

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КРЫЛА В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ЭКРАНА

Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассмотрена задача о движении тонкого крыла в стратифицированной жидкости вблизи экрана. Решение строится с помощью динамического логарифмического потенциала. Исследована зависимость гидродинамической силы и момента от входных параметров: чисел Струхала и Фруда и расстояния до экрана. Существенной особенностью амплитуд нестационарных нагрузок на крыле является их немонотонный характер в случае, если частота колебаний меньше частоты Брента — Вайсяля, что объясняется взаимодействием колебаний крыла с отраженными от экрана внутренними волнами.

Влиянию экрана на гидродинамические характеристики крыла в однородной жидкости посвящено большое число работ. Обобщение полученных результатов содержится в [1]. В [2, 3] рассмотрены нестационарное движение крыла и силы, действующие на него, в однородно стратифицированной безграничной жидкости. В данной работе исследуются нестационарные гидродинамические характеристики крыла в стратифицированной жидкости вблизи дна.

1. Как и в [2], будем моделировать крыло бесконечно тонкой пластиной длины $2c$ (c — полухорда крыла), которая расположена на расстоянии h от экрана. Введем декартову систему координат (x, y) , направив ось x вдоль экрана. Крыло движется с постоянной скоростью V в горизонтальном направлении. В момент времени $t = 0$ проекция крыла на ось Ox занимает отрезок $[-c, c]$ (рис. 1). В этот момент крыло начинает колебаться по заданному закону в поперечном направлении:

$$v_2(x, t) = f(x, t) \quad (1.1)$$

($\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ — вектор скорости).

Предполагается, что стратификация жидкости слабая и имеет экспоненциальный характер

$$\rho_0(y) = \rho_* \exp(-\beta y), \quad \beta = \text{const},$$

а также, что размеры крыла малы по сравнению с характерным размером стратификации, т. е. $c\beta \ll 1$. Тогда можно использовать приближение Буссинеска. В результате для функции тока $\psi(\mathbf{x}, t)$ ($\mathbf{x} = (x, y)$) получим уравнение Соболева

$$\frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial t^2} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (1.2)$$

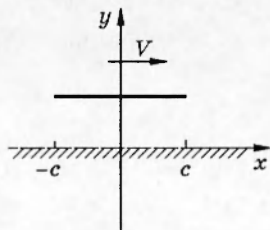


Рис. 1. Крыло возле экрана

($\omega_0^2 = -g\rho'_0/\rho_0$ — частота Брента — Вайсяля).

Движение жидкости удовлетворяет, таким образом, уравнению (1.2) вне крыла и следа при $t > 0$, начальным условиям

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = \psi_t(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad (1.3)$$

а также граничным условиям: условию непротекания на крыле (1.1) и экране

$$v_2(x, 0, t) = 0,$$

условиям в следе

$$[v_2] = [p] = 0, \quad (1.4)$$

условиям Кутта — Жуковского на задней кромке. Здесь квадратные скобки означают скачок соответствующих величин при переходе через контур. Кроме того, функция $\psi(\mathbf{x}, t)$ должна удовлетворять условиям регулярности на бесконечности $|\nabla\psi| = O(r^{-2})$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r \rightarrow \infty$ и передней кромке $|\nabla\psi| = O(r_1^{-\delta})$ ($0 < \delta < 1$), где r_1 — расстояние до передней кромки.

