

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И ЗАКРИТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МИКРОБАЛКИ С ТРЕЩИНОЙ НА ОСНОВЕ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

М. Акбарзаде Хоршиди, М. Шариати

Университет им. Фирдоуси, Мешхед, Иран

E-mails: majid.akbarzadeh.kh@gmail.com, Mshariati44@um.ac.ir

С использованием модифицированной моментной теории упругости исследуются устойчивость и закритическое деформирование микробалки Эйлера — Бернулли при наличии в ней краевой трещины нормального отрыва. Трещина моделируется невесомой спиральной упругой пружиной. Используемая модель содержит характерный линейный размер, позволяющий учесть масштабный эффект. При формулировке задачи о закритическом деформировании используются нелинейные соотношения Кармана. Получены аналитические решения задач об устойчивости и закритическом деформировании микробалки со свободно опертыми торцами при наличии в ней трещины. Исследовано влияние положения трещины, ее жесткости и характерного линейного размера модели материала балки на ее устойчивость и закритическое деформирование.

Ключевые слова: потеря устойчивости, закритическое деформирование, микробалка с трещиной, моментная теория упругости, характерный линейный размер.

DOI: 10.15372/PMTF20170417

Введение. Исследование устойчивости и закритического деформирования конструкций имеет большое практическое значение. Как правило, в большинстве работ определяются критические нагрузки и соответствующие формы прогибов. Тем не менее имеется много работ, в которых изучается закритическое поведение конструкций, в частности балок. Большое значение имеет исследование устойчивости и закритического поведения конструкций с трещинами. Свободные колебания и устойчивость балок из функционально-градиентного материала (ФГМ) с краевой трещиной изучались в работе [1], в которой получены аналитические решения задачи о свободных колебаниях и задачи об определении критической нагрузки и формы свободных колебаний. В работе [2] выполнен анализ закритического поведения балки Тимошенко из ФГМ при наличии в ней краевой трещины. Представляет интерес исследование поведения микро- и наноконструкций при наличии в них трещин, поскольку в этом случае трещины можно интерпретировать как начальные неправильности. Существуют неклассические теории сплошной среды, позволяющие описать масштабные эффекты в микро- и наноконструкциях. В [3] с использованием неклассической теории упругости изучены изгибные колебания нанобалки Эйлера — Бернулли с трещиной, вычислены собственные частоты колебаний балки при различном положении трещины в балке и различной ее длине. Свободные поперечные колебания нанобалки с трещиной с учетом поверхностных эффектов рассматривались в работе [4]. В [5] представлен

аналитический метод исследования свободных колебаний нанобалки Тимошенко с трещиной с использованием нелокальной модели теории упругости. В [6] исследованы свободные колебания тонких и толстых нанобалок Эйлера — Бернулли и нанобалок Тимошенко при наличии в них трещин. Из полученных результатов следует, что от положения трещины в балке существенно зависит ее поведение. С использованием нелокальной теории упругости в [7] изучены продольные колебания нанобалок как с двумя зашеченными концами, так и с одним зашеченным концом и свободно опертым другим. В [8] для исследования крутильных колебаний углеродных нанотрубок при наличии в них окружной трещины предложена нелокальная модель цилиндра с трещинами.

Модифицированная моментная теория упругости [9] обладает двумя основными преимуществами: 1) наличием симметричного тензора моментных напряжений; 2) наличием только одного характерного линейного размера модели материала, позволяющего учесть масштабный эффект при анализе поведения микро- и наноконструкций. В [10] с использованием модифицированной моментной теории упругости и с учетом масштабного эффекта выполнен анализ устойчивости микробалок при различных краевых условиях. В [11] модифицированная моментная теория упругости применялась для анализа деформирования сигмоидных нанотрубок из ФГМ с учетом поперечных сдвигов при различных краевых условиях. В [12] проведен нелинейный анализ закритического поведения нанобалок из ФГМ с учетом поперечного сдвига.

Насколько известно авторам данной работы, исследование устойчивости и закритического поведения макро- и нанобалок при наличии в них трещин ранее не проводилось. В настоящей работе получены аналитическое решение задачи об устойчивости, позволяющее вычислить критические нагрузки, и решение нелинейной задачи о закритическом деформировании. Уравнения задачи получены с помощью модифицированной моментной теории упругости, учитывающей влияние коэффициента Пуассона. При постановке задачи используется модель балки Эйлера — Бернулли, трещина моделируется невесомой спиральной упругой пружиной. Рассматривается балка со свободно опертыми торцами. Исследуется влияние положения трещины, ее жесткости и характерного линейного размера модели материала на устойчивость балки.

