

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ВОЛН ПРИ ОКИСЛЕНИИ МАГНИЕВОЙ НИТИ

Ю. А. Гостеев, А. В. Федоров

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

На основе представления о существовании теплового торможения химической реакции, ответственной за воспламенение, предложена математическая модель воспламенения образцов магния, которая дает реалистичные значения температур после воспламенения образца и удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными по зависимости радиуса мелкой частицы от предельной температуры окружающей среды. Показана возможность распространения тепловых волн при гетерогенном окислении нити Mg, помещенной во внешний поток. Область параметров, где реализуются автоволновые режимы, качественно и по порядку величин соотносится с опытными данными по окислению металлических проволочек. Численно решена задача об иницировании волны воспламенения начальными распределениями температуры образца, показана устойчивость тепловых волн к малым и конечным возмущениям.

1. ТОЧЕЧНАЯ МОДЕЛЬ ВОСПЛАМЕНЕНИЯ. ОБОСНОВАНИЕ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Модель Семенова описания теплового взрыва широко применяется для изучения процесса воспламенения мелких металлических образцов. Однако, при срыве теплового равновесия стационарное состояние имеет нереально высокое значение температуры тела. Вызвано это тем обстоятельством, что в уравнении сохранения энергии для частицы или нити часто не учитываются разного рода лимитирующие факторы, такие, например, как испарение металла. Учет испарения [1, 2] приводит к изменению многообразия воспламенения, уменьшению конечной равновесной температуры, достигаемой после воспламенения. Следует отметить, что анализ многообразия воспламенения в модели, учитывающей теплопотери на испарение, является достаточно громоздкой и сложной задачей. Поэтому представляется целесообразным построение более простой модели, основанной на следующем простом качественном соображении.

Известно, что окисление магниевого образца можно условно разделить на две стадии: воспламенение и горение. Тогда естественно предположить, что первая стадия окисления заканчивается при какой-то характерной температуре частицы T_m , которая может быть близка, например, к температуре кипения магния. Это позволяет описать тепловое состояние бесконечной однородной цилиндрической нити уравнением для ее температуры и законом ро-

ста оксидной пленки:

$$c_s \rho_s \pi r_s^2 \frac{dT}{dt} = 2\pi r_s q \rho_s \frac{dh}{dt} - 2\pi r_s \frac{\lambda Nu}{2r_s} (T - \bar{T}),$$

$$\frac{dh}{dt} = k_0 (T_m - T) \exp\left(-\frac{E}{RT}\right), \quad (1)$$

где T — температура нити, h — толщина оксидной пленки; c_s , ρ_s , r_s — соответственно теплоемкость, плотность металла и радиус нити; q — тепловой эффект гетерогенной реакции окисления; λ , \bar{T} — теплопроводность и температура окружающей среды; Nu — число Нуссельта, при поперечном обдуве нити $Nu = C Pr^m Re^n$ (см. [3], где приведены значения констант C , m , n); Pr и Re — числа Прандтля и Рейнольдса; $k_0 = z c_{ок}$; z , E и q — предэкспоненциальный множитель, энергия активации и тепловой эффект гетерогенной реакции окисления; $c_{ок}$ — массовая концентрация окислителя; R — универсальная газовая постоянная. Закон роста оксидной пленки Mg отличается от обычного аррениусовского дополнительной зависимостью от температуры в виде множителя $T_m - T$, что можно трактовать как наличие теплового торможения некоторых стадий реакции окисления.

Запишем основное уравнение для T и начальное условие в безразмерном виде, отнеся значения T , T_m и \bar{T} к некоторой характерной температуре T_M :

$$\frac{dT}{dt} = g(T), \quad T|_{t=0} = T_0, \quad (2)$$

где

$$g(T) = B \left[(T_m - T) \exp \left(-\frac{E}{T} \right) - \alpha(T - \bar{T}) \right],$$

$$B = \frac{2t_M B_g}{c_s \rho_s r_s}, \quad B_g = q \rho_s k_0, \quad \alpha = \frac{\lambda \text{Nu}}{2r_s B_g},$$

значение E отнесено к RT_M , а время t — к некоторому характерному времени t_M .

