УДК 519.632

Аналитическое решение обобщенной спектральной задачи в методе пересчета граничных условий для бигармонического уравнения*

С.Б. Сорокин

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090
Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090
E-mail: sorokin@sscc.ru

Сорокин С.Б. Аналитическое решение обобщенной спектральной задачи в методе пересчета граничных условий для бигармонического уравнения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 3. — С. 267–274.

Для численного решения задачи теории упругости в приближении теории пластин со смешанными граничными условиями предложен и обоснован итерационный метод с экономичным переобусловливателем. Получены неулучшаемые константы энергетической эквивалентности, необходимые для оптимизации итерационного процесса. Обращение переобусловливателя эквивалентно двукратному обращению дискретного аналога оператора Лапласа с краевыми условиями Дирихле.

Ключевые слова: *бигармоническое уравнение, краевые условия, итерационный процесс, уравнение Пуассона, пластина, задача Дирихле.*

Sorokin S.B. Analytical solution of generalized spectral problem in the method of recalculating boundary conditions for a biharmonic equation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2013. — Vol. 16, № 3. — P. 267–274.

An iterative algorithm with an efficient preconditioner for the numerical solution of an elastic problem in approximation of plate theory with mixed boundary conditions is proposed and substantiated. Exact constants of energy equivalence for optimization of iteration method are obtained. Inversion of the preconditioner is equivalent to the double inversion of a discrete analog of the Laplace operator with the Dirichlet boundary conditions.

Key words: *biharmonic equation, boundary conditions, iterative method, Poisson's equation, plate, Dirichlet problem.*

Введение

При использовании теории пластин — приближения полной системы уравнений теории упругости в случае, когда один из линейных размеров тела мал по сравнению с его размерами в двух других направлениях — определению подлежит скалярная функция, удовлетворяющая бигармоническому уравнению и краевым условиям, соответствующим способу закрепления тела (пластины).

*Работа выполнена при финансовой поддержке Программы № 1.3 фундаментальных исследований ОМН РАН "Современные вычислительные и информационные технологии решения больших задач", Программы Президиума РАН "Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация", ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России".

Для численного решения бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u = f, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{1}$$

с краевыми условиями, соответствующими защемленной пластине (задача Дирихле),

$$u \,|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{du}{dn}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

различными авторами [1–4] предлагались алгоритмы, позволяющие получать решение исходной задачи с помощью обращения бигармонического оператора с краевыми условиями шарнирного опирания:

$$u \,|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta u \,|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3}$$

поскольку решение задачи (1), (3) сводится к двукратному обращению оператора Лапласа с краевыми условиями Дирихле.

В [5] обосновано применение к задаче о защемленной пластине идеи, предложенной в [6, 7], для реализации граничных условий при численном решении смешанной задачи теории упругости. Использование для задачи (1), (2) описанного в [6] подхода означает замену решения бигармонического уравнения с краевыми условиями (2) на решение последовательности задач для этого же уравнения, но с краевыми условиями шарнирного опирания (3). Построенный таким способом процесс совпал с наилучшим для прямоугольных областей неявным итерационным методом, рассмотренным в [4]. В отличие от [4], в [5] получены количественные оценки констант энергетической эквивалентности.

В данной работе исследованный в [5] алгоритм применяется к задаче (1) со смешанными краевыми условиями: на двух противоположных краях пластины задано условие шарнирного опирания (3), а на двух других — условия защемления (2). Существенно, что для предложенного итерационного процесса приведено аналитическое решение обобщенной спектральной задачи, т. е. получены **точные** константы энергетической эквивалентности, что позволяет наряду с методом сопряженных градиентов эффективно использовать метод Ричардсона с чебышевским набором параметров.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу

$$\Delta^2 u = f, \quad (x_1, x_2) \in \Omega = (0,1) \times (0,1), \tag{4}$$

$$u \,|_{\Gamma} = 0, \quad \Delta u \,|_{\Gamma} = 0, \tag{5}$$

$$u \,|_{\gamma} = 0, \quad \left.\frac{du}{dn}\right|_{\gamma} = 0, \tag{6}$$

$$\partial\Omega = \Gamma \cup \gamma, \qquad \gamma = \{x = (x_1, x_2) : \ x_1 = 0, 1; \ x_2 \in (0,1)\}. \tag{7}$$

