

УДК 532.5+519.673

## АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ИСТЕЧЕНИИ ПОЛИТРОПНОГО ГАЗА В ВАКУУМ С КОСОЙ СТЕНКИ

С. П. Баутин, Е. И. Понькин

Снежинский физико-технический институт — филиал Национального  
исследовательского университета “МИФИ”, 456776 Снежинск, Россия  
E-mails: spbautin@mail.ru, epnk@rambler.ru

В пространстве автомодельных переменных строятся двумерные течения политропного газа в виде решений соответствующих характеристических задач Коши стандартного типа, которые можно представить в виде бесконечных рядов. Доказана сходимость рядов и описана процедура построения коэффициентов рядов. Установлено, что в одном частном случае ряд обрывается и совпадает с известным аналитическим решением, которое использовалось В. А. Сучковым для описания истечения газа в вакуум с косою стенки, а А. Ф. Сидоровым для описания неограниченного сжатия призматических объемов газа. Показано, что в случае течения сжатия газа возможно его неограниченное сжатие при воздействии непроницаемых поршней, движущихся по различным законам, и исследованы газодинамические параметры течения. Выявлено сильнонеравномерное распределение давления при обжатии призматических мишеней.

**Ключевые слова:** система уравнений газовой динамики, автомодельные переменные, характеристическая задача Коши, истечение газа в вакуум, неограниченное сжатие газа.

DOI: 10.15372/PMTF20210104

**Введение.** В работе [1] получено частное точное решение системы уравнений газовой динамики (СУГД), описывающее двумерное течение газа (двойную волну (ДВ)) при выполнении соотношения между показателем политропы газа  $\gamma$  и тангенсом угла  $\alpha$  наклона косою стенки:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = (\gamma + 1)/(3 - \gamma). \quad (1)$$

Решение задачи состояло в том, что СУГД сводилась к одному уравнению для потенциала  $\Phi = \Phi(t, x, y)$  ( $u = \Phi_x$ ;  $v = \Phi_y$ ;  $u, v$  — компоненты вектора скорости  $\mathbf{V}$  в прямоугольной системе координат). Затем с помощью преобразования Лежандра осуществлялся переход к уравнению для функции  $\Psi = \Psi(u, v)$ , для которого строилось одно частное решение. Полученное таким образом решение  $\Psi = \Psi(u, v)$  и связанная с ним функция  $c = c(u, v)$  (скорость звука газа) определялись в пространстве годографа, т. е. в пространстве независимых переменных  $u, v$ . Для нахождения значений газодинамических параметров  $u, v, c$  в пространстве физических переменных  $t, x, y$  необходимо проводить обратное преобразование Лежандра, которое в общем случае выполнить в явном виде затруднительно.

В работе [2] решение [1] использовалось для описания неограниченного сжатия газа, заполняющего призматический объем, при выполнении соотношения (1). В этом случае степень кумуляции энергии больше, чем при неограниченном сжатии плоских, цилиндрических и сферических мишеней для реализации управляемого термоядерного синтеза (УТС).

В работе [3. С. 196–214] в пространстве специальных независимых переменных рассмотрена задача об истечении газа в вакуум при произвольном значении угла  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \pi/2$ ), не связанном со значением  $\gamma$ , а также доказано существование и единственность локально-аналитических решений соответствующих начально-краевых задач.

В [4. С. 133–141] с использованием решения задачи об истечении газа в вакуум описано безударное сильное сжатие газа, в том числе заполняющего призматические объемы при произвольном значении угла  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \pi/2$ ).

Однако в работах [1–4] детально не исследованы свойства построенных решений в пространстве физических переменных, в том числе в случае ДВ не исследованы законы движения непроницаемых поршней, сжимающих газ до неограниченных значений плотности.

В настоящей работе в пространстве физических переменных строятся решения двух газодинамических задач: задачи об истечении газа в вакуум с косою стенкой и задачи о неограниченном сжатии газа, первоначально занимающего клиновидную область.

**1. Постановка задачи об истечении газа в вакуум с косою стенкой.** Пусть в момент времени  $t = 0$  политропный газ со скоростью звука в нем  $c = 1$  покоится в плоскости  $xOy$  в клиновидной области, ограниченной двумя прямыми непроницаемыми стенками:  $x = 0$  (при  $y \geq 0$ ) и  $y = x \operatorname{tg} \alpha$  (косая стенка) (рис. 1, *a*).

В момент времени  $t = 0$  вертикальная стенка  $x = 0$  мгновенно убирается, после чего начинается истечение газа в вакуум вдоль косою стенки  $y = x \operatorname{tg} \alpha$  (см. рис. 1).

