac{H}{2}\,(\nabla\cdot\boldsymbol{c})D^2h-\frac{H}{2}\,D(\nabla\cdot\boldsymbol{c})Dh-$$
$$-\frac{Dh}{2}\,(\nabla\cdot\boldsymbol{c})DH-DhD^2h=-gD\Big(\frac{H-2h}{2}\Big)-D\Big(\frac{H^2}{6}\,(\nabla\cdot\boldsymbol{c})^2\Big)-D\Big(\frac{H}{2}(\nabla\cdot\boldsymbol{c})\,Dh\Big)-$$
$$-D\,\frac{(Dh)^2}{2}=-D\Big(E_0-\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}}{2}+U_0\Big).$$

Здесь E_0 — полная энергия НЛД-модели:

$$E_0=\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}}{2}+\frac{H^2}{6}\,(\nabla\cdot\boldsymbol{c})^2+\frac{H}{2}\,(\nabla\cdot\boldsymbol{c})Dh+\frac{(Dh)^2}{2}+\frac{g(H-2h)}{2}-U_0. \tag{55}$$

Выражение (55) для энергии НЛД-модели нетрудно получить, если проинтегрировать по толщине слоя жидкости выражение (19) для полной энергии, следующее из уравнений Эйлера в приближении тонкого слоя, учитывая при этом соотношения (30), (32), формулу для радиальной компоненты скорости (34), отбрасывая члены порядка $O(\mu^4)$ и переходя к размерным переменным. С учетом полученных равенств из уравнения (52) находим уравнение изменения энергии

$$(E_0)_t+\boldsymbol{c}\cdot\nabla E_0+\frac{1}{H}\,\nabla\cdot(\boldsymbol{c}HP)=-qh_t. \tag{56}$$

Умножая уравнение (56) на H и складывая с уравнением неразрывности (44), умноженным на E_0, получаем уравнение

$$(HE_0)_t+\nabla\cdot(\boldsymbol{c}H(E_0+P))=-Hqh_t, \tag{57}$$

которое может быть записано аналогично уравнению для плоского случая [11]

$$\frac{\partial J_0HE_0}{\partial t}+\frac{\partial J_0c^1H(E_0+P)}{\partial\lambda}+\frac{\partial J_0c^2H(E_0+P)}{\partial\theta}=-J_0Hqh_t \tag{58}$$

($J_0=-R^2\sin\theta$). В случае стационарной донной поверхности это уравнение имеет консервативный вид.

Замечание 1. Чтобы установить связь между НЛД-уравнениями на вращающейся сфере и известными НЛД-моделями на плоскости, надо перейти к системе координат на поверхности сферы. Для этого в некоторой окрестности точки (λ_*,θ_*) рассматривается преобразование координат

$$x=R\sin\theta_*(\lambda-\lambda_*),\quad y=-R(\theta-\theta_*),\quad u=\dot x=Rc^1\sin\theta_*,\quad v=\dot y=-Rc^2.$$

Полагая, что в направлении широты область мала, т. е. мала величина $\Delta=\theta-\theta_*$, переходя в НЛД-уравнениях к новым переменным, считая, что функции $\operatorname{ctg}\theta$, u, v, H и их производные ограничены, а также пренебрегая в НЛД-уравнениях членами, имеющими порядок $O(\Delta)$ или $O(1/R)$, получаем известные НЛД-уравнения на плоскости [11].

Замечание 2. Если в выражениях для энергии E_0 и давления P отбросить дисперсионные члены, имеющие порядок $O(\mu^2)$, то (57) будет соответствовать уравнению баланса энергии классических уравнений мелкой воды в первом приближении на вращающейся сфере.

Замечание 3. Уравнение энергии (57) можно получить непосредственно из уравнения (20), если последнее проинтегрировать по толщине слоя жидкости и выполнить необходимые преобразования, вынося производные из-под знака интеграла, применяя формулы (30), (34), (32) и граничные условия (16)–(18), отбрасывая члены порядка $O(\mu^4)$ и переходя к размерным переменным.