2. Воспользуемся методом отражения и продолжим функцию $\psi(\mathbf{x}, t)$ в нижнюю полуплоскость нечетным образом. Будем искать функцию тока в виде логарифмического динамического потенциала [2-4]. Переходя в систему координат (x', y') , связанную с крылом

$$x = x' + Vt, \quad y = y',$$

для функции тока $\Psi'(\mathbf{x}', t) = \psi(\mathbf{x} + Vt\mathbf{e}_1, t)$ получим представление (далее штрихи будем опускать)

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}, t) = & \int_{l_t} \nu(\xi, t) \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}(\xi)| d\xi + \int_0^t d\sigma \int_{l'_\sigma} \nu(\xi, \sigma) \frac{1}{t - \sigma} \times \\ & \times \left[1 - \cos \left(\omega_0(t - \sigma) \frac{y - h}{|\mathbf{x} + V(t - \sigma)\mathbf{e}_1 - \mathbf{y}(\xi)|} \right) \right] d\xi - \int_{l'_t} \nu(\xi, t) \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}(\xi)| d\xi - \\ & - \int_0^t d\sigma \int_{l'_\sigma} \nu(\xi, \sigma) \frac{1}{t - \sigma} \left[1 - \cos \left(\omega_0(t - \sigma) \frac{y + h}{|\mathbf{x} + V(t - \sigma)\mathbf{e}_1 - \mathbf{y}(\xi)|} \right) \right] d\xi. \quad (2.1) \end{aligned}$$

Здесь $l_t = l_0 + l_{1t}$ — контур исходного крыла $l_0 = (-c, c)$ и следа $l_{1t} = (-c - Vt, -c)$ в момент времени t ; l'_t — отраженный контур; $\nu(\xi, t)$ — плотность потенциала; \mathbf{e}_1 — орт оси x . Из условий Кутта — Жуковского и (1.3) в [2] получены соотношения, связывающие плотность потенциала в следе и плотность на крыле

$$\nu(\xi, t) = \gamma \left(t + \frac{\xi + c}{V} \right) J_0 \left(\omega_0 \frac{\xi + c}{V} \right) + h(\xi, t), \quad \xi \in l_{1t}. \quad (2.2)$$

Здесь функция $\gamma(t)$ имеет смысл скачка скорости на задней кромке, как и в однородной жидкости:

$$\gamma(t) = [v_1(-c, t)] = -\frac{1}{V} \frac{d\Gamma_0}{dt}; \quad (2.3)$$

$\Gamma_0(t)$ — циркуляция скорости вокруг крыла:

$$\Gamma_0(t) = \int_{-c}^c \nu(\eta, t) d\eta + \omega_0 \int_{-c}^c d\eta \int_{\eta}^c \nu \left(\xi, t + \frac{\eta - \xi}{V} \right) \theta \left(t + \frac{\eta - \xi}{V} \right) G \left(\omega_0 \frac{\xi - \eta}{V} \right) d\xi; \quad (2.4)$$

$h(\xi, t)$ — дополнительный член, обусловленный стратификацией:

$$h(\xi, t) = -\frac{\omega_0}{V} \int_{-c}^c \nu\left(\eta, t + \frac{\xi - \eta}{V}\right) \left[J_1\left(\omega_0 \frac{\eta - \xi}{V}\right) + \omega_0 \int_0^{(\eta+c)/V} J_1\left(\omega_0 \frac{\eta - \xi}{V} - \tau\right) G(\omega_0 \tau) d\tau \right] d\eta, \quad (2.5)$$

$$G(x) = \int_0^x \frac{J_1(y)}{y} dy$$

(J_0, J_1 — функции Бесселя, θ — функция Хевисайда). Из (2.1) и условия непротекания на крыле имеем

$$f(x, t) = \int_{l_0}^t \nu(\xi, t) \left[\frac{1}{\xi - x} - \frac{\xi - x}{(x - \xi)^2 + 4h^2} \right] d\xi + 2h\omega_0 \int_0^t d\sigma \int_{l_0}^{\sigma} \nu(\xi, \sigma) \times$$

$$\times \sin\left(\omega_0(t - \sigma) \frac{2h}{\sqrt{(x - \xi + V(t - \sigma))^2 + 4h^2}}\right) \frac{(x - \xi + V(t - \sigma)) d\xi}{[(x - \xi + V(t - \sigma))^2 + 4h^2]^{3/2}}. \quad (2.6)$$

Таким образом, для неизвестной плотности потенциала $\nu(\xi, t)$ получаем сингулярное интегральное уравнение (2.6), соотношения (2.3)–(2.5) в следе и начальные условия $\nu(\xi, 0) = \nu_t(\xi, 0) = 0$, $\xi \in l_0$.