Введем сетки с шагами $h_k = 1/(N_k + 1)$, $k = 1, 2:$

$$\bar\omega = \{(x_{1,i}, x_{2,j}), \quad x_{1,i} = ih_1, \quad x_{2,j} = jh_2, \quad i = 0, 1, \ldots, N_1 + 1, \quad j = 0, 1, \ldots, N_2 + 1\},$$
$$\mathring\omega = \{(x_{1,i}, x_{2,j}), \quad x_{1,i} = ih_1, \quad x_{2,j} = jh_2, \quad i = 2, \ldots, N_1 - 1, \quad j = 2, \ldots, N_2 - 1\},$$
$$\gamma_{\pm h_1} = \{(x_{1,1}, x_{2,j}), \quad j = 1, \ldots, N_2\} \cup \{(x_{1,N_1}, x_{2,j}), \quad j = 1, \ldots, N_2\}.$$

Пусть V_ω — пространство сеточных функций $y = (y_{ij})$, заданных на множестве узлов, принадлежащих $\bar\omega$, так что $y_{ij} = y(x_{1,i}, x_{2,j})$, $(x_{1,i}, x_{2,j}) \in \bar\omega$, и равных нулю, когда $(x_{1,i}, x_{2,j}) \in \partial\Omega$.

Скалярное произведение в V_ω определим следующим образом:

$$(v, w) = \sum_{(x_{1,i},x_{2,j})\in\bar\omega\backslash\partial\Omega} v_{ij} w_{ij} h_1 h_2 \quad \forall\, v, w \in V_\omega.$$

В качестве дискретного аналога (4)–(7) выберем [9]:

$$y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1} + 2y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} + y_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2} = f(x_{1,i}, x_{2,j}), \quad (x_{1,i}, x_{2,j}) \in \mathring{\omega}, \tag{8}$$

$$y(x_{1,i}, x_{2,j}) = 0, \quad (x_{1,i}, x_{2,j}) \in \partial\Omega, \tag{9}$$

$$l_2(y)(x_{1,i}, x_{2,j}) = f(x_{1,i}, x_{2,j}), \quad (x_{1,i}, x_{2,j}) \in \bar\omega\backslash(\mathring{\omega} \cup \partial\Omega)\backslash\gamma_{\pm h_1}, \tag{10}$$

$$l_1(y)(x_{1,i}, x_{2,j}) + l_2(y)(x_{1,i}, x_{2,j}) = f(x_{1,i}, x_{2,j}), \quad (x_{1,i}, x_{2,j}) \in \gamma_{\pm h_1}, \tag{11}$$

где операторы l_1 и l_2 сеточной функции $y = (y_{ij})$ из V_ω ставят в соответствие сеточные функции, заданные на $\gamma_{\pm h_1}$ и $\bar\omega\backslash(\mathring{\omega} \cup \partial\Omega)$ соответственно, по следующему правилу:

$$l_1(y)(x_{1,i}, x_{2,j}) = \begin{cases} \dfrac{2}{h_1^3}\, y_{\bar{x}_1,1,j}, & i = 1,\ j = \overline{1, N_2}, \\ -\dfrac{2}{h_1^3}\, y_{x_1,N_1,j}, & i = N_1,\ j = \overline{1, N_2}, \end{cases}$$