7. Модель типа модели Буссинеска. При выводе НЛД-уравнений (23), (43) отсутствовали ограничения на амплитуду волн. Иными словами, полученная НЛД-модель является слабодисперсионной, но полностью нелинейной. В ряде работ такие НЛД-модели называются полными [13].

Допуская связь между параметрами α и μ^2, получаем приближенные уравнения типа уравнений Буссинеска, отличающиеся от уравнений полностью нелинейной НЛД-модели тем, что дисперсионные члены в них имеют слабонелинейный вид.

Уравнения Буссинеска часто используются при численном моделировании распространения поверхностных волн, что обусловлено их относительной простотой. Наиболее известной моделью типа модели Буссинеска на плоскости является одна из моделей Перегрина [8], в которой выражение для скорости выбрано в виде (21). Однако эта модель обладает двумя недостатками: отсутствует инвариантность относительно преобразования Галилея и нарушен баланс кинетической энергии. Ниже предлагаются две модели типа модели Буссинеска на сфере, аналоги которых на плоскости не имеют указанных недостатков.

Будем считать, что

$$\alpha = O(\mu^2). \tag{59}$$

Выразим из уравнения неразрывности (44) дивергенцию $\nabla \cdot \boldsymbol{c} = -DH/H$ и запишем выражение для R_1 следующим образом:

$$R_1 = \frac{D(H\nabla \cdot \boldsymbol{c})}{H}. \tag{60}$$

Тогда выражения для определяемых формулами (47), (49) величин P и q, записанные в безразмерных переменных, принимают вид

$$P = \frac{H}{2} - \mu^2\Big(\frac{H}{3}\, D(H\nabla \cdot \boldsymbol{c}) + \frac{H}{2}\, D^2 h\Big), \qquad q = 1 - \mu^2\Big(\frac{1}{2}\, D(H\nabla \cdot \boldsymbol{c}) + D^2 h\Big). \tag{61}$$

Учитывая, что $H = h + \alpha\eta$, и пренебрегая в выражениях (61) членами порядка $O(\alpha\mu^2)$, $O(\alpha^2\mu^2)$, получаем уравнение движения с модифицированными функциями P и q:

$$P_B = \frac{H}{2} - \mu^2\Big(\frac{h}{3}\, D(h\,\nabla \cdot \boldsymbol{c}) + \frac{h}{2}\, D^2 h\Big), \qquad q_B = 1 - \mu^2\Big(\frac{1}{2}\, D(h\,\nabla \cdot \boldsymbol{c}) + D^2 h\Big). \tag{62}$$

Вернемся к размерным переменным. При этом уравнение движения НЛД-модели со слабой дисперсией принимает вид

$$\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{c} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + \frac{\nabla(P_B H)}{H} = \boldsymbol{r} + q_B \nabla h, \tag{63}$$

где

$$P_B = \frac{gH}{2} - \frac{h}{3}\, D(h\,\nabla \cdot \boldsymbol{c}) - \frac{h}{2}\, D^2 h, \qquad q_B = g - \frac{1}{2}\, D(h\,\nabla \cdot \boldsymbol{c}) - D^2 h.$$

Очевидно, что уравнение (63) можно записать в виде уравнения баланса импульса с дивергентной левой частью (см. (51)).

Для вывода уравнения, описывающего изменение полной энергии, все вычисления необходимо выполнить точно, не отбрасывая какие-либо члены. Это позволяет рассматривать уравнение энергии как следствие уравнений движения и неразрывности. С учетом (59) выражение для полной энергии принимает вид

$$E_B = \frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}}{2} + \frac{h^2}{6}\,(\nabla\cdot\boldsymbol{c})^2 + \frac{h}{2}\,(\nabla\cdot\boldsymbol{c})\,Dh + \frac{(Dh)^2}{2} + \frac{g(H-2h)}{2} - U_0,$$

а уравнение баланса получается тем же способом, что и в п. **6**, и имеет форму, аналогичную (57):

$$(HE_B)_t + \nabla\cdot(\boldsymbol{c}H(E_B+P_B)) = -Hq_Bh_t.$$

Это уравнение можно записать в виде (58), заменив величины E_0, P, q на E_B, P_B, q_B.