3. Рассмотрим вопрос об асимптотике решения при $t \rightarrow \infty$ в случае гармонических колебаний крыла с частотой ω , $f(x, t) = f(x)e^{i\omega t}$. Применим преобразование Лапласа по времени:

$$\nu^L(\xi, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \nu(\xi, t) dt.$$

Тогда из (2.6) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \nu^L(\eta, p) \left[\frac{1}{\eta - x} - \frac{\eta - x}{(\eta - x)^2 + 4h^2} \right] d\eta + \omega_0 2h \int_{-\infty}^c \nu^L(\xi, p) d\xi \int_0^{\infty} e^{-p\sigma} \times$$

$$\times \sin\left(\omega_0 \sigma \frac{2h}{\sqrt{(x + V\sigma - \xi)^2 + 4h^2}}\right) \frac{(x + V\sigma - \xi)}{[(x + V\sigma - \xi)^2 + 4h^2]^{3/2}} d\sigma = f^L(\eta, p). \quad (3.1)$$

В [2] показано, что для гармонических колебаний крыла в безграничной слабо стратифицированной жидкости ($s_0 \ll 1$) при $t \rightarrow \infty$ наблюдается установившееся колебательное движение жидкости в системе координат, связанной с крылом. Аналогичный факт имеет место и при наличии экрана. Далее приводится краткая схема доказательства. Перейдем от сингулярного уравнения (3.1) и соотношений (2.2)–(2.5) к интегральному уравнению Фредгольма.

Ядро уравнения имеет сложный вид и здесь не приводится. В случае безграничной жидкости соответствующее ядро представлено в [2]. При наличии экрана к нему добавляются члены, отвечающие отраженному крылу. Ядро зависит от двух безразмерных параметров: комплексного $z = pc/V$, который является спектральным, и вещественного $s_0 = \omega_0 c/V$, который имеет смысл числа, обратного числу Фруда для внутренних волн. Ядро аналитично по z во всей комплексной плоскости, за исключением отрезка мнимой оси $[-is_0, is_0]$.

Пусть h произвольно, но фиксировано. Из общей теории [5] следует, что уравнение Фредгольма однозначно разрешимо всюду в комплексной плоскости z , за исключением,

возможно, счетного числа полюсов резольвенты. Покажем, что резольвента не имеет полюсов в правой полуплоскости. Рассмотрим решение этого уравнения и сделаем обратное преобразование Лапласа. Так как при $t < 0$ возмущенного течения нет, то резольвента не имеет полюсов в правой полуплоскости. Покажем, что она не имеет полюсов и на мнимой оси. При $z = O(s_0)$ главная часть ядра отвечает стационарному движению крыла в однородной жидкости вблизи экрана [1]. После обращения главной части ядра получается уравнение Фредгольма с оператором $I + T_1(z, s_0)$, где $\|T_1\| = O(s_0)$. Следовательно, T_1 — сжимающий оператор, решение единственно. При $z \gg s_0$ главная часть ядра соответствует нестационарному движению крыла в однородной жидкости вблизи экрана. Обращая главную часть ядра, опять получим сжимающий оператор.

Таким образом, при малых s_0 и $\text{Re } z \geq 0$ задача имеет единственное решение, полюсы резольвенты могут быть лишь в левой полуплоскости. С ростом s_0 полюсы (если они были в левой полуплоскости) могут, вообще говоря, приблизиться к мнимой оси. Новые полюсы могут появиться только на границе области аналитичности ядра, т. е. на отрезке $[-is_0, is_0]$. Так как правая часть имеет полюс при $p = i\omega$, то и решение имеет полюс в этой точке. Далее, записывая интеграл Бромвича, по теореме вычетов получим гармоническое решение при $t \rightarrow \infty$. Утверждение доказано.