$$l_2(y)(x_{1,i}, x_{2,j})$$

$$= \begin{cases}
\left[-\dfrac{1}{h_1^2}\, y_{x_1\bar{x}_1} + \dfrac{1}{h_1}\, y_{x_1\bar{x}_1 x_1} + y_{x_2\bar{x}_2 x_2\bar{x}_2} + 2y_{x_1\bar{x}_1 x_2\bar{x}_2}\right]_{1,j}, & i = 1,\ j = \overline{2, N_2 - 1}, \\
\left[-\dfrac{1}{h_1^2}\, y_{x_1\bar{x}_1} - \dfrac{1}{h_1}\, y_{x_1\bar{x}_1\bar{x}_1} + y_{x_2\bar{x}_2 x_2\bar{x}_2} + 2y_{x_1\bar{x}_1 x_2\bar{x}_2}\right]_{N_1,j}, & i = N_1,\ j = \overline{2, N_2 - 1}, \\
\left[-\dfrac{1}{h_2^2}\, y_{x_2\bar{x}_2} + \dfrac{1}{h_2}\, y_{x_2\bar{x}_2 x_2} + y_{x_1\bar{x}_1 x_1\bar{x}_1} + 2y_{x_1\bar{x}_1 x_2\bar{x}_2}\right]_{i,1}, & j = 1,\ i = \overline{2, N_1 - 1}, \\
\left[-\dfrac{1}{h_2^2}\, y_{x_2\bar{x}_2} + \dfrac{1}{h_2}\, y_{x_2\bar{x}_2\bar{x}_2} + y_{x_1\bar{x}_1 x_1\bar{x}_1} + 2y_{x_1\bar{x}_1 x_2\bar{x}_2}\right]_{i,N_2}, & j = N_2,\ i = \overline{2, N_1 - 1}, \\
\left[-\dfrac{1}{h_1^2}\, y_{x_1\bar{x}_1} + \dfrac{1}{h_1}\, y_{x_1\bar{x}_1 x_1} - \dfrac{1}{h_2^2}\, y_{x_2\bar{x}_2} + \dfrac{1}{h_2}\, y_{x_2\bar{x}_2 x_2} + 2y_{x_1\bar{x}_1 x_2\bar{x}_2}\right]_{1,1}, & i = 1,\ j = 1, \\
\left[-\dfrac{1}{h_1^2}\, y_{x_1\bar{x}_1} - \dfrac{1}{h_1}\, y_{x_1\bar{x}_1\bar{x}_1} - \dfrac{1}{h_2^2}\, y_{x_2\bar{x}_2} + \dfrac{1}{h_2}\, y_{x_2\bar{x}_2 x_2} + 2y_{x_1\bar{x}_1 x_2\bar{x}_2}\right]_{N_1,1}, & i = N_1,\ j = 1, \\
\left[-\dfrac{1}{h_1^2}\, y_{x_1\bar{x}_1} + \dfrac{1}{h_1}\, y_{x_1\bar{x}_1 x_1} - \dfrac{1}{h_2^2}\, y_{x_2\bar{x}_2} - \dfrac{1}{h_2}\, y_{x_2\bar{x}_2\bar{x}_2} + 2y_{x_1\bar{x}_1 x_2\bar{x}_2}\right]_{1,N_2}, & i = 1,\ j = N_2, \\
\left[-\dfrac{1}{h_1^2}\, y_{x_1\bar{x}_1} - \dfrac{1}{h_1}\, y_{x_1\bar{x}_1\bar{x}_1} - \dfrac{1}{h_2^2}\, y_{x_2\bar{x}_2} - \dfrac{1}{h_2}\, y_{x_2\bar{x}_2\bar{x}_2} + 2y_{x_1\bar{x}_1 x_2\bar{x}_2}\right]_{N_1,N_2}, & i = N_1,\ j = N_2.
\end{cases}$$

Задача (8)–(11) аппроксимирует (4)–(7) со вторым порядком точности.

2. Итерационный метод

Для решения (8)–(11) применим следующий итерационный алгоритм.

A1. Считая заданными значения $y^k_{i,j}$ сеточной функции $y^k \in V_\omega$ для $(x_{1,i}, x_{2,j}) \in \bar\omega$ и используя соотношения (11), значения $y^{k+1}_{i,j}$ сеточной функции $y^{k+1} \in V_\omega$ подчиним условиям:

$$\begin{gathered} l_2(y^{k+1})(x_{1,i}, x_{2,j}) \\ = l_2(y^k)(x_{1,i}, x_{2,j}) + \tau_{k+1}\big[f(x_{1,i}, x_{2,j}) - l_1(y^k)(x_{1,i}, x_{2,j}) - l_2(y^k)(x_{1,i}, x_{2,j})\big], \\ (x_{1,i}, x_{2,j}) \in \gamma_{\pm h_1}. \end{gathered} \tag{12}$$