2. БИФУРКАЦИОННАЯ ДИАГРАММА И ТИПЫ ТЕПЛОВОЙ ДИНАМИКИ НИТИ

Исследуем качественно типы возможных решений задачи Коши (2). Для этого определим состояния равновесия T и построим бифуркационную диаграмму $T = T(\alpha)$. Выписывая условия Семенова для определения дважды вырожденных критических точек $g(T) = g'(T) = 0$, найдем критические величины

$$T_{\pm} = \frac{E(T_m + \bar{T})}{2(T_m + E - \bar{T})} \times \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4T_m \bar{T}(T_m + E - \bar{T})}{E(T_m + \bar{T})^2}} \right), \quad (3)$$

$$\alpha_{\pm} = \frac{T_m - T_{\pm}}{T_{\pm} - \bar{T}} \exp \left(-\frac{E}{T_{\pm}} \right)$$

и ветви стационарных температур нити $T_I(\alpha)$, $T_{II}(\alpha)$, $T_{III}(\alpha)$. Качественный вид бифуркационной диаграммы приведен на рис. 1. Как видно, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} T_{III}(\alpha) = T_m$. Там же показано поведение кривой $g'(T) = 0$, что позволяет классифицировать состояния равновесия (2): $T = T_I(\alpha)$

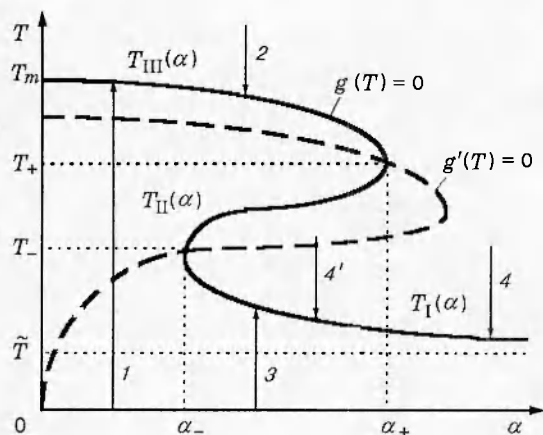


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма:

1 — воспламенение, 2, 4, 4' — «высокотемпературное» и «низкотемпературное» погасания, 3 — регулярный нагрев

Таблица 1

Время задержки воспламенения t_{ign} в зависимости от радиуса частицы Mg

r_s , мкм	t_{ign} , мс	
	Данные [3]	Настоящая работа
15	22	21
22	39,6	37
30	64	62
60	200	198

($\alpha > \alpha_-$) и $T = T_{III}(\alpha)$ ($0 < \alpha < \alpha_+$) — устойчивые, $T = T_{II}(\alpha)$ ($\alpha_- < \alpha < \alpha_+$) — неустойчивое. Исходя из этого на рис. 1 схематически показаны возможные типы динамики температуры нити: регулярный нагрев, воспламенение, «высокотемпературное» и «низкотемпературное» погасания (сюда же может быть отнесено «дисперсионное» погасание при $T \rightarrow T_{II}(\alpha) - 0$ [4]). В целом все рассуждения аналогичны ранее изученному случаю [2, 4], и поэтому подробности опускаем.

Далее была осуществлена «привязка» функции тепловыделения $g(T)$ к экспериментальным данным, относящимся к зависимости предельной температуры окружающей среды (воздуха) от радиуса сферической частицы Mg [5]. Были взяты данные по мелким частицам (радиусом не более 60 мкм) и на основе соотношений (3) найдены кинетические константы $k_0 = 3,058 \cdot 10^{-3} \text{ м/(с} \cdot \text{К)}$, $E/300R = 48,549$. Температуру T_m подбирали, исходя из физических соображений, из окрестности температуры кипения магния (1410 К). Заметим, что нагрев сферической частицы описывается тем же самым уравнением (2), но с множителем $3/2$ при $g(T)$. Это позволило распространить вышеприведенный качественный анализ на модель сферической частицы Mg и провести для контроля расчеты режима воспламенения такой частицы. Результаты приведены в табл. 1. Интересно отметить, что различия значений t_{ign} по обеим моделям не превышают 10%. Отсюда можно сделать вывод об устойчивости системы по параметру t_{ign} относительно набора кинетических законов.