1. Постановка задачи. Ниже с использованием модифицированной моментной теории упругости выводятся уравнения задач об устойчивости микробалки и ее закритическом деформировании. Рассматривается балка длиной L , шириной b и толщиной h с прямоугольным поперечным сечением. Предполагается, что краевая трещина расположена на расстоянии e от левого конца балки.

1.1. *Модифицированная моментная теория упругости.* Согласно модифицированной теории упругости [9–12] выражение для потенциальной энергии U имеет вид [10]

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dv - \frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3,$$

где σ , ε , m , χ — тензор напряжений, тензор деформаций, девиатор симметричного тензора моментных напряжений и симметричный тензор кривизны соответственно; w — поперечный прогиб; P — сжимающая нагрузка.

1.2. *Потеря устойчивости балки с трещиной.* В соответствии с теорией изгиба балки Эйлера — Бернулли выражения для продольных и поперечных смещений записываются в виде

$$U(x, z) = u(x) - z \frac{\partial w(x)}{\partial x}, \quad W(x, z) = w(x),$$

где $u(x)$, $w(x)$ — смещения точек срединной поверхности.

Согласно модифицированной моментной теории упругости и принципу минимума потенциальной энергии уравнение изгиба неповрежденной (без трещины) балки Эйлера — Бернулли имеет вид [10]

$$\left(\frac{bh^3}{12}(2\mu + \lambda) + bh\mu\xi^2\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

где λ, μ — константы Ламе; параметр ξ — характерный линейный размер, равный корню квадратному из отношения модуля кривизны к модулю сдвига и являющийся мерой моментных напряжений [13]. Этот параметр можно определить либо из экспериментальных данных о кручении тонкостенных цилиндров различного диаметра [14], либо из экспериментальных данных об изгибе тонкостенных балок различной толщины [15, 16].

Таким образом, уравнения изгиба микробалки при наличии в ней одной трещины записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\frac{bh^3}{12}(2\mu + \lambda) + bh\mu\xi^2\right)\frac{\partial^4 w_1}{\partial x_1^4} + P\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} &= 0, & 0 \leq x_1 \leq e, \\ \left(\frac{bh^3}{12}(2\mu + \lambda) + bh\mu\xi^2\right)\frac{\partial^4 w_2}{\partial x_2^4} + P\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} &= 0, & e \leq x_2 \leq L. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь индексы 1, 2 соответствуют левой и правой частям балки, на которые она делится трещиной. Краевые условия для свободно опертой балки имеют вид

$$w_1(0) = 0, \quad w_2(L) = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}\right|_{x_1=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2}\right|_{x_2=L} = 0. \quad (2)$$

1.3. *Закритическое поведение микробалки с трещиной.* При выводе уравнений, описывающих закритическое поведение микробалки, используются нелинейные соотношения Кармана, связывающие деформации и смещения:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2. \quad (3)$$

Уравнения, описывающие закритическое поведение каждой части микробалки, выводятся с использованием соотношения (3) и принципа минимума потенциальной энергии:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial w_i}{\partial x_i}\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} = 0, \quad i = 1, 2; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{bh^3}{12}(2\mu + \lambda) + bh\mu\xi^2\right)\frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4} + \\ &+ (2\mu + \lambda)bh\left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}\frac{\partial w_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}\right] + P\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Интегрируя уравнения (4), получаем

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = c_{1i} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i}\right)^2, \quad u_i = c_{1i}x_i + c_{2i} - \frac{1}{2}\int_{\eta_{1i}}^{\eta_{2i}}\left(\frac{\partial w_i}{\partial \eta_i}\right)^2 d\eta, \quad (6)$$

где c_{1i}, c_{2i} — константы интегрирования; $\eta_{11} = 0; \eta_{21} = \eta_{12} = e; \eta_{22} = L$.