A2. Вычисляем значения $y^{k+1}_{i,j}$ сеточной функции $y^{k+1} \in V_\omega$ в узлах сетки $\mathring{\omega}$, решая задачу

$$y^{k+1}_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1,\, i,j} + 2y^{k+1}_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2,\, i,j} + y^{k+1}_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2,\, i,j} = f(x_{1,i}, x_{2,j}), \quad (x_{1,i}, x_{2,j}) \in \mathring{\omega}, \tag{13}$$

с граничными условиями, определенными в A1 и

$$y^{k+1}(x_{1,i}, x_{2,j}) = 0, \quad (x_{1,i}, x_{2,j}) \in \partial\Omega, \tag{14}$$

$$l_2(y^{k+1})(x_{1,i}, x_{2,j}) = f(x_{1,i}, x_{2,j}), \quad (x_{1,i}, x_{2,j}) \in \bar{\omega} \backslash (\mathring{\omega} \cup \partial\Omega) \backslash \gamma_{\pm h_1}. \tag{15}$$

A3. Значения $y^{k+1}_{i,j}$ для $(x_{1,i}, x_{2,j}) \in \bar{\omega}$ определены, переходим к A1.

Для определения y^{k+1} необходимо решить задачу, являющуюся разностным аналогом задачи о прогибе пластины с граничными условиями шарнирного опирания, что эквивалентно двукратному обращению дискретного аналога оператора Лапласа с краевыми условиями Дирихле. Таким образом, решение исходной задачи с “плохими” краевыми условиями (9)–(11) мы заменяем решением последовательности задач с “хорошими” краевыми условиями (12), (14), (15) — шарнирного опирания, заданными на всей границе.

3. Исследование сходимости

Алгоритм A1–A2 является двухслойным итерационным методом. Исследуем скорость его сходимости.

В каноническом виде описанный алгоритм записывается следующим образом:

$$B\frac{y^{k+1} - y^k}{\tau_{k+1}} + Ay^k = F, \tag{16}$$

где $A = A^* > 0$ — оператор из исходной дискретной задачи (8)–(11), а $B = B^* > 0$ — оператор задачи (12)–(15), ставящий каждой функции y из V_ω сеточную функцию By из V_ω по правилу

$$By(x_{1,i}, x_{2,j}) = \begin{cases} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1} + 2y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} + y_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2}, & (x_{1,i}, x_{2,j}) \in \mathring{\omega}, \\ l_2(y)(x_{1,i}, x_{2,j}), & (x_{1,i}, x_{2,j}) \in \bar{\omega} \setminus \mathring{\omega}. \end{cases}$$

Для построения оптимального набора параметров в (16) необходимо оценить константы энергетической эквивалентности δ, Δ в операторных неравенствах:

$$\delta B \le A \le \Delta B. \tag{17}$$

Наилучшими (неулучшаемыми) константами энергетической эквивалентности являются минимальное и максимальное собственные числа обобщенной спектральной задачи

$$Av = \lambda Bv. \tag{18}$$

Легко видеть, что $A = B + C$, где действие оператора $C : V_\omega \to V_\omega$ определяется соотношениями:

$$Cy(x_{1,i},x_{2,j}) = \begin{cases} 0, & i=2,\dots,N_1,\ j=1,\dots,N_2, \\ l_1(y)(x_{1,1},x_{2,j}) = \dfrac{2}{h_1^3} y_{\bar{x}_1,\,1,j}, & j=1,\dots,N_2, \\ l_1(y)(x_{1,N_1},x_{2,j}) = -\dfrac{2}{h_1^3} y_{x_1,\,N_1,j}, & j=1,\dots,N_2. \end{cases}$$

Очевидно, что собственные числа λ исследуемой спектральной задачи (16) равны $\lambda = 1+\mu$, где μ собственные числа задачи

$$Cv = \mu B v. \tag{19}$$

Получим матрицы операторов этой задачи в базисе, состоящем из собственных функций оператора B, являющегося разностным аналогом бигармонического оператора с однородными краевыми условиями шарнирного опирания. Известно, что собственные функции оператора B совпадают с собственными функциями разностного аналога оператора Лапласа с однородными краевыми условиями Дирихле:

$$\Phi_{kl}(x_{1i},x_{2j}) = \varphi_k(x_{1,i})\ \psi_l(x_{2,j}), \quad (x_{1i},x_{2j}) \in \bar{\omega}\backslash\partial\Omega,\ k=1,\dots,N_1,\ l=1,\dots,N_2,$$
$$(\varphi_k)_{x_1\bar{x}_1} = -\alpha_k\varphi_k,\ \ (\psi_l)_{x_2\bar{x}_2} = -\beta_l\psi_l,$$
$$\varphi_k(x_{1,i}) = \sqrt{2}\sin(k\pi x_{1,i}), \quad \alpha_k = \frac{4}{h_1^2}\sin^2\left(\frac{k\pi h_1}{2}\right), \quad k=1,\dots,N_1,\ i=1,\dots,N_1,$$
$$\psi_l(x_{2,j}) = \sqrt{2}\sin(l\pi x_{2,j}), \quad \beta_l = \frac{4}{h_2^2}\sin^2\left(\frac{l\pi h_2}{2}\right), \quad l=1,\dots,N_2,\ j=1,\dots,N_2.$$

Непосредственные вычисления дают:

$$(B\,\Phi_{kl},\Phi_{nm}) = \begin{cases} (\alpha_k+\beta_l)^2, & n=k,\ m=l, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$
$$(C\,\Phi_{kl},\Phi_{nm}) = \frac{2}{h_1^4}\Big(\sqrt{2}\sin(k\pi h_1)\,\sqrt{2}\sin(n\pi h_1) + \sqrt{2}\sin(k\pi N_1 h_1)\,\sqrt{2}\sin(n\pi N_1 h_1)\Big)h_1\delta_{lm}.$$

Если пронумеровать элементы базиса Φ_{kl} в следующем порядке:

$$\Phi_{11},\Phi_{21},\dots,\Phi_{N_11},\Phi_{12},\Phi_{22},\dots,\Phi_{N_12},\dots,\Phi_{1N_2},\Phi_{2N_2},\dots,\Phi_{N_1N_2},$$

то оператору B будет соответствовать блочно-диагональная матрица

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{B}_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{B}_{N_2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_l = \begin{bmatrix} b_1(l) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2(l) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{N_1}(l) \end{bmatrix},$$

$$b_k(l) = (\alpha_k+\beta_l)^2, \quad l=1,\dots,N_2,\ k=1,\dots,N_1,$$

а оператору C будет соответствовать блочно-диагональная матрица

$$\boldsymbol{C} = \frac{2}{h_1^3}\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}_{N_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}_{N_1} & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}_{N_1} \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{C}_1 = \varphi_1\otimes\varphi_1^\top, \quad \boldsymbol{C}_{N_1} = \varphi_{N_1}\otimes\varphi_{N_1}^\top.$$

Здесь $\otimes$ означает тензорное произведение матриц, а φ_k — вектор с компонентами:

$$(\varphi_k)_i = \sqrt{2}\sin(k\pi i h_1), \quad i = 1, \ldots, N_1.$$

Итак, учитывая блочную структуру матриц, искомый в (19) набор собственных чисел μ составляют собственные числа задач:

$$\frac{2}{h_1^3}\Big(\varphi_1 \otimes \varphi_1^\top + \varphi_{N_1} \otimes \varphi_{N_1}^\top\Big)\xi = \mu \begin{bmatrix} b_1(l) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2(l) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{N_1}(l) \end{bmatrix} \xi, \quad l = 1, \ldots, N_2. \tag{20}$$

Непосредственная проверка показывает справедливость равенства

$$\Big(\varphi_1 \otimes \varphi_1^\top + \varphi_{N_1} \otimes \varphi_{N_1}^\top\Big)\, \varphi_k = 0, \quad k = 2, \ldots, N_1 - 1.$$

Это означает, что каждая из спектральных задач (20) имеет только два отличных от нуля собственных числа. Соответствующие этим двум собственным числам собственные векторы должны быть ортогональны φ_k, $k = 2, \ldots, N_1 - 1$, в скалярном произведении, порождаемым матрицей, стоящей в правой части (20).