Введем безразмерные координаты ξ, η , отнесенные к полухорде крыла s :

$$\xi = x/c, \quad \eta = y/c.$$

Определим функции $\alpha_*(\xi) = \nu^L(c\xi, i\omega)$, $f_*(\xi) = f^L(c\xi, i\omega)$, а также безразмерные параметры $h' = h/c$ и $s = \omega c/V$ — число Струхала (штрихи далее будем опускать). Тогда получим сингулярное интегральное уравнение:

$$\int_{-\infty}^1 \alpha_*(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - \xi} - \frac{\zeta - \xi}{(\zeta - \xi)^2 + 4h^2} \right] d\zeta + 2hs_0 \int_{-\infty}^1 \alpha_*(\zeta) d\zeta \times \\ \times \int_0^{\infty} e^{-is\tau} \sin \left(s_0\tau \frac{2h}{\sqrt{(\xi - \zeta + \tau)^2 + 4h^2}} \right) \frac{(\xi - \zeta + \tau)}{[(\xi - \zeta + \tau)^2 + 4h^2]^{3/2}} d\tau = f_*(\xi). \quad (3.2)$$

При этом плотность в следе

$$\alpha_*(\xi) = -is_0 J_0(s_0(\xi + 1)) e^{is(\xi+1)} \int_{-1}^1 \alpha_*(\zeta) \left[1 + s_0 \int_0^{1+\zeta} e^{-is\sigma} G(s_0\sigma) d\sigma \right] d\zeta - \\ - s_0^2 \int_{-1}^1 \alpha_*(\zeta) e^{-is(\zeta-\xi)} \left[J_1(s_0(\zeta - \xi)) + s_0 \int_0^{1+\zeta} J_1(s_0(\zeta - \xi - \sigma)) G(s_0\sigma) d\sigma \right] d\zeta. \quad (3.3)$$

4. Уравнение (3.2) вместе с соотношением (3.3) решалось численно методом дискретных вихрей [6] по схеме Белоцерковского: вихрь на $1/4$ отрезка и контрольная точка на $3/4$ отрезка от передней кромки.

После определения плотности потенциала $\alpha_*(\xi)$ амплитуды нестационарных сил и момента находятся по формулам [2]

$$Y_* = -2\pi\rho_0 V c \left[(1 + is) \int_{-1}^1 \alpha_*(\xi) d\xi + is \int_{-1}^1 \xi \alpha_*(\xi) d\xi + s_0 \int_{-1}^1 \alpha_*(\xi) d\xi \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\xi+1} e^{-is\zeta} G(s_0\zeta) d\zeta + iss_0 \int_{-1}^1 \alpha_*(\xi) d\xi \int_0^{1+\xi} (1 + \xi - \zeta) e^{-is\zeta} G(s_0\zeta) d\zeta \right],$$

$$M_* = -2\pi\rho_0 V c^2 \left[\int_{-1}^1 \xi \alpha_*(\xi) d\xi - \frac{is}{2} \int_{-1}^1 \alpha_*(\xi)(1-\xi^2) d\xi + s_0 \int_{-1}^1 \alpha_*(\xi) d\xi \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\xi+1} (\xi-\zeta) e^{-is\zeta} G(s_0\zeta) d\zeta + iss_0 \int_{-1}^1 \xi d\xi \int_{\xi}^1 d\zeta \int_{\zeta}^1 \alpha_*(\eta) e^{is(\zeta-\eta)} G(s_0(\eta-\zeta)) d\eta \right].$$

Интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-is\tau} \sin \left(s_0\tau \frac{2h}{\sqrt{(\xi+\tau-\zeta)+4h^2}} \right) \frac{(\xi+\tau-\zeta)}{[(\xi+\tau-\zeta)^2+4h^2]^{3/2}} d\tau \quad (4.1)$$