Для того чтобы растяжение срединной поверхности было значительным, концы балки должны быть закреплены [17]. Краевые условия для осевого смещения принимаются в следующем виде:

$$u_1(0) = u_2(L) = 0.$$

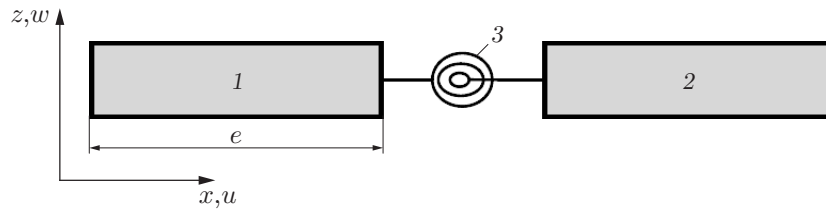


Рис. 1. Схема балки с трещиной:

1 — часть 1 балки, 2 — часть 2 балки, 3 — спиральная пружина

Предполагается, что в сечении, в котором расположена трещина, величина Δu мала по сравнению с величиной $\Delta \theta$. Поэтому ставятся следующие условия сопряжения:

$$u_1(e) = u_2(e), \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=e} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right|_{x_2=e}.$$

Константы интегрирования в уравнении (6) определяются из краевых условий

$$\begin{aligned} c_{21} = 0, \quad c_{22} = -c_{12}L, \quad c_{11} = c_{12} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2} \right)^2 \Big|_{x_2=e} - \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} \right)^2 \Big|_{x_1=e} \right], \\ c_{12} = \frac{1}{2L} \left\{ \left[\left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2} \right)^2 \Big|_{x_2=e} - \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} \right)^2 \Big|_{x_1=e} \right] e + \left[\int_0^e \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} \right)^2 d\eta - \int_e^L \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2} \right)^2 d\eta \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

С использованием (4)–(7) получаем уравнения, описывающие закритическое поведение балки:

$$\left(\frac{bh^3}{12} (2\mu + \lambda) + bh\mu\xi^2 \right) \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4} + ((2\mu + \lambda)bh c_{1i} + P) \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Для уравнений (8) используются краевые условия (2).

1.4. *Модель спиральной пружины.* В данной работе трещина, делящая балку на две части, моделируется невесомой спиральной упругой пружиной. Пусть трещина находится на расстоянии e от левого конца микробалки (рис. 1). Предполагается, что трещина расположена перпендикулярно поверхности балки и является трещиной нормального отрыва (трещиной типа I). В сечении, в котором находится такая трещина, возникает разрыв угла поворота. В соответствии с [1–6] для балки Эйлера — Бернулли условие сопряжения в сечении $x = e$ записывается в виде

$$\Delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = KL \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (9)$$

где K — жесткость трещины, зависящая от ее типа. Как отмечено выше, в сечении $x = e$ осевое и поперечное смещения, осевая сила и изгибающий момент непрерывны. При анализе устойчивости приложенная сжимающая нагрузка учитывается при определении перерезывающей силы [1]. Таким образом, остальные условия сопряжения записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} w_1(e) = w_2(e), \quad \left. \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} \right|_{x_1=e} = \left. \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} \right|_{x_2=e}, \\ \left. \frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^3} \right|_{x_2=e} - \left. \frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3} \right|_{x_1=e} = \alpha^2 \left(\left. \frac{\partial w_2}{\partial x_2} \right|_{x_2=e} - \left. \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=e} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

2. Решение задачи. Ниже аналитически решаются уравнения устойчивости и закритического поведения микробалки с соответствующими краевыми условиями и условиями сопряжения.

2.1. *Критические нагрузки.* Общие решения уравнений (1) имеют вид

$$w_i(x_i) = A_i \sin(\alpha x_i) + B_i \cos(\alpha x_i) + C_i x_i + D_i, \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

где $\alpha = \sqrt{P/[(bh^3(2\mu + \lambda)/12) + bh\mu\xi^2]}$; A_i, B_i, C_i, D_i — константы, определяемые из краевых условий (2) и условий сопряжения (10):

$$\begin{aligned} A_1 = A_2(1 - \operatorname{ctg}(\alpha e) \operatorname{tg}(\alpha e)), \quad B_1 = 0, \quad C_1 = A_2 \alpha \frac{e - L}{L} \frac{\operatorname{tg}(\alpha L)}{\sin(\alpha e)}, \quad D_1 = 0, \\ B_2 = -A_2 \operatorname{tg}(\alpha L), \quad C_2 = C_1 \frac{e}{e - L}, \quad D_2 = -C_2 L. \end{aligned} \quad (12)$$