Легко проверяется, что таковыми будут:

$$\hat\varphi_1(l) = \left(\frac{1}{b_1(l)}(\varphi_1)_1, \frac{1}{b_2(l)}(\varphi_1)_2, \ldots, \frac{1}{b_{N_1}(l)}(\varphi_1)_{N_1}\right)^\top,$$

$$\hat\varphi_{N_1}(l) = \left(\frac{1}{b_1(l)}(\varphi_{N_1})_1, \frac{1}{b_2(l)}(\varphi_{N_1})_2, \ldots, \frac{1}{b_{N_1}(l)}(\varphi_{N_1})_{N_1}\right)^\top.$$

Подставляя в (20) вместо ξ линейную комбинацию $\alpha\hat\varphi_1(l) + \beta\hat\varphi_{N_1}(l)$, приходим к

$$\frac{2}{h_1^3}\Big(\big(\alpha\varphi_1^\top\hat\varphi_1(l) + \beta\varphi_1^\top\hat\varphi_{N_1}(l)\big)\varphi_1 + \big(\alpha\varphi_{N_1}^\top\hat\varphi_1(l) + \beta\varphi_{N_1}^\top\hat\varphi_{N_1}(l)\big)\varphi_{N_1}\Big) = \mu\big(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_{N_1}\big).$$

Приравнивая коэффициенты перед линейно независимыми векторами φ_1, φ_{N_1}, получаем спектральную задачу для определения отличных от нуля собственных чисел

$$\frac{2}{h_1^3}\begin{bmatrix} \varphi_1^\top\hat\varphi_1(l) & \varphi_1^\top\hat\varphi_{N_1}(l) \\ \varphi_{N_1}^\top\hat\varphi_1(l) & \varphi_{N_1}^\top\hat\varphi_{N_1}(l) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix} = \mu\begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix},$$

из которой находим

$$\mu_\pm(l) = \frac{2}{h_1^3}\left(\frac{\big(\varphi_1^\top\hat\varphi_1(l) + \varphi_{N_1}^\top\hat\varphi_{N_1}(l)\big)}{2} \pm \frac{\sqrt{\big(\varphi_1^\top\hat\varphi_1(l) + \varphi_{N_1}^\top\hat\varphi_{N_1}(l)\big)^2 - 4\big(\varphi_1^\top\hat\varphi_1(l)\varphi_{N_1}^\top\hat\varphi_{N_1}(l) - \big(\varphi_1^\top\hat\varphi_{N_1}(l)\big)^2\big)}}{2}\right),$$

$$l = 1, \ldots, N_2.$$

Теорема 1. *Все собственные числа задачи $Av = \lambda Bv$, отличные от единицы равны:*

$$\lambda_{\pm}(l) = 1 + \frac{2}{h_1^3}\left(\frac{\left(\varphi_1^\top \hat{\varphi}_1(l) + \varphi_{N_1}^\top \hat{\varphi}_{N_1}(l)\right)}{2} \pm \frac{\sqrt{\left(\varphi_1^\top \hat{\varphi}_1(l) + \varphi_{N_1}^\top \hat{\varphi}_{N_1}(l)\right)^2 - 4\left(\varphi_1^\top \hat{\varphi}_1(l)\varphi_{N_1}^\top \hat{\varphi}_{N_1}(l) - \left(\varphi_1^\top \hat{\varphi}_{N_1}(l)\right)^2\right)}}{2}\right),$$

$$l = 1, \ldots, N_2,$$

$$(\varphi_1)_i = \sqrt{2}\sin(\pi i h_1), \ (\varphi_{N_1})_i = \sqrt{2}\sin(N_1 \pi i h_1), \quad i = 1, \ldots, N_1,$$

$$\hat{\varphi}_1(l) = \left(\frac{1}{b_1(l)}(\varphi_1)_1, \frac{1}{b_2(l)}(\varphi_1)_2, \ldots, \frac{1}{b_{N_1}(l)}(\varphi_1)_{N_1}\right)^\top,$$

$$\hat{\varphi}_{N_1}(l) = \left(\frac{1}{b_1(l)}(\varphi_{N_1})_1, \frac{1}{b_2(l)}(\varphi_{N_1})_2, \ldots, \frac{1}{b_{N_1}(l)}(\varphi_{N_1})_{N_1}\right)^\top,$$

$$b_k(l) = \left[\alpha_k + \beta_l\right]^2, \quad k = 1, \ldots, N_1,$$

$$\alpha_k = \frac{4}{h_1^2}\sin^2\left(\frac{k\pi h_1}{2}\right), \quad k = 1, \ldots, N_1, \qquad \beta_l = \frac{4}{h_2^2}\sin^2\left(\frac{l\pi h_2}{2}\right), \quad l = 1, \ldots, N_2.$$

Таким образом, искомыми **(неулучшаемыми)** константами энергетической эквивалентности δ, Δ в (17) являются

$$\delta = 1, \quad \Delta = \lambda_+(1),$$

и в (16) можно использовать оптимальный набор чебышевских параметров, построенный по ним.