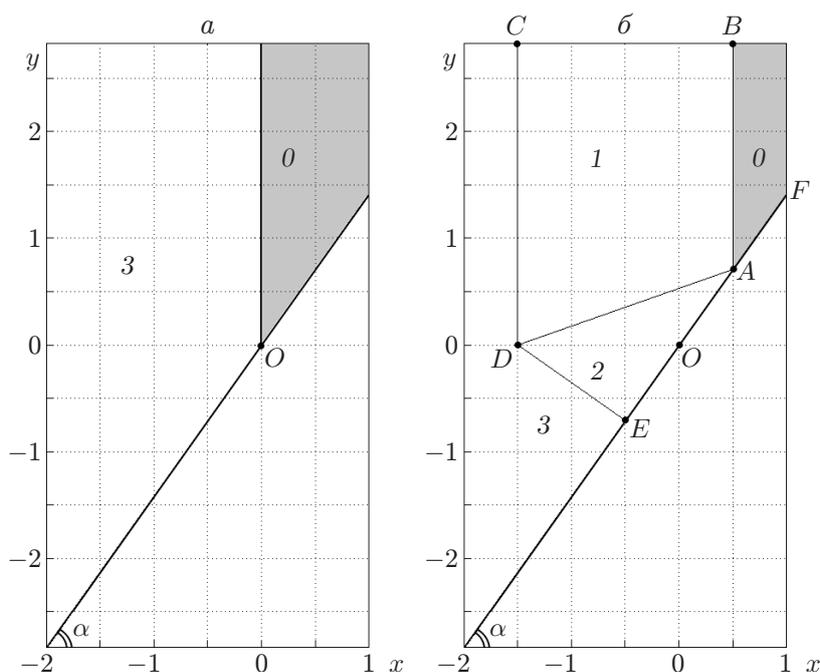


Рис. 1. Начальная конфигурация ( $t = 0$ ) (*a*) и конфигурация течения при  $t > 0$  (*б*): 0 — область, в которой находится покоящийся газ, 1 — область течения в виде централизованной волны, 2 — область течения в виде ДВ, 3 — область вакуума

На рис. 1,б приведена конфигурация течения, имеющего место при истечении газа в вакуум вдоль косої стенки при  $t > 0$ . Область  $\theta$  отделена [5] звуковой характеристикой (вертикальной прямой  $AB$ )

$$x = t$$

от области течения в виде центрированной волны (ЦВ) Римана, задаваемой формулами [5]

$$c = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{x}{t} + \frac{2}{\gamma + 1}, \quad u = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{x}{t} - \frac{2}{\gamma + 1}, \quad v = 0. \quad (2)$$

Область ЦВ примыкает к области вакуума (см. рис. 1,б) через свободную границу, являющуюся вертикальной прямой  $CD$  и движущуюся в область вакуума по закону [5]

$$x = -\frac{2}{\gamma - 1} t.$$

Область ДВ — искомого двумерного течения — отделена от области ЦВ (см. рис. 1,б) звуковой характеристикой  $AD$ , которая в общем случае известна в пространстве годографа [3, 4]. В случае, если  $\alpha$  и  $\gamma$  согласованы [1, 2]:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = (\gamma + 1)/(3 - \gamma), \quad (3)$$

звуковая характеристика  $AD$  является прямой в плоскости переменных  $(t, x)$ . Область ДВ примыкает к области вакуума через свободную границу  $DE$  (см. рис. 1,б), которая при выполнении (3) представляет собой прямую в плоскости переменных  $(t, x)$ , перпендикулярную непроницаемой стенке  $AE$ . Поскольку стенка  $AE$  является непроницаемой, вектор скорости газа направлен вдоль нее и на этой стенке выполняется соотношение

$$v|_{AE} = u \operatorname{tg} \alpha|_{AE}, \quad (4)$$

представляющее собой условие непротекания на стенке  $AE$ .

В рассматриваемой задаче требуется найти звуковую характеристику  $AD$  и формулу для описания двумерного течения (ДВ).

**2. Постановка задачи о неограниченном сжатии газа.** Пусть в начальный момент времени  $t = t_0 < 0$  политропный газ покоится в плоскости  $xOy$  в области, ограниченной тремя прямыми непроницаемыми стенками:  $x = 0$  (при  $y \geq 0$ ),  $x = x_0$  (при  $y \geq x \operatorname{tg} \alpha$ ),  $x_0 = t_0$  и  $y = x \operatorname{tg} \alpha$  (рис. 2,а). Скорость звука  $c$  в покоящемся газе равна единице.

В момент времени  $t = t_0$  поршень, являющийся непроницаемой вертикальной стенкой  $x = x_0$ , начинает плавно вдвигаться в газ, так чтобы сжатие газа происходило безударным образом и в момент времени  $t = 0$  весь газ был сжат до бесконечной плотности на прямой  $x = 0$  (при  $y \geq 0$ ).

На рис. 2,б показана конфигурация течения сжатия в некоторый момент времени  $t = t_1$ ,  $t_0 < t_1 < 0$ .