3. АВТОВОЛНА В РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МОДЕЛИ

3.1. Постановка задачи и замечания о существовании ее решения. Рассмотрим магниевую нить радиуса r_s , помещенную в поперечный поток окружающего газа с температурой \bar{T} . Тем-

пература на концах нити ($x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$, x_{\min} и x_{\max} могут быть удалены на $\mp\infty$ или быть конечными величинами) имеет постоянные значения — T_n и T_k соответственно. Уравнение, описывающее распределение температуры в нити, имеет вид

$$c_s \rho_s \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_s \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (4a)$$

$$x_{\min} < x < x_{\max}, \quad 0 < r < r_s, \quad t > 0,$$

с начально-краевыми условиями

$$T|_{t=0} = T^0(x), \quad T|_{x=x_{\min}} = T_n, \quad T|_{x=x_{\max}} = T_k,$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \left(\lambda_s \frac{\partial T}{\partial r} - \varphi(T) \right) \Big|_{r=r_s} = 0, \quad (4b)$$

где

$$\lim_{x \rightarrow x_{\min, \max}} T^0(x) = T_{n, k},$$

$$\varphi(T) = q \rho_s k_0 (T_m - T) \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) - \frac{\lambda N u}{2r_s} (T - \bar{T}),$$

$\varphi(T_1) = \varphi(T_2) = \varphi(T_3) = 0$, $T_1 < T_2 < T_3$, т. е. T_i — корни функции $\varphi(T)$, пронумерованные в порядке их возрастания. Вводя такие же, как и выше, безразмерные величины, после осреднения (4а), (4б) по поперечному сечению нити получаем следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \delta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g(T),$$

$$x_{\min} < x < x_{\max}, \quad t > 0, \quad T|_{t=0} = T^0(x); \quad (5)$$

$$T|_{x=x_{\min}} = T_n, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_{\min}} = 0;$$

$$T|_{x=x_{\max}} = T_k, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_{\max}} = 0.$$

Здесь $\delta = \lambda_s t_M / c_s \rho_s r_s^2$, $x_M = r_s$ — характерный линейный масштаб.

Переходя к автомодельной переменной $\xi = x + wt$, где w — скорость автоволны, преобразуем (5) в краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения, которому удовлетворяет $T(\xi)$:

$$\delta \frac{d^2 T}{d\xi^2} - w \frac{dT}{d\xi} + g(T) = 0, \quad (6)$$

$$\xi \rightarrow \mp\infty: \quad T \rightarrow T_{n, k} = T_{1, 3} \quad \left(\frac{dT}{d\xi} \rightarrow 0 \right). \quad (7)$$

Задача состоит в нахождении константы w и функции $T(\xi)$, удовлетворяющих уравнению (6) в области $(-\infty, +\infty)$ и краевым условиям

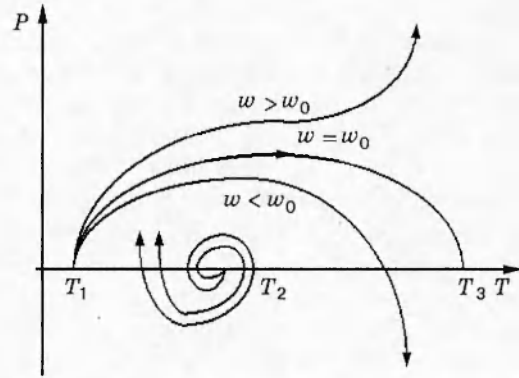


Рис. 2. Фазовый портрет задачи на собственное значение (6), (7)

(7). Как известно [6, 7], эта проблема относится к классу задач на собственные значения. Соответствующая теория для некоторых функций $g(T)$ в достаточной мере разработана. Для исследования ее корректности и последующего конструктивного решения необходимо прежде всего определить поведение функции $g(T)$, состояния равновесия (6) и их тип. После перехода на фазовую плоскость $(T, P = dT/d\xi)$ получаем каноническую систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dT}{d\xi} = P, \quad \frac{dP}{d\xi} = \delta^{-1}(wP - g(T)), \quad (8)$$

равновесные состояния которой суть $(T, P)_0 = (T_1, 0), (T_2, 0), (T_3, 0)$, где $T_1(\alpha, \bar{T}) \leq T_2(\alpha, \bar{T}) \leq T_3(\alpha, \bar{T})$ при $\alpha_- \leq \alpha \leq \alpha_+$. Собственные числа матрицы Якоби в этих точках $\lambda_{1,2} = (w/2\delta)(1 \pm \sqrt{1 - 4\delta g'(T_0)/w^2})$. Учитывая, что $g'(T_1) < 0$, $g'(T_2) > 0$, $g'(T_3) < 0$, можно дать известную классификацию типов особых точек для (8) в зависимости от параметра w , которую формулируем в виде утверждения.