Полученный результат может быть улучшен, если в (16) специальным образом выбрать начальное приближение

$$y^0 : By^0 = F. \tag{21}$$

При таком выборе начального приближения погрешности $z^k = y^k - y$ для y^k, получаемых из итерационного процесса (16), как и в итерационных процессах, исследованных в [8], принадлежат некоторому подпространству. Это подпространство может быть описано следующим образом:

$$W = \mathrm{Span}\{v_i : \, Av_i = \lambda_i Bv_i \quad \text{для } \lambda_i \neq 1\}.$$

Поэтому знание собственных чисел обобщенной спектральной задачи $Av = \lambda Bv$, т. е. **точных** констант энергетической эквивалентности

$$\bar{\delta}B \leq A \leq \bar{\Delta}B, \quad \bar{\delta} = \lambda_-(N_2), \quad \bar{\Delta} = \lambda_+(1),$$

в подпространстве W, позволяет использовать оптимальный набор чебышевских параметров в итерационном процессе (16), построенный по $\bar{\delta}$, $\bar{\Delta}$.

Таким образом, из [8] и общей теорией неявных двухслойных итерационных методов [10, 11] следует, что справедлива

Теорема 2. *Итерационный процесс* (16), *при выборе начального приближения из* (21), *сходится для* $0 < \tau < 2/\bar{\Delta}$.

При выборе $\tau = \tau_0 = 2/(\bar{\delta} + \bar{\Delta})$ *для погрешности* $z^n = y^n - y$ *имеет место оценка*

$$\|z^n\|_D \le \rho_0^n \|z^0\|_D, \quad \rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi},$$

а при использовании чебышевского набора параметров $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ *справедливо*

$$\|z^n\|_D \le \frac{2\rho_1^n}{1+\rho_1^{2n}} \|z^0\|_D, \quad \rho_1 = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}},$$

где $\xi = \bar{\delta}/\bar{\Delta}$, *а* $D = A$ *или* $D = B$.

Благодарности. Автор благодарит академика А.Н. Коновалова за постоянный интерес к работе, выразившийся, в том числе, и в многочисленных ее обсуждениях.

Литература

1. **Пальцев Б.В.** О разложении решений задачи Дирихле и смешанной задачи для бигармонического уравнения в ряд по решениям распадающихся задач // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1966. — Т. 6, № 1. — С. 43–51.
2. **Бугров А.Н.** Метод фиктивных областей для уравнений с частными производными эллиптического типа // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Часть II. Материалы V Всесоюзной конференции. — Новосибирск: Изд-во ИТПМ СО АН СССР, 1978. — С. 24–35.
3. **Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.** Численное исследование вариационных неравенств. — М.: Мир, 1979.
4. **Вабищевич П.Н.** Численное решение краевых задач для эллиптических уравнений четвертого порядка // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1984. — Т. 24, № 8. — С. 1196–1206.
5. **Сорокин С.Б.** Переобусловливание при численном решении задачи Дирихле для бигармонического уравнения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2011. — Т. 14, № 2. — С. 205–213.
6. **Коновалов А.Н.** Численное решение задачи теории упругости. — Новосибирск: Наука, 1968.
7. **Коновалов А.Н.** О численном решении смешанной задачи упругости // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1969. — Т. 9, № 2. — С. 469–474.
8. **Кузнецов Ю.А.** Итерационные методы в подпространствах. — М.: Изд-во ОВМ АН СССР, 1984.
9. **Самарский А.А., Андреев В.Б.** Разностные методы для эллиптических уравнений. — М.: Наука, 1979.
10. **Самарский А.А., Николаев Е.С.** Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.
11. **Марчук Г.И.** Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 15 марта 2012 г.,
в окончательном варианте 4 мая 2012 г.