В области  $\theta$  еще не сжатый газ отделен от области ЦВ сжатия вертикальной звуковой характеристикой  $AB$ , распространяющейся по закону

$$x = t.$$

С другой стороны область ЦВ ограничена сжимающим непроницаемым поршнем  $DC$ . Закон движения поршня, сжимающего в момент времени  $t = 0$  ЦВ к прямой  $x = 0$  ( $y \geq 0$ ), имеет вид [4]

$$x_p(t) = \left(x_0 + \frac{2}{\gamma - 1} t_0\right) \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/(\gamma+1)} - \frac{2}{\gamma - 1} t.$$

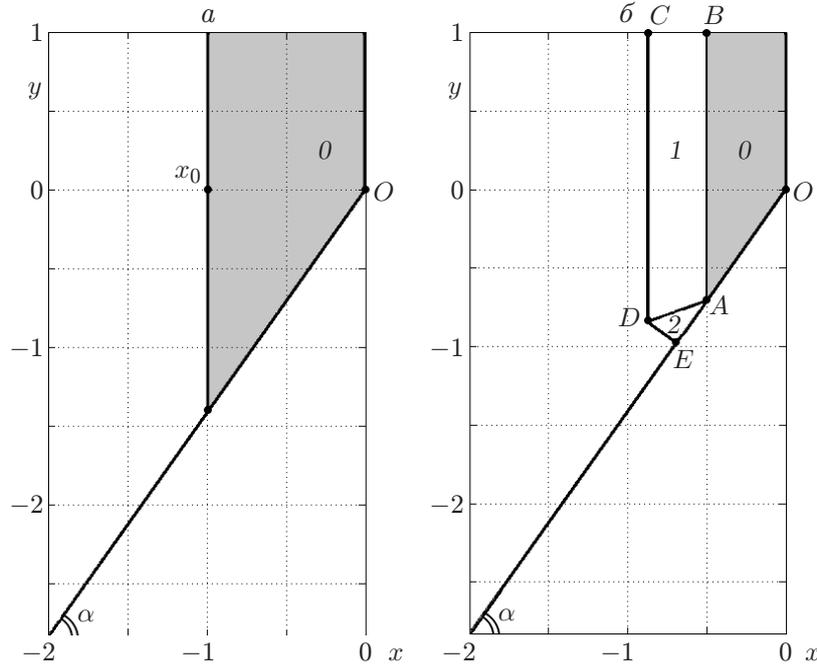


Рис. 2. Конфигурация в начальный момент времени  $t = t_0 < 0$  (а) и конфигурация течения сжатия в момент  $t = t_1$  ( $t_0 < t_1 < 0$ ) в согласованном случае (б): 0 — область, в которой находится покоящийся газ, 1 — область течения в виде ЦВ сжатия, 2 — область течения в виде ДВ сжатия

Области ЦВ и ДВ сжатия разделены звуковой характеристикой  $AD$  (см. рис. 2, б), которая в согласованном случае является прямой. Область ДВ сжатия слева ограничена непроницаемым сжимающим ее поршнем  $DE$ .

Помимо характеристики  $AD$  и ДВ сжатия требуется найти закон движения поршня  $DE$ .

**3. Замены переменных и постановка начально-краевой задачи.** В случае двумерного изэнтропического течения СУГД имеет следующий вид [3, 4]:

$$\begin{aligned} c_t + uc_x + vc_y + \varkappa c(u_x + v_y) &= 0, \\ u_t + uu_x + vu_y + (c/\varkappa)c_x &= 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + (c/\varkappa)c_y &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где  $u, v$  — соответственно горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости;  $\varkappa = (\gamma - 1)/2$ ;  $\gamma = \text{const} > 1$  — показатель политропы газа. Система (5) записана в безразмерных переменных.

Выполним замену независимых переменных

$$\xi = x/t, \quad \eta = y/t, \tag{6}$$

где  $\xi, \eta$  — автомодельные переменные. Преобразование (6) является вырожденным при  $t = 0$ .

В результате замены (6) система (4) переходит в систему

$$\begin{aligned} (u - \xi)c_\xi + (v - \eta)c_\eta + \varkappa c(u_\xi + v_\eta) &= 0, \\ (u - \xi)u_\xi + (v - \eta)u_\eta + (c/\varkappa)c_\xi &= 0, \\ (u - \xi)v_\xi + (v - \eta)v_\eta + (c/\varkappa)c_\eta &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

В новых переменных соотношения (2) записываются в виде

$$c = \frac{\varkappa\xi + 1}{\varkappa + 1}, \quad u = \frac{\xi - 1}{\varkappa + 1}, \quad v = 0. \quad (8)$$

Непосредственно подставляя равенства (8) в систему (7), проверим, что соотношения (7) представляют собой точное автомодельное решение СУГД (центрированную волну Римана).

Неизвестную звуковую характеристику  $AD$ , отделяющую область ЦВ от области искомой ДВ (см. рис. 2, б), представим в виде

$$\eta = f(\xi) \quad (9)$$

( $f(\xi)$  — неизвестная функция). Затем выполняется еще одна замена переменных

$$\xi' = \xi, \quad \vartheta = \eta - f(\xi), \quad (10)$$

т. е. линия (9) выбирается в качестве новой координатной оси. Якобиан  $J$  соотношений (10) равен

$$J = \begin{vmatrix} \vartheta_\eta & \vartheta_\xi \\ \xi'_\eta & \xi'_\xi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -f'(\xi) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

при выполнении условия  $|f'(\xi)| < \infty$ .