при $s \neq 0$ разбивался на два участка: $[0, \tau_n]$ и $[\tau_n, \infty]$. На участке $[0, \tau_n]$ он вычислялся по схеме прямоугольников с точкой в середине отрезка, а на участке $[\tau_n, \infty]$ — с помощью интегрирования по частям. При $s = 0$ делалась замена $\sigma = 2h\tau/\sqrt{(\xi+\tau-\zeta)^2+4h^2}$. При этом область интегрирования становится конечной $0 < \sigma < \sigma_{\max}$:

$$\sigma_{\max} = \begin{cases} 2h & \text{при } (\xi - \zeta) \geq 0, \\ \sqrt{4h^2 + (\xi - \zeta)^2} & \text{при } (\xi - \zeta) < 0. \end{cases}$$

Интеграл (4.1) определяет взаимодействие колебаний крыла с отраженными внутренними волнами. Численные расчеты показали, что при $s < s_0$ он ведет себя немонотонно по h . Соответственно этому ведут себя и нестационарные силы и моменты, действующие на крыло.

Расчеты проводились для двух случаев: изгибных и крутильных колебаний крыла. При этом смещение крыла задавалось в виде

$$w_1(x, t) = y_0 e^{i\omega t}, \quad w_2(x, t) = \alpha_0 x e^{i\omega t},$$

где y_0 и α_0 — безразмерные амплитуды колебаний крыла. Введем безразмерные коэффициенты силы и момента C_y и C_m , которые связаны с Y_{i*} и M_{i*} соотношениями

$$Y_{i*} = 2\pi\rho_0 V^2 c a_i C_y, \quad M_{i*} = 2\pi\rho_0 V^2 c^2 a_i C_m, \quad i = 1, 2.$$

Здесь индекс i указывает тип колебаний крыла; а a_i — нормировочные коэффициенты: $a_1 = isy_0$, $a_2 = \alpha_0$.

На рис. 2 показаны модули и фазы безразмерных нестационарных сил C_y и моментов C_m при изгибных колебаниях крыла для $s = 0,2$ и $s_0 = 0,5$. Здесь и на последующих рисунках сплошные линии отвечают C_y и α_y , а штриховые C_m и α_m . Соответствующие кривые для крутильных колебаний крыла отличаются незначительно и поэтому не приводятся.

На рис. 3 показаны модули силы и момента при $s_0 = 1$ (a отвечает стационарному движению крыла под малым углом атаки α_0 , т. е. $s = 0$; b , v соответствуют $s = 0,5$ и $0,8$ при изгибных и крутильных колебаниях крыла (кривые 1 и 2)). Из полученных результатов следует, что осцилляции амплитуд гидродинамических нагрузок по h зависят от соотношения s и s_0 . Когда s приближается к s_0 , кривые становятся все более пологими, а при $s > s_0$ они ведут себя монотонно, так как нет внутренних волн, решение быстро выходит на асимптоту.

Зависимость модулей силы и момента от числа Струхала показана на рис. 4 для различных значений h . При $s = s_0$ происходит смена режимов течения; если при $s < s_0$ существуют внутренние волны, то при $s > s_0$ внутренних волн нет. Кривые имеют излом при $s = s_0$. Из рис. 4 видно, что при $s > s_0$ решение ведет себя практически одинаково для различных значений h , так как быстро выходит на асимптоту. А при $s < s_0$

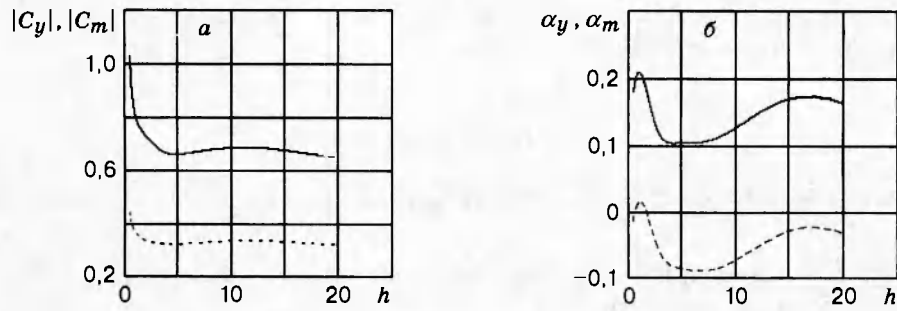


Рис. 2. Зависимость модуля (α) и фазы (β) нестационарной силы и момента от расстояния до экрана h при $s = 0,2$ и $s_0 = 0,5$