В результате уравнение (9) приводится к виду

$$KL\alpha \sin(\alpha e)[\sin(\alpha e) - \operatorname{tg}(\alpha L) \cos(\alpha e)] - \operatorname{tg}(\alpha L) = 0. \quad (13)$$

Из (13) получаем выражение для критической нагрузки

$$P_{cr} = [(bh^3(2\mu + \lambda)/12) + bh\mu\xi^2]\alpha^2.$$

В случае неповрежденной балки ($K = 0$) из (13) находим $\operatorname{tg}(\alpha L) = 0$, следовательно,

$$\alpha = n\pi/L, \quad P_{cr0} = [(bh^3(2\mu + \lambda)/12) + bh\mu\xi^2](n\pi/L)^2.$$

Эта критическая нагрузка P_{cr0} совпадает с полученной в [10] критической нагрузкой для свободно опертой балки Эйлера — Бернулли. Кроме того, критическое значение нагрузки для несжимаемой балки совпадает со значением, полученным в работе [18]:

$$P_{cr0} = [(Ebh^3/12) + bh\mu\xi^2](n\pi/L)^2.$$

2.2. *Закритическое поведение балки.* После достижения сжимающей нагрузкой критического значения происходит закритическое деформирование балки. Подставляя критическое значение нагрузки (значение $\alpha = n\pi/L$) и значения констант A_i, B_i, C_i, D_i в уравнение (11), получаем следующие выражения для прогиба:

$$w_1(x_1) = A_2 \left((1 - \operatorname{ctg}(\alpha e) \operatorname{tg}(\alpha e)) \sin(\alpha x_1) + \alpha \frac{e - L}{L} \frac{\operatorname{tg}(\alpha L)}{\sin(\alpha e)} x_1 \right), \quad 0 \leq x_1 \leq e,$$

$$w_2(x_2) = A_2 \left(\sin(\alpha x_2) - \operatorname{tg}(\alpha L) \cos(\alpha x_2) + \alpha \frac{e}{L} \frac{\operatorname{tg}(\alpha L)}{\sin(\alpha e)} x_2 - \alpha e \frac{\operatorname{tg}(\alpha L)}{\sin(\alpha e)} \right), \quad e \leq x_2 \leq L.$$

Так как константы A_i, B_i, C_i, D_i зависят от A_2 (см. уравнение (12)), то и прогиб зависит от A_2 . Следовательно, необходимо определить этот коэффициент. Для этого выражение для прогиба микробалки нужно подставить в уравнение (8). В результате получаем зависимость сжимающей нагрузки от константы A_2 , из которой для каждого значения сжимающей нагрузки можно найти A_2 (табл. 1). Таким образом, для каждого значения критической нагрузки можно получить зависимость прогиба от сжимающей нагрузки при закритическом деформировании.

3. Результаты исследования и их обсуждение. Ниже приведены результаты вычислений для микробалки со следующими параметрами: $E = 1,44$ ГПа, $h = 17,6$ мкм, $b = 2h$, $L = 20h$, $\nu = 0,38$. Расчеты выполнены при различных значениях отношения ξ/h . Известно, что масштабный эффект существен в том случае, если толщина балки мала по сравнению с характерным линейным размером модели материала.

Таблица 1

Максимальный прогиб балки с трещиной при $\xi/h = 1$, $K = 1$, $e/L = 0,5$ и различных значениях сжимающей нагрузки

P	A_2 , мкм	w_{\max} , мкм
0,003 42	12,1	64,4
0,003 44	17,2	91,2
0,003 46	21,0	111,7
0,003 48	24,3	128,9
0,003 50	27,2	144,2

Таблица 2

Критическая нагрузка $P_{cr}L^2/(EI)$ для неповрежденной микробалки

ξ/h	$P_{cr}L^2/(EI)$			
	Работа [18]	Работа [10]	Данная работа	
			Без учета сжимаемости	С учетом сжимаемости
1,000	52,780	52,773	52,780	61,387
0,333	14,637	14,635	14,637	23,243
0,200	11,586	11,584	11,586	20,192
0,142	10,745	10,743	10,745	19,351

Таблица 3

Критическая нагрузка P_{cr} для микробалки с трещиной при $e/L = 0,5$ и различных значениях жесткости K и отношения ξ/h