В результате система (7) принимает вид (штрих у переменной  $\xi'$  опущен)

$$\begin{aligned} (u - \xi)c_\xi + \varkappa cu_\xi + [v - \vartheta - f - (u - \xi)f']c_\vartheta - \varkappa cf'u_\vartheta + \varkappa cv_\vartheta &= 0, \\ (c/\varkappa)c_\xi + (u - \xi)u_\xi - (c/\varkappa)f'c_\vartheta + [v - \vartheta - f - (u - \xi)f']u_\vartheta &= 0, \\ (u - \xi)v_\xi + (c/\varkappa)c_\vartheta + [v - \vartheta - f - (u - \xi)f']v_\vartheta &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Для системы (11) ставится начально-краевая задача, решения которой являются решениями рассматриваемых задач об истечении и сжатии. На новой координатной оси  $\vartheta = 0$  задаются начальные условия

$$c|_{\vartheta=0} = c_0(\xi) = \frac{\varkappa\xi + 1}{\varkappa + 1}, \quad u|_{\vartheta=0} = u_0(\xi) = \frac{\xi - 1}{\varkappa + 1}, \quad v|_{\vartheta=0} = v_0(\xi) = 0, \quad (12)$$

обеспечивающие непрерывное примыкание искомого решения к ЦВ на линии  $\eta = f(\xi)$ . Также задается условие непротекания (4) на косой стенке  $y = x \operatorname{tg} \alpha$  ( $\eta = \xi \operatorname{tg} \alpha$ ), в новых переменных имеющее вид

$$v|_{\vartheta=\xi \operatorname{tg} \alpha - f(\xi)} = u \operatorname{tg} \alpha|_{\vartheta=\xi \operatorname{tg} \alpha - f(\xi)}. \quad (13)$$

Перед построением решения задачи (11)–(13) определяется в явном виде звуковая характеристика  $AD$ , разделяющая области ЦВ и ДВ.

Для нахождения характеристик системы (11) эта система представляется в векторно-матричном виде

$$A \cdot \mathbf{U}_\vartheta + B \cdot \mathbf{U}_\xi = 0.$$

Здесь  $\mathbf{U}$  — вектор искомых функций; матрица  $A$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & -\varkappa cf' & \varkappa c \\ -(c/\varkappa)f' & a_{11} & 0 \\ c/\varkappa & 0 & a_{11} \end{pmatrix},$$

$$a_{11} = v - \vartheta - f(\xi) - (u - \xi)f'(\xi).$$

Для того чтобы линия  $\vartheta = 0$  стала характеристикой, необходимо, чтобы определитель матрицы  $A$  был равен нулю при  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$ ,  $\vartheta = 0$ :

$$\det A \Big|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}} = 0.$$

При указанных условиях определитель матрицы  $A$  имеет вид

$$\det A \Big|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}} = [c_0(\xi)f'(\xi) - f(\xi)]\{[c_0(\xi)f'(\xi) - f(\xi)]^2 - [c_0(\xi)f'(\xi)]^2 - c_0^2(\xi)\}. \quad (14)$$

При равенстве нулю первого множителя в выражении (14) [6] получаем уравнение для контактной характеристики, при равенстве нулю второго множителя получаем уравнение [6] для звуковой характеристики  $AD$  (см. рис. 1,б, 2,б):

$$f^2(\xi) - 2c_0(\xi)f(\xi)f'(\xi) - c_0^2(\xi) = 0. \quad (15)$$

Поскольку в рассматриваемых задачах  $AD$  является  $C^+$ -характеристикой, в преобразованиях перед квадратным корнем выбирается знак “плюс” и решение этого уравнения принимает следующий вид:

— при  $\gamma = 3$

$$f(\xi) = c_0(\xi)\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0(\xi)};$$

— при  $\gamma \neq 3$

$$f(\xi) = c_0(\xi)\sqrt{\beta + c_0^{(1-\varkappa)/\varkappa}(\xi)(\operatorname{tg}^2 \alpha - \beta)},$$

$$\beta = (\varkappa + 1)/(1 - \varkappa) = (\gamma + 1)/(3 - \gamma);$$

— при выполнении равенства (3)

$$f(\xi) = c_0(\xi)\sqrt{\beta}. \quad (16)$$

Справедлива следующая

**Теорема.** *Задача (11)–(13) при найденной функции  $f(\xi)$  является характеристической задачей Коши стандартного вида [6], поэтому в некоторой окрестности точки  $(\xi = 0, \vartheta = 0)$  существует единственное локально-аналитическое решение, представимое в виде сходящегося ряда*

$$\mathbf{U}(\xi, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k(\xi) \frac{\vartheta^k}{k!}, \quad \mathbf{U}_k(\xi) = \frac{\partial^k \mathbf{U}}{\partial \vartheta^k} \Big|_{\vartheta=0}. \quad (17)$$

Для доказательства теоремы задаются невырожденные матрицы

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ c_0(\xi)f'(\xi) - f(\xi) & \varkappa c_0(\xi)f'(\xi) & -\varkappa c_0(\xi) \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_0(\xi)f'(\xi) - f(\xi) \\ 0 & 1 & c_0(\xi)f'(\xi)/\varkappa \\ 0 & 0 & -c_0(\xi)/\varkappa \end{pmatrix}.$$