Утверждение 1. Стационарные точки $(T_1, 0)$ и $(T_3, 0)$, принадлежащие соответственно нижней $T_1(\alpha)$ (см. рис. 1) и верхней $T_{III}(\alpha)$ ветвям многообразия воспламенения, являются седлами с $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Стационарная точка $(T_2, 0)$ — неустойчивый фокус (λ_1, λ_2 комплексно-сопряженные) при $w < w_{\min}$, неустойчивый узел ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$) при $w \geq w_{\min}$, где $w_{\min} = 2\sqrt{\delta g'(T_2)}$.

Фазовый портрет системы (8) при $w < w_{\min}$ изображен на рис. 2. Из литературы известно о существовании единственной гетероклинической траектории с $w = w_0$, осу-

шествующей переход из седлового состояния $(T_1, 0)$ в седловое состояние $(T_3, 0)$. Этот результат, который необходим в последующем, приведем в виде утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Решение краевой задачи на собственное значение (6), (7) существует в классе дважды непрерывно дифференцируемых на $(-\infty, +\infty)$ функций и единственно при некотором $w = w_0$.

3.2. О численном решении краевой задачи на собственное значение. Задача (6), (7) является задачей на собственное значение, осложненной необходимостью интегрирования на бесконечном интервале, наличием стационарных краевых и внутренних точек, жесткостью системы (6). Поэтому использован пакет программ для интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, реализующий метод Гира. Алгоритм решения краевой задачи (6), (7) основан на методе пристрелки, который позволил итерационно рассчитывать собственное значение — скорость автоволны $w = w_0$ и соответствующую гетероклиническую траекторию. Для этого решалась задача Коши для (8) с начальными данными $T|_{\xi=0} = T_1 + \varepsilon$, $P|_{\xi=0} = \lambda_{11}\varepsilon$, где ε — малая величина, $\lambda_{11} = (w/2\delta)(1 + \sqrt{1 - 4\delta g'(T_1)/w^2})$ — положительное собственное число, отвечающее левому седловому состоянию $(T_1, 0)$. Критерием входа в правое седловое состояние служили неравенства $0 < T_3 - T < \varepsilon_T$, $0 < P < \varepsilon_P$. Критерием останова в методе пристрелки по параметру w служили предыдущие соотношения вместе с малостью разницы между значениями w на двух последовательных итерациях. Для рассчитанных таким образом стационарных профилей автоволны находили ширину фронта волны по Прандтлю $i_\infty = (T_3 - T_1)/\max|dT/d\xi|$ и другие параметры. Этот же алгоритм с очевидными изменениями применялся и для построения волн погасания с $w_0 < 0$.

Остановимся на описании тестовых расчетов. По изложенной методике проведены численные расчеты для источниковой функции $g(T) = a_0(T - T_1)(T - T_2)(T - T_3)$, $a_0 < 0$. Выбирались значения $T_n = T_1$, $T_k = T_3$. Тогда краевые стационарные точки $(T_1, 0)$, $(T_3, 0)$ — седловые состояния, внутренняя точка $(T_2, 0)$ является неустойчивым узлом при $w \geq w_{\min}$ и неустойчивым фокусом при $w < w_{\min}$. При $\delta = 1$, $T_1 = 0$, $T_3 = 1$, $w = w_0 = (1 - 2T_2)\sqrt{|a_0|/2}$ единственная гетероклиническая траектория соединяет краевые седла и является

ся точным решением задачи:

$$P = \sqrt{|a_0|/2}T(1 - T).$$

При $T_2 = 0,25$ $w_{\min} = 0,866$, $w_0 = 0,3535533$. С использованием предложенной методики решения численно определены искомая гетероклиническая траектория и $w = 0,3535534$. Как видно, отличие в значениях w составляет небольшую величину.

3.3. О численном решении задачи об автоволне в нестационарной постановке. В качестве метода решения начально-краевой задачи (5) выбран метод прямых. Использовалась аппроксимация второго порядка точности по пространственной переменной. Полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений интегрировали с помощью неявной схемы Рунге — Кутты 5-го порядка точности, программная реализация которой эффективно учитывала ленточный вид матрицы Якоби правых частей.