ξ/h	P_{cr} , Н				
	$K = 0$	$K = 0,25$	$K = 0,5$	$K = 1$	$K = 2$
0	0,0034	0,0022	0,0015	0,0009	0,0007
0,5	0,0054	0,0035	0,0025	0,0016	0,0013
1,0	0,0114	0,0074	0,0053	0,0034	0,0019
1,5	0,0213	0,0138	0,0100	0,0064	0,0037
2,0	0,0353	0,0229	0,0166	0,0105	0,0061

3.1. *Верификация модели.* В табл. 2 приведены значения безразмерной критической нагрузки $P_{cr}L^2/(EI)$ для свободно опертой неповрежденной микробалки Эйлера — Бернулли ($L/h = 20$, $\nu = 0,38$, $I = bh^3/12$ — момент инерции поперечного сечения балки). Результаты, полученные в данной работе, совпадают с результатами работы [18].

3.2. *Критические нагрузки для микробалки с трещиной.* В табл. 3 приведены значения критической нагрузки для микробалки с трещиной при различных значениях жесткости трещины K и отношения характерного линейного размера модели материала ξ к толщине балки h .

На рис. 2 приведена зависимость критической нагрузки от параметра K при различных значениях отношения ξ/h . Видно, что с увеличением отношения ξ/h критическая нагрузка увеличивается. Значение $\xi = 0$ соответствует значению ξ , полученному при использовании классической теории упругости.

На рис. 3 приведены зависимости критической нагрузки P_{cr}/P_{cr0} (P_{cr0} — значение критической нагрузки неповрежденной балки) от координаты точки, в которой расположена трещина. В силу симметрии задачи эти зависимости симметричны относительно точки $e/L = 0,5$. Степень влияния положения трещины на критическую нагрузку зависит

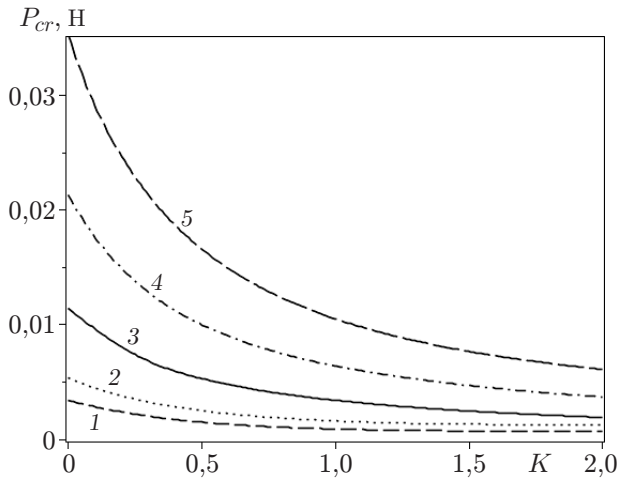


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость критической нагрузки от параметра K ($e/L = 0,5$):

1 — $\xi/h = 0$, 2 — $\xi/h = 0,5$, 3 — $\xi/h = 1$, 4 — $\xi/h = 1,5$, 5 — $\xi/h = 2$

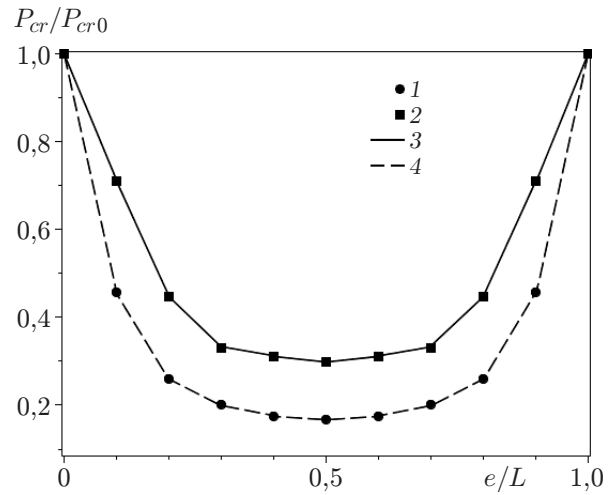


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость критической нагрузки от координаты точки, в которой расположена трещина:

1 — $K = 2$, $\xi = 0$; 2 — $K = 1$, $\xi = 0$; 3 — $K = 1$, $\xi/h = 1$; 4 — $K = 2$, $\xi/h = 1$

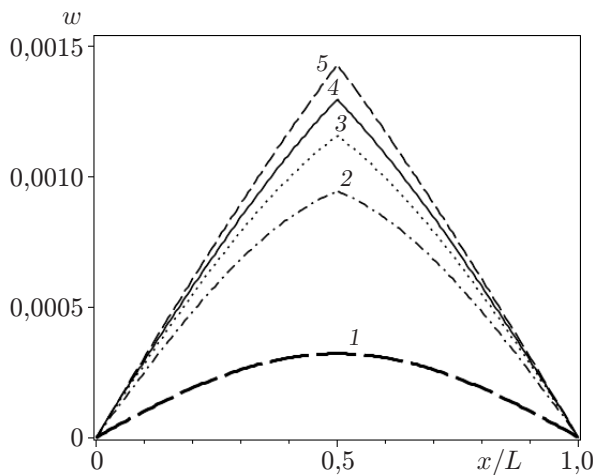


Рис. 4

Рис. 4. Распределение прогиба микробалки по ее длине при различных значениях жесткости трещины K ($P = 0,012$ Н, $\xi/h = 1$, $e/L = 0,5$):

1 — $K = 0$, 2 — $K = 0,25$, 3 — $K = 0,5$, 4 — $K = 1$, 5 — $K = 2$

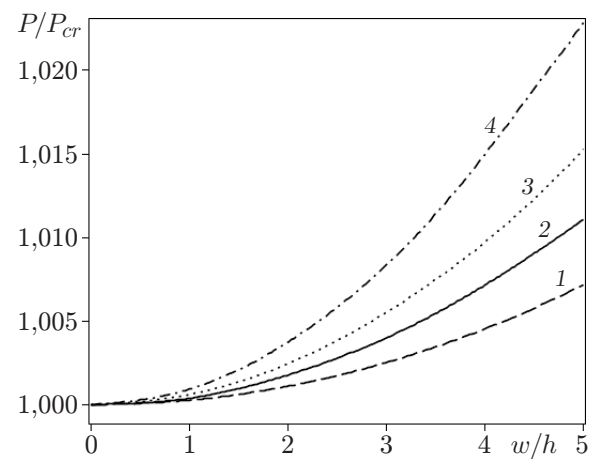


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость сжимающей нагрузки от прогиба микробалки при закритическом деформировании ($e/L = 0,5$):

1 — $K = 0,5$, $\xi/h = 1$; 2 — $K = 1$, $\xi/h = 1$; 3 — $K = 0,5$, $\xi/h = 0,5$; 4 — $K = 1$, $\xi/h = 0,5$

от краевых условий. Минимальное критическое значение нагрузки достигается в том случае, когда трещина находится в середине балки, при этом раскрытие трещины $\Delta (\partial w / \partial x)$ максимальное. Чем ближе к концу балки находится трещина, тем меньшее влияние она оказывает на критическую нагрузку. Из приведенных на рис. 3 зависимостей следует, что отношение P_{cr} / P_{cr0} не зависит от характерного линейного размера модели материала ξ и существенно зависит от жесткости трещины K и ее расположения в балке.

3.3. Закритическое деформирование балки. В табл. 1 приведены значения максимального прогиба микробалки с трещиной при различных значениях внешней сжимающей нагрузки. На рис. 4 представлено распределение прогибов по длине балки при различных значениях жесткости трещины. Видно, что с увеличением жесткости трещины K жесткость балки уменьшается и, следовательно, увеличивается ее прогиб. Кривизна балки разрывна в сечении, в котором расположена трещина. Значение $K = 0$ соответствует балке без трещины, в этом случае кривизна балки непрерывна. На рис. 5 приведена зависимость сжимающей нагрузки от прогиба балки при закритическом деформировании свободно опертой микробалки.