Получаем матрицу  $T_1 A T_2$  при  $\vartheta = 0$  в искомом виде

$$T_1 A T_2 \Big|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0 \\ \vartheta=0}} = \begin{pmatrix} -c_0(\xi)f'(\xi)/\varkappa & c_0(\xi)f'(\xi) - f(\xi) & 0 \\ c_0(\xi)f'(\xi) - f(\xi) & -\varkappa c_0(\xi)f'(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это свидетельствует о том, что характеристическая задача Коши (11)–(13) приведена к стандартному виду и данная звуковая характеристика имеет кратность, равную единице [6].

Необходимые условия разрешимости рассматриваемой характеристической задачи Коши [6] выполняются автоматически, поскольку ЦВ представляет собой точное решение СУГД.

Построение коэффициентов ряда (17) проводится стандартным для характеристической задачи Коши способом [6]. Сначала в системе (11) полагается  $\vartheta = 0$ , подставляются начальные условия (12) и проводятся тождественные преобразования. В результате для коэффициентов  $u_1, v_1$  получаем следующие соотношения:

$$u_1 = \frac{c_1}{\varkappa} \frac{f' c_0}{c_0 f' - f}, \quad v_1 = -\frac{c_1}{\varkappa} \frac{c_0}{c_0 f' - f}.$$

В силу равенства (15) соотношение для  $c_1$  имеет вид  $0 \cdot c_1 = 0$ . Данное соотношение выполняется, однако не позволяет найти  $c_1$ . После этого система (11) дифференцируется по  $\vartheta$ , полагается  $\vartheta = 0$  и в полученное выражение подставляются найденные коэффициенты. В результате тождественных преобразований получаются соотношения для  $u_2, v_2$ :

$$u_2 = -\frac{c_1 c_0' + c_0 c_1' + \varkappa u_1 u_0' - \varkappa c_0 u_1' - c_1^2 f' - c_0 f' c_2 + \varkappa(v_1 - 1 - u_1 f') u_1}{\varkappa(c_0 f' - f)},$$

$$v_2 = -\frac{c_1^2 + c_0 c_2 + \varkappa(v_1 - 1 - u_1 f') v_1 - \varkappa c_0 v_1'}{\varkappa(c_0 f' - f)}$$

и обыкновенное дифференциальное уравнение для  $c_1$ :

$$c_1' - c_1 \left( \frac{\varkappa + 3}{\varkappa + 1} \frac{f(c_0 f' - f)}{c_0(c_0^2 + f^2)} + \frac{1}{\varkappa + 1} \frac{f^2}{c_0(c_0^2 + f^2)} \right) - c_1 \frac{c_0 f''(c_0^2 + f^2) - (c_0 f' - c_0' f)(c_0 + f f')}{(c_0 f' - f)(c_0^2 + f^2)} + c_1^2 \left( \frac{2}{c_0'} \frac{(1 + f'^2)(c_0 f' - f)}{(c_0^2 + f^2)} \right) = 0. \quad (18)$$

Уравнение (18) представляет собой уравнение Бернулли, решение которого можно либо выписать в квадратурах, либо построить численно. С учетом краевого условия (13) определяется начальное условие для этого уравнения, и его решение  $c_1$  находится однозначно. В свою очередь, это позволяет однозначно определить  $u_1, v_1$ .

Далее с помощью метода индукции по  $k$  доказываем, что при  $k \geq 2$  остальные коэффициенты ряда (17) определяются однозначно:  $c_k$  — из обыкновенных дифференциальных уравнений при соответствующих начальных условиях,  $u_k, v_k$  — из алгебраических уравнений.

**4. Построение решения в согласованном случае.** Ниже рассматривается случай, когда выполняется равенство (3) и, следовательно, равенство (16). В этом случае решением уравнения (15) является функция

$$c_1(\xi) = \varkappa / \sqrt{\beta} = \text{const}.$$

Тогда

$$u_1(\xi) = -\varkappa / \sqrt{\beta} = \text{const}, \quad v_1(\xi) = (\varkappa + 1) / \beta = \text{const}.$$

В этом случае по аналогии с [3, 4] с помощью метода математической индукции доказываем, что при  $k \geq 2$

$$c_k(\xi) = u_k(\xi) = v_k(\xi) = 0,$$

поэтому в согласованном случае решение задачи (11)–(13) имеет вид

$$c(\xi, \eta) = \frac{\varkappa \xi + 1}{\varkappa + 1} + \frac{\varkappa}{\sqrt{\beta}} \vartheta,$$

$$u(\xi, \eta) = \frac{\xi - 1}{\varkappa + 1} - \frac{\varkappa}{\sqrt{\beta}} \vartheta, \quad v(\xi, \eta) = \frac{\varkappa + 1}{\beta} \vartheta, \quad (19)$$

что можно проверить путем прямой подстановки функций (19) в задачу (11)–(13).