Тестовые расчеты проведены для модели Колмогорова — Петровского — Пискунова (КПП) с $g(T) = a_0T(T - 1)$, $a_0 < 0$ [6]. В этой модели автоволна может распространяться со скоростью $w \geq w_{\min} = 2\sqrt{\delta g'(0)}$, причем устойчивой является волна, движущаяся с $w = w_0 = w_{\min}$. Получение стационарного профиля в рамках автомоделного подхода не вызвало затруднений. Осуществлялся выход из конечного седлового состояния $(T = 1, P = 0)$ по асимптотике, после чего путем устойчивого численного интегрирования задачи Коши происходил вход в устойчивый узел $(T = P = 0)$, расположенный на $-\infty$.

Из общей теории уравнения КПП известно, что, выбирая начальные данные из некоторого класса функций, можно при $t \rightarrow \infty$ получить устойчиво распространяющуюся со скоростью $w = w_{\min}$ автоволну. Именно выход на такое решение и был проверочным тестом при решении нестационарной задачи методом прямых.

В качестве начального профиля температуры задавался кусочно-непрерывный:

$$T^0(x) = \begin{cases} T_n, & x_{\min} \leq x < x_f^0, \\ \frac{T_n + (T_k - T_n)(x - x_f^0)}{x_{f1}^0 - x_f^0}, & x_f^0 \leq x \leq x_{f1}^0, \\ T_k, & x_{f1}^0 < x \leq x_{\text{mir}}. \end{cases} \quad (9)$$

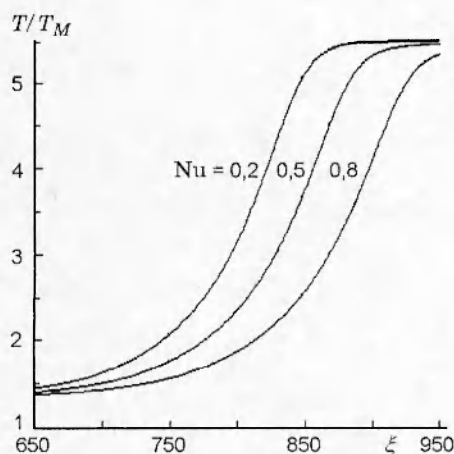


Рис. 3. Структура волны воспламенения при различных значениях чисел Нуссельта ($\bar{T} = 400$ K)

Интегрирование проводили до установления профиля волны. Сходимость численного решения проверяли измельчением сетки. Так, для случая $\delta = 1$, $w_{\min} = 2$ при последовательном уменьшении пространственного шага ($\Delta x = 0,1, 0,05, 0,025$) решения в момент времени $t = 150$ различались в норме $C(x_{\min}, x_{\max})$ не более чем на 1 %.

В расчетах приняты следующие физические параметры: $c_s = 1100$ Дж/(кг · К), $\rho_s = 1740$ кг · м⁻³, $\lambda_s = 100$ Вт/(м² · К), $\lambda = 2,57 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м² · К). Масштабами обезразмеривания служили радиус нити $r_s = 15 \cdot 10^{-6}$ м, время $t_M = 1 \cdot 10^{-3}$ с, температура $T_M = 300$ К, линейная скорость $w_M = x_M/t_M = 1,5 \cdot 10^{-2}$ м/с. Таким образом, $\delta = 2,32207 \cdot 10^2$, $B = 1,48295 \cdot 10^4$.

3.4. Обсуждение результатов в задаче о распространении автоволны. Остановимся кратко на физической интерпретации начально-краевой задачи (5), которая описывает асимптотическую стадию процесса воспламенения магниевой нити. В начальный момент времени нить прогрета на левом конце до температуры T_n , а на правом — до T_k . Поскольку этот разрыв температуры произволен, начинается его нестационарная перестройка, «размазывание» за счет теплопроводности и, возможно, перемещение фронта разогрева вдоль нити.

Отметим, что ранее исследование такого явления проведено в работах [8, 9] применительно к реакции окисления аммиака на платине и в [10] применительно к задачам биофизики на основе приближенных аналитических методов.