8. Модель типа модели Буссинеска для слабодеформируемого дна. Во многих практических задачах смещение донной поверхности в течение промежутка времени, характерного для распространения волн типа цунами, мало по сравнению с локальной глубиной акватории, т. е. можно считать, что

$$h(\lambda,\theta,t) = h_1(\lambda,\theta) + \delta h_2(\lambda,\theta,t),$$

где $\delta \ll 1$ [15]. Результаты исследования различных режимов генерации длинных волн вследствие движения дна показывают, что амплитуды волн на поверхности слоя воды пропорциональны смещению донной поверхности, поэтому для определенного класса задач можно полагать

$$O(\alpha) = O(\delta) = O(\mu^2) \tag{64}$$

(см., например, [15]). Тогда

$$h = h_1(\lambda,\theta) + O(\alpha), \qquad H(\lambda,\theta,t) = h_1(\lambda,\theta) + O(\alpha). \tag{65}$$

Предположение (64) позволяет получить слабодисперсионную модель распространения поверхностных волн над слабодеформируемым дном, для которой справедливо уравнение энергии, аналогичное (57). Вывод модели аналогичен выводу модели в п. **7**.

Используя аппроксимации (65) и пренебрегая членами порядка $O(\alpha\mu^2)$ и выше, получаем выражения для P_D и q_D, которые аналогичны (62), но в скобках при μ^2 содержат только стационарную часть функции, описывающей донную поверхность:

$$P_D = \frac{H}{2} - \mu^2\Big(\frac{h_1}{3}\,D(h_1\,\nabla\cdot\boldsymbol{c}) + \frac{h_1}{2}\,D^2h_1\Big), \quad q_D = 1 - \mu^2\Big(\frac{1}{2}\,D(h_1\,\nabla\cdot\boldsymbol{c}) + D^2h_1\Big). \tag{66}$$

При тех же условиях имеем следующее выражение для полной энергии (55):

$$E_D = \frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}}{2} + \frac{H-2h}{2} + \mu^2\Big(\frac{{h_1}^2}{6}\,(\nabla\cdot\boldsymbol{c})^2 + \frac{h_1}{2}\,(\nabla\cdot\boldsymbol{c})Dh_1 + \frac{(Dh_1)^2}{2}\Big) - U_0. \tag{67}$$

Заметим, что в формулах (66), (67) выражение Dh_1 можно заменить на $\boldsymbol{c}\cdot\nabla h_1$.

Возвращаясь к размерным переменным, получаем уравнение движения вида (48), где вместо P и q используются размерные величины P_D и q_D, а вместо слагаемого $q\nabla h$ в правой части — выражение

$$\nabla h + (q_D - 1)\nabla h_1.$$

Умножая полученное уравнение на $\boldsymbol{c}$, получаем аналог уравнения энергии (56)

$$(E_D)_t + \boldsymbol{c}\cdot\nabla E_D + \frac{1}{H}\nabla\cdot(\boldsymbol{c}HP_D) = -h_t.$$

Умножая это уравнение на H, уравнение неразрывности (44) — на E_D и складывая результаты, получаем уравнение полной энергии НЛД-модели для слабодисперсионных течений над слабодеформируемым дном. Левая часть этого уравнения записана в дивергентной форме

$$(HE_D)_t + \nabla \cdot \big(\boldsymbol{c}H(E_D + P_D)\big) = -Hh_t.$$

Таким образом, получены две модели типа модели Буссинеска на вращающейся сфере, для которых в случае стационарного дна справедлив закон сохранения полной энергии. Отметим еще одно свойство полученных моделей: их аналоги на плоскости, в отличие от известных моделей типа модели Буссинеска, допускают преобразование Галилея.