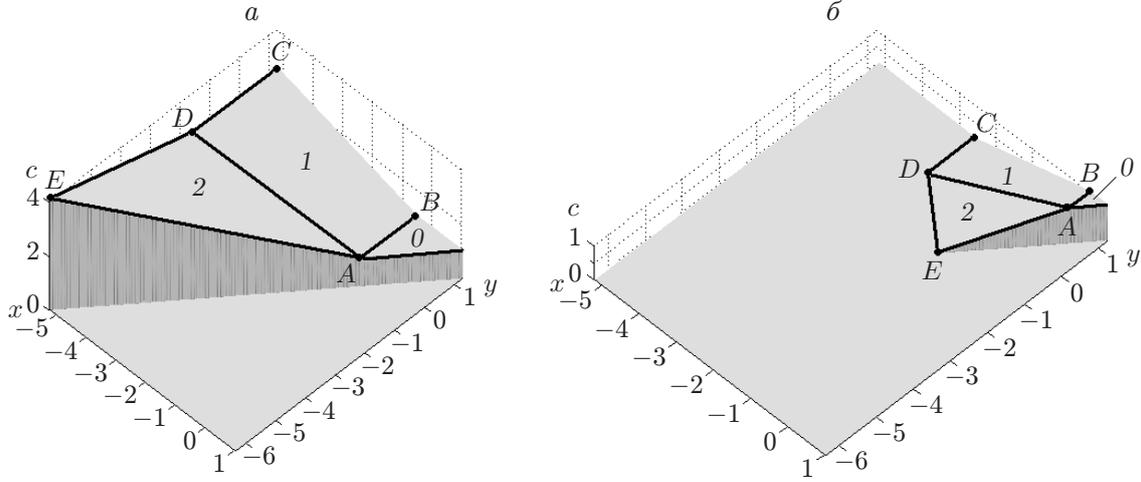


Рис. 3. Функция  $c(t, x, y)$  при  $t < 0$  (а) и  $t > 0$  (б) (обозначения те же, что на рис. 2)

В физических переменных в согласованном случае двойная волна имеет вид

$$c(t, x, y) = \frac{1}{\beta} \left( 1 + \varkappa \frac{x}{t} + \varkappa \sqrt{\beta} \frac{y}{t} \right),$$

$$u(t, x, y) = \left( 1 - \frac{\varkappa}{\beta} \right) \frac{x}{t} - \frac{\varkappa}{\sqrt{\beta}} \frac{y}{t} - \frac{1}{\beta}, \quad v(t, x, y) = -\frac{\varkappa}{\sqrt{\beta}} \frac{x}{t} + (1 - \varkappa) \frac{y}{t} - \frac{1}{\sqrt{\beta}}.$$

При отрицательных значениях времени ( $t < 0$ ) ДВ описывает процесс неограниченного сжатия газа начиная с какого-либо момента  $t = t_0 < 0$  до момента неограниченного сжатия ( $t = 0$ ). При положительных значениях времени  $t > 0$  ДВ описывает разлет газа в вакуум, начавшийся при  $t = 0$ . На рис. 3 приведены поверхности значений скорости звука  $c = c(t, x, y)$  при  $t < 0$  и  $t > 0$ .

Все искомые элементы обеих задач (о разлете в вакуум и о неограниченном сжатии), за исключением закона движения непроницаемого поршня  $DE$ , сжимающего ДВ, известны.

Построение поверхности, сжимающей газ в области ДВ, проводится следующим образом. Решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = u \equiv \left( 1 - \frac{\varkappa}{\beta} \right) \frac{x}{t} - \frac{\varkappa}{\sqrt{\beta}} \frac{y}{t} - \frac{1}{\beta}, \quad \frac{dy}{dt} = v \equiv -\frac{\varkappa}{\sqrt{\beta}} \frac{x}{t} + (1 - \varkappa) \frac{y}{t} - \frac{1}{\sqrt{\beta}},$$

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0$$

задает закон движения отдельной частицы газа, т. е. траекторию движения частицы газа в ДВ, которая в начальный момент времени  $t = t_0$  находилась в точке с координатами  $(x_0, y_0)$ .

Задача Коши имеет следующее решение:

$$x(t) = \frac{x_0 + \sqrt{\beta} y_0 + t_0/\varkappa}{1 + \beta} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{(1-\varkappa)/(1+\varkappa)} - \frac{1 + \sqrt{\beta} \varkappa (y_0/t_0 - \sqrt{\beta} x_0/t_0)}{\varkappa(1 + \beta)} t; \quad (20)$$

$$y(t) = \frac{(x_0 + \sqrt{\beta} y_0 + t_0/\varkappa) \sqrt{\beta}}{1 + \beta} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{(1-\varkappa)/(1+\varkappa)} + \frac{\varkappa (y_0/t_0 - \sqrt{\beta} x_0/t_0) - \sqrt{\beta}}{\varkappa(1 + \beta)} t. \quad (21)$$

Заметим, что любая такая траектория движения частицы газа, начавшаяся в точке  $(x_0, y_0)$ , заканчивается (коллапсируется) в точке начала координат  $(x = 0, y = 0)$ .