Таблица 2

Параметры волны воспламенения			
T	Nu	w_0	l_∞
400	0,2	3,523	92,70
	0,5	2,293	96,42
	0,8	0,942	100,88
600	0,2	3,690	86,92
	0,5	1,831	91,12
	0,8	0,115	97,28
800	0,2	5,624	77,21
	0,5	4,444	80,27
	0,8	2,493	86,30

Примечание. Характерная длина $l_M = r_s = 15 \cdot 10^{-6}$ м, характерная скорость $w_M = 0,015$ м/с.

В результате разогрева образца возможно установление стационарного самоподдерживающегося волнового процесса воспламенения, который распространяется по нити. На рис. 3 приведены профили температуры нити для различных значений числа Нуссельта при $\bar{T} = 400$ К. Структура волны такова. Температура далеко перед фронтом волны медленно возрастает от $T = T_n$, затем резко меняется во фронте и постепенно выходит на свое конечное значение. Ширина фронта l_∞ с ростом числа Нуссельта также увеличивается, в то время как скорость автоволны уменьшается. Так что более медленные волны имеют более широкий фронт. Это обстоятельство можно пояснить следующим образом: толщина волны $l \sim |\lambda|^{-1}$, где λ — соответствующее собственное число, $\lambda \sim w$ при достаточно больших w . Отсюда заключаем, что $l \sim |w|^{-1}$ при конечных w . Кроме того, видно, что увеличение теплообмена нити с окружающей средой приводит к уменьшению конечного равновесного значения температуры нити $T = T_k$.

Результаты расчетов при температуре окружающей среды $\bar{T} = 400, 600, 800$ К и различных числах Нуссельта при $\alpha_- < \alpha < \alpha_+$ приведены в табл. 2. Отметим, что найденные значения скорости для волны воспламенения по порядку величины коррелируют с соответствующими экспериментальными данными по окислению металлических проволочек [11]: $1 \div 7$ см/с.

Рассмотрение аналитической формулы

Таблица 3
Параметры волны погасания

T	Nu	w_0	l_∞
350	1,85	-7,242	143,60
	1,95	-9,137	158,46
	1,989	-10,966	176,23
700	2,0	-1,138	122,50
	2,5	-4,188	112,58
	2,7	-5,989	99,336
1000	4,5	-2,603	121,42
	4,6	-3,486	127,11
	4,8	-7,002	56,30

Примечание. Характерная длина $l_M = \tau_s = 15 \cdot 10^{-6}$ м, характерная скорость $w_M = 0,015$ м/с.

для скорости автоволны [8]

$$w_0 = \int_{T_H}^{T_K} g(T) dT / \int_{T_H}^{T_K} P(T) dT \quad (10)$$

позволяет утверждать, что значение w_0 может быть отрицательным. Это означает, что по нити распространяется волна погасания. Результаты расчетов для этого случая приведены в табл. 3. Оказалось, что с ростом значения Nu скорость волны погасания по модулю возрастает, так же как и ширина фронта волны.

Случай $w = 0$ проиллюстрирован численно в рамках модели (6), когда $w = 10^{-3}$. Он приближенно описывает стоячую тепловую волну.

Проведенные расчеты позволили построить диаграмму существования автоволновых режимов воспламенения/погасания в данной тепловой системе (рис. 4). Здесь открытая область, заключенная внутри контура $ABCD$, является областью существования автоволн; AB , BC — пределы автоволновых режимов, отвечающие $\alpha = \alpha_{\pm}(\bar{T})$ соответственно, причем точка B является трижды вырожденной критической точкой на многообразии воспламенения [2, 4], где исчезает сама возможность неединственности состояний теплового равновесия в системе; CD — предел по заданному минимальному коэффициенту теплоотдачи ($\alpha = \alpha_{\min} = 4,024 \cdot 10^{-8}$); DA — предел по заданной минимальной температуре внешнего потока ($\bar{T} = 350$ K). Как видно из диаграммы, при фиксированном коэффициенте теплоотдачи волна воспламенения ($w > 0$) реализуется при температуре окружающей сре-