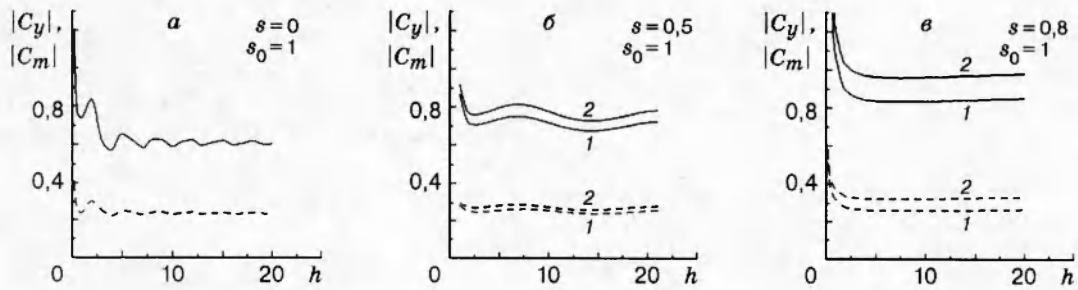


Рис. 3. Зависимость модуля силы и момента от расстояния до экрана h при $s_0 = 1$ и различных значениях s

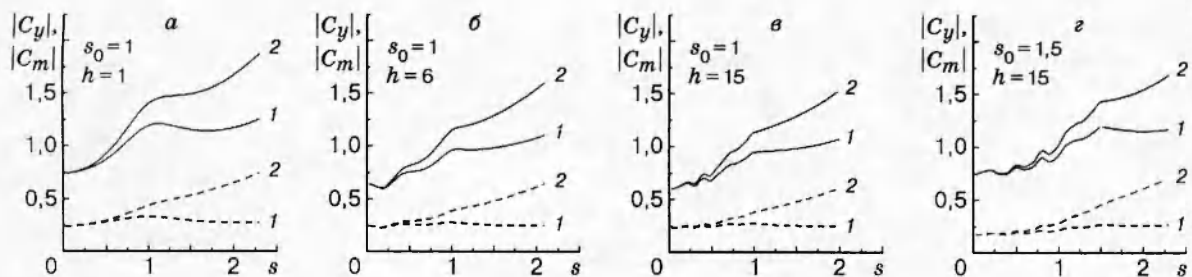


Рис. 4. Зависимость модуля силы и момента от числа Струхала s при различных расстояниях крыла от экрана и различных числах Фруда

с увеличением h решение становится осциллирующим все быстрее. Наблюдается аналогия с акустикой: чем больше ширина канала, тем меньше длина волны, тем больше число бугров и впадин. Возможно, как и в акустике, наличие собственных значений однородной задачи в левой полуплоскости при $s < s_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Басин М. А., Шадрин В. П.** Гидроаэродинамика крыла вблизи границы раздела сред. Л.: Судостроение, 1980.
2. **Ткачева Л. А.** Нестационарное движение тонкого крыла в стратифицированной жидкости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 6. С. 37–49.
3. **Ткачева Л. А.** Гидродинамические характеристики крыла в стратифицированной жидкости // Вычисл. технологии. 1995. Т. 4, № 11. С. 234–244.
4. **Габов С. А., Свешников А. Г.** Линейные задачи нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
5. **Санчес-Паленсия Э.** Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
6. **Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.** Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985.

*Поступила в редакцию 7/II 1996 г.,
в окончательном варианте — 5/V 1996 г.*