Заключение. В работе получены нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере без использования условия потенциальности исходного трехмерного течения. Для течений над подвижным или медленно меняющимся неровным дном получены новые модели типа модели Буссинеска на сфере, причем структура уравнений этих НЛД-моделей аналогична структуре исходной НЛД-модели, что позволит в дальнейшем применить единый для всех слабодисперсионных моделей подход к построению численных алгоритмов.

Для каждой НЛД-модели получено выражение для полной энергии, следующее из уравнений Эйлера. Приведены уравнения баланса полной энергии, являющиеся следствием полученных НЛД-уравнений и имеющие большое значение для верификации разрабатываемых численных алгоритмов. Следует отметить согласованность уравнений баланса энергии приближенных и исходной гидродинамических моделей: каждое уравнение баланса энергии получено из закона сохранения энергии уравнений Эйлера при том же порядке аппроксимации, при котором соответствующая приближенная модель аппроксимирует модель трехмерных течений. Необходимо также отметить компактную форму записи полученных уравнений баланса, которые в случае неподвижного дна переходят в консервативные законы сохранения, что позволяет построить корректные разностные аппроксимации, используемые в численных расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Terrile E., Brocchini M., Christensen K. H., Kirby J. T.** Dispersive effects on wave-current interaction and vorticity transport in nearshore flows // Phys. Fluids. 2008. V. 20. 036602.
2. **Zhang Y., Kennedy A. B., Panda N., et al.** Boussinesq — Green — Naghdi rotational water wave theory // Coastal Engng. 2013. V. 73. P. 13–27.
3. **Kirby J. T., Shi F., Tehranirad B., et al.** Dispersive tsunami waves in the ocean: Model equations and sensitivity to dispersion and Coriolis effects // Ocean Modelling. 2013. V. 62. P. 39–55.
4. **Bona J. L., Colin T., Lannes D.** Long wave approximations for water waves // Arch. Rational Mech. Anal. 2005. V. 178. P. 373–410.
5. **Любашевская Н. В., Чупахин А. П.** Базис дифференциальных инвариантов группы симметрии уравнений Грина — Нагди // Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Компьютер. науки. 2009. Вып. 2. С. 52–62.
6. **Черевко А. А., Чупахин А. П.** Уравнения мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере. 1. Вывод и общие свойства // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 2. С. 24–36.
7. **Черевко А. А., Чупахин А. П.** Уравнения мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере. 2. Простые стационарные волны и звуковые характеристики // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 3. С. 82–96.
8. **Peregrine D. H.** Long waves on a beach // J. Fluid Mech. 1967. V. 27, pt 4. P. 815–827.

9. **Miles J., Salmon R.** Weakly dispersive nonlinear gravity waves // J. Fluid Mech. 1985. V. 157. P. 519–531.
10. **Базденков С. В., Морозов Н. Н., Погуце О. П.** Дисперсионные эффекты в двумерной гидродинамике // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293, № 4. С. 818–822.
11. **Федотова З. И., Хакимзянов Г. С.** Анализ условий вывода нелинейно-дисперсионных уравнений // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17, № 5. С. 94–108.
12. **Ertekin R. C., Webster W. C., Wehausen J. V.** Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width // J. Fluid Mech. 1986. V. 169. P. 275–292.
13. **Федотова З. И., Хакимзянов Г. С.** Уравнения полной нелинейно-дисперсионной модели мелкой воды на вращающейся сфере // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 6. С. 22–35.
14. **Хакимзянов Г. С.** Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами / Г. С. Хакимзянов, Ю. И. Шокин, В. Б. Барахнин, Н. Ю. Шокина. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.
15. **Дорфман А. А., Яговдик Г. И.** Уравнения приближенной нелинейно-дисперсионной теории длинных гравитационных волн, возбуждаемых перемещениями дна и распространяющихся в бассейне переменной глубины // Числ. методы механики сплошной среды. 1977. Т. 8, № 1. С. 36–48.

Поступила в редакцию 13/V 2013 г.