Последующие расчеты проведены для согласованного случая со значением показателя  $\gamma$ , соответствующим водороду:  $\gamma = 5/3$ ,  $\text{tg } \alpha = \sqrt{2}$ . Далее выбираются конкретные

значения  $t_0 = x_0$ , например  $t_0 = x_0 = -1$ . Затем в некоторый момент времени  $t = -1 + \varepsilon$  ( $\varepsilon$  — малая положительная константа) определяются координаты двух точек:

$$\begin{aligned} A: \quad x &= -1 + \varepsilon, \quad y = (-1 + \varepsilon) \operatorname{tg} \alpha, \\ D: \quad x &= x_p(-1 + \varepsilon), \quad y = \frac{\sqrt{\beta} \kappa x_p(-1 + \varepsilon)}{\kappa + 1} + \frac{\sqrt{\beta}}{\kappa + 1}, \end{aligned} \quad (22)$$

т. е. точка  $A$  лежит на звуковой характеристике  $AB$  и на косо́й стенке, а точка  $D$  лежит на поршне, сжимающем ЦВ, и на звуковой характеристике  $AD$ , разделяющей области ЦВ и ДВ. После этого на косо́й стенке ниже точки  $A$  выбирается некоторая точка  $E$ . На отрезке  $DE$  на одинаковом расстоянии друг от друга выбирается  $n$  точек

$$x = x_i^0, \quad y = y_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (23)$$

Будем полагать, что в момент времени  $t = -1 + \varepsilon$  эти точки лежат на поверхности непроницаемого поршня, сжимающего ДВ. Тогда траектории дальнейших движений этих точек описываются формулами (20), (21), в которых необходимо заменить  $t_0$  на  $(-1 + \varepsilon)$  и  $x_0, y_0$  на  $x_i^0, y_i^0$  соответственно. После этого в каждый требуемый момент времени  $t = t_1 \leq 0$  по формулам (20), (21) с учетом (22), (23) рассчитываются значения координат всех  $n$  траекторий. Положение полученных точек в момент  $t = t_1$  приблизительно соответствует положению непроницаемого поршня, сжимающего течение газа в ДВ.

На рис. 4–6 приведены распределения давления  $p = \rho^\gamma / \gamma$  в полученных течениях, когда положение точки  $E$  выбиралось тремя способами: 1) прямая  $DE$  перпендикулярна косо́й стенке; 2) прямая  $DE$  является продолжением вертикальной стенки  $CD$ ; 3) прямая  $DE$  имеет положительный угол наклона к косо́й стенке ( $k = (1/2) \operatorname{tg} \alpha$ ).

На рис. 4 приведено распределение давления газа в момент времени  $t_0 < t_1 < 0$  для случая, когда поршень в момент времени  $t = -1 + \varepsilon$  расположен перпендикулярно косо́й стенке.

На рис. 5 показано распределение давления газа в момент времени  $t_0 < t_1 < 0$  для случая, когда поршень в момент времени  $t = -1 + \varepsilon$  является продолжением вертикальной стенки  $CD$ .

На рис. 6 приведено распределение давления газа в момент времени  $t_0 < t_1 < 0$  для случая, когда угол наклона поршня к косо́й стенке в момент  $t = -1 + \varepsilon$  положительный. (В проведенных расчетах  $\varepsilon = 0,01$ .)

**5. Анализ построенного решения.** Выше указывалось, что ДВ восстанавливается однозначно как решение конкретной начально-краевой задачи, в которой начальные условия поставлены на характеристике, разделяющей области ЦВ и ДВ, а краевое условие является условием непротекания на косо́й стенке.

В таком образом однозначно определенном течении можно различными способами задать контактную характеристику, которая является поверхностью непроницаемого поршня, сжимающего ДВ. Установлено, что для разных контактных характеристик характер изменения давления вдоль них различен. В случае, показанном на рис. 6, на контактной характеристике наблюдается локальное повышение давления, соответствующее дополнительной кумуляции энергии в этой области течения.

В работе [2] с использованием решения [1] для описания неограниченного сжатия призматических объемов газа анализировалась только асимптотика течения при  $t \rightarrow 0$  в предположении наличия только одного сжимающего поршня и не исследовались свойства течений в пространстве физических переменных на всем временном промежутке от начального момента  $t = t_0$  до момента коллапса  $t = 0$ .