Заключение. С использованием моментной теории упругости в работе получены аналитические решения, позволяющие определить критические нагрузки и описать закритическое деформирование микробалки Эйлера — Бернулли с трещиной. Трещина моделируется невесомой спиральной упругой пружиной. Исследовано влияние на критическую нагрузку характерного линейного размера модели материала балки, жесткости трещины и ее положения в балке. Характерный линейный размер ξ оказывает существенное влияние на величину критической нагрузки и процесс закритического деформирования. Чем ближе к середине балки расположена трещина, тем сильнее ее влияние на критическую нагрузку. Результаты данной работы могут быть использованы при проектировании микро- и наноструктур.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Yang J., Chen Y.** Free vibration and buckling analyses of functionally graded beams with edge cracks // Composite Structures. 2008. V. 83. P. 48–60.
2. **Ke L. L., Yang J., Kitipornchai S.** Postbuckling analysis of edge cracked functionally graded Timoshenko beams under end shortening // Composite Structures. 2009. V. 90. P. 152–160.
3. **Loya J., Lopez-Puente J., Zaera R., Fernandez-Saez J.** Free transverse vibrations of cracked nanobeams using a nonlocal elasticity model // J. Appl. Phys. 2009. V. 105. 044309.
4. **Hasheminejad S. M., Gheshlaghi B., Mirzaei Y., Abbasian S.** Free transverse vibrations of cracked nanobeams with surface effects // Thin Solid Films. 2011. V. 519. P. 2477–2482.
5. **Torabi K., Dastgerdi J. N.** An analytical method for free vibration analysis of Timoshenko beam theory applied to cracked nanobeams using a nonlocal elasticity model // Thin Solid Films. 2012. V. 520. P. 6595–6602.
6. **Hosseini-Hashemi Sh., Fakher M., Nazemnezhad R., Sotudeh-Haghighi M. H.** Dynamic behavior of thin and thick cracked nanobeams incorporating surface effects // Composites. Pt B. 2014. V. 61. P. 66–72.
7. **Hsu J. Ch., Lee H. L., Chang W. J.** Longitudinal vibration of cracked nanobeams using nonlocal elasticity theory // Current Appl. Phys. 2011. V. 11. P. 1384–1388.
8. **Loya J. A., Aranda-Ruiz J., Fernandez-Saez J.** Torsion of cracked nanorods using a nonlocal elasticity model // J. Phys. D: Appl. Phys. 2014. V. 47. 115304.
9. **Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P.** Couple stress based strain gradient theory for elasticity // Intern. J. Solids Structures. 2002. V. 39. P. 2731–2743.

10. **Mohammad-Abadi M., Daneshmehr A. R.** Size dependent buckling analysis of microbeams based on modified couple stress theory with high order theories and general boundary conditions // Intern. J. Engng Sci. 2014. V. 74. P. 1–14. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2013.08.010.
11. **Akbarzadeh Khorshidi M., Shariati M.** Free vibration analysis of sigmoid functionally graded nanobeams based on a modified couple stress theory with general shear deformation theory // J. Brazil. Soc. Mech. Sci. Engng. 2016. V. 38, iss. 8. P. 2607–2619. DOI: 10.1007/s40430-015-0388-3.
12. **Akbarzadeh Khorshidi M., Shariati M., Emam S. A.** Postbuckling of functionally graded nanobeams based on modified couple stress theory under general beam theory // Intern. J. Mech. Sci. 2016. V. 110. P. 160–169. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2016.03.006.
13. **Mindlin R. D.** Influence of couple-stresses on stress concentrations // Exp. Mech. 1963. V. 3. P. 1–7.
14. **Chong A. C. M., Yang F., Lam D. C. C., Tong P.** Torsion and bending of micron-scaled structures // J. Mater. Res. 2001. V. 16. P. 1052–1058.
15. **Lam D. C. C., Yang F., Chong A. C. M., et al.** Experiments and theory in strain gradient elasticity // J. Mech. Phys. Solids. 2003. V. 51. P. 1477–1508.
16. **Park S. K., Gao X. L.** Bernoulli — Euler beam model based on a modified couple stress theory // J. Micromech. Microengng. 2006. V. 16. P. 2355–2359.
17. **Emam S. A.** Analysis of shear-deformable composite beams in postbuckling // Composite Structures. 2011. V. 94. P. 24–30. DOI: 10.1016/j.compstruct.2011.07.024.
18. **Akgoz B., Civalek O.** Strain gradient elasticity and modified couple stress models for buckling analysis of axially loaded micro-scaled beams // Intern. J. Engng Sci. 2011. V. 49. P. 1268–1280.

*Поступила в редакцию 15/III 2016 г.,
в окончательном варианте — 18/VIII 2016 г.*