На основе полученных свойств ДВ можно сделать некоторые выводы, связанные с физическими экспериментами по реализации УТС [7]. С практической точки зрения математические результаты следует рассматривать только как рекомендации для проведения

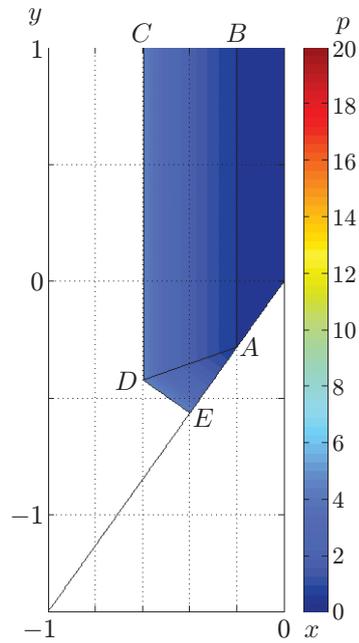


Рис. 4

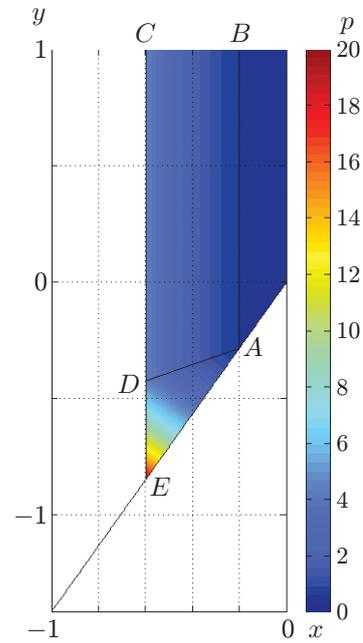


Рис. 5

Рис. 4. Функция  $p(t, x, y)$  при  $t_0 < t_1 < 0$  для случая, когда поршень расположен перпендикулярно кривой стенке

Рис. 5. Функция  $p(t, x, y)$  при  $t_0 < t_1 < 0$  для случая, когда поршень является продолжением вертикальной стенки  $CD$

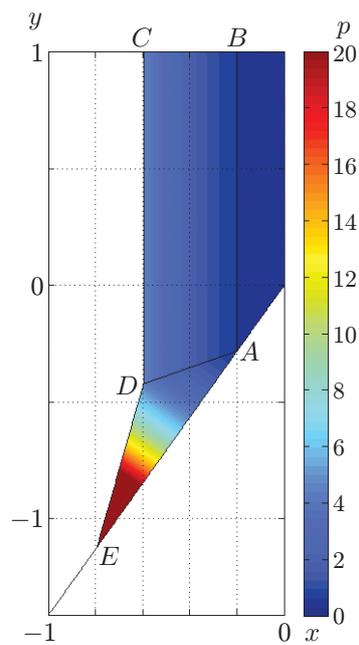


Рис. 6. Функция  $p(t, x, y)$  при  $t_0 < t_1 < 0$  для случая, когда угол наклона поршня к кривой стенке положительный

физических экспериментов. В качестве таких рекомендаций могут выступать геометрические характеристики сжимающих поршней и законы их воздействия на сжимаемую среду. Однако в экспериментах достаточно трудно реализовать рекомендации по воздействию на мишень с помощью заданного закона движения непроницаемых сжимающих поршней, в том числе потому, что время воздействия на мишень очень мало, а затрачиваемая энергия велика.

В реальных физических экспериментах воздействие на мишень, как правило, осуществляется с помощью возрастающего давления на мишень. Если в экспериментах с использованием конкретного закона возрастания давления реализуется первый или второй вариант движения сжимающего поршня, увеличения степени кумуляции не происходит. Если реализуется третий вариант движения сжимающего поршня, то увеличение степени кумуляции сопровождается сильнонеравномерным распределением давления в сжимаемом газе, что может привести к неустойчивости всего течения. Следует отметить, что именно неустойчивость течения не позволила до настоящего времени реализовать УТС, например в установке NIF [8].

**Заключение.** В пространстве физических переменных построена двумерная центрированная волна в виде бесконечного сходящегося ряда. Состыковка этого решения с решением в виде простой центрированной волны позволила описать течения, возникающие как при истечении газа с косой стенки, так и при неограниченном сжатии призматических объемов газа. Для одного частного случая установлено, что возможно сжатие газа в двумерной центрированной волне путем воздействия различных непроницаемых поршней. Полученные законы внешнего воздействия могут быть использованы в физических экспериментах по реализации УТС, в том числе для выявления возможной неустойчивости течения в случае сильного сжатия призматических объемов газа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Сучков В. А.** Истечение газа в вакуум на косой стенке // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, № 4. С. 739–740.
2. **Сидоров А. А.** Некоторые оценки степени кумуляции энергии при плоском и пространственном сжатии газа // Докл. АН. 1991. Т. 318, № 3. С. 548–552.
3. **Баутин С. П.** Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум / С. П. Баутин, С. Л. Дерябин. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 2005.
4. **Баутин С. П.** Математическое моделирование сильного сжатия газа. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 2007.
5. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.
6. **Баутин С. П.** Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 2009.
7. **Илькаев Р. И., Гаранин С. Г.** Исследование проблем термоядерного синтеза на мощных лазерных установках // Вестн. РАН. 2006. Т. 76, № 6. С. 503–513.
8. **Bernstein L. A.** Reactions on excited states using the national ignition facility. Nuclear astrophysics using NIF. Livermore, 2007. (Prepr. / Lawrence Livermore Nat. Lab.; UCRL PRES-233342).

*Поступила в редакцию 28/IX 2020 г.,  
после доработки — 20/XI 2020 г.  
Принята к публикации 30/XI 2020 г.*