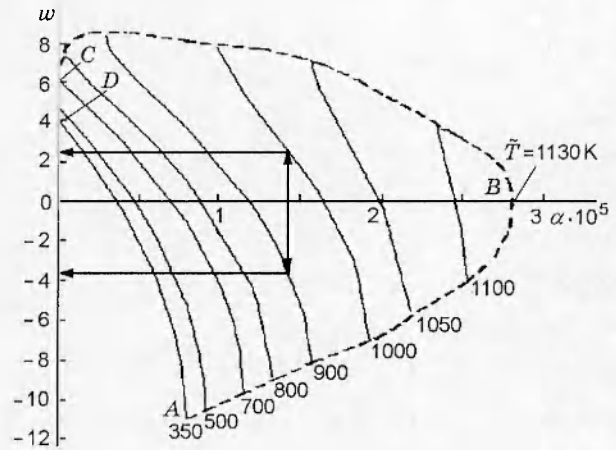


Рис. 4. Диаграмма автоволновых режимов

ды большей, чем у аналогичной волны погасания ($w < 0$). Также видно, что при постоянной внешней температуре полученные данные верно описывают рост скорости автоволны с уменьшением параметра теплоотдачи α (увеличением концентрации кислорода в потоке) [11].

Стоячая тепловая волна, у которой $w = 0$, существует, если

$$I(\alpha, \bar{T}) = \int_{T_1(\alpha, \bar{T})}^{T_3(\alpha, \bar{T})} g(T; \alpha, \bar{T}) dT = 0.$$

Отсюда, вообще говоря, можно найти зависимость температуры окружающей среды \bar{T} от коэффициента теплоотдачи α в виде $\bar{T} = \bar{T}(\alpha)$. Численные результаты представлены на рис. 5 и согласуются с изображенными на рис. 4. Видно, что зависимость $\bar{T}(\alpha)$ является однозначной, возрастающей функцией своего аргумента. Отметим, что качественный результат зависимости коэффициента теплоотдачи от температуры внешней среды ранее был получен в [8] для гетерогенно-каталитических систем со ступенчатой функцией тепловыделения, а в нулевом по $E^{-1} \ll 1$ приближении — в работе [9].

3.5. Исследование устойчивости автоволны к малым и конечным возмущениям. Полученные стационарные профили температуры нити исследовали на устойчивость к малым и конечным возмущениям. Для этого по изложенному выше численному методу решалась начально-краевая задача (5) со стационарными решениями (которые содержат инфинитезимальные возмущения в виде ошибок численного метода)

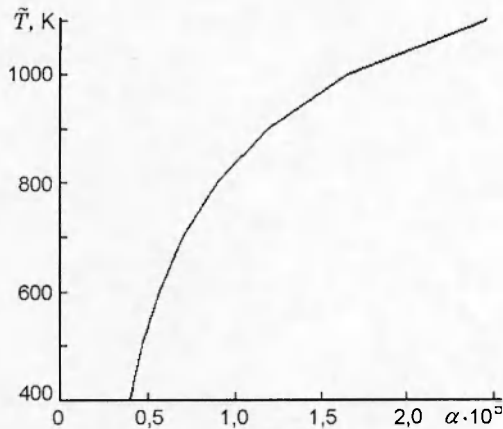


Рис. 5. Зависимость температуры окружающей среды от параметра теплоотдачи при реализации стоячей тепловой волны

в качестве начальных данных. Длина нити задавалась из условия, чтобы автоволна продвинулась за время интегрирования не менее чем на 10 своих толщин.

На рис. 6 приведена временная эволюция стационарного профиля при $\bar{T} = 400$ К и $Nu = 0,5$, которая, как видно, заключается в «переносе» его с постоянной скоростью $w = 2,294$. Зависимость положения фронта волны x_f (определяемого по максимуму температурного градиента) от времени представляет собой прямую линию.

Во всех вариантах расчетов скорость и толщину фронта волны определяли с точностью 1%.

Контроль точности интегрирования осуществляли следующим образом. Пусть найдено распределение температуры T^n в момент времени $t = t_n$. Предположим, что справедливо равенство

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^n = \bar{w}^n \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^n,$$

где w^n назовем «расчетной» скоростью волны при $t = t_n$. Для определения \bar{w}^n получаем выражение, аналогичное формуле (10); заменяя интегрирование суммированием по формуле трапеций, имеем

$$\bar{w}^n = \frac{\sum_j (g(T_j^n) + g(T_{j+1}^n))(T_j^n - T_{j+1}^n)}{\sum_j \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_j^n + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{j+1}^n \right\} (T_j^n - T_{j+1}^n)}$$

Наблюдение за значениями «расчетной» скорости w^n показало хорошее совпадение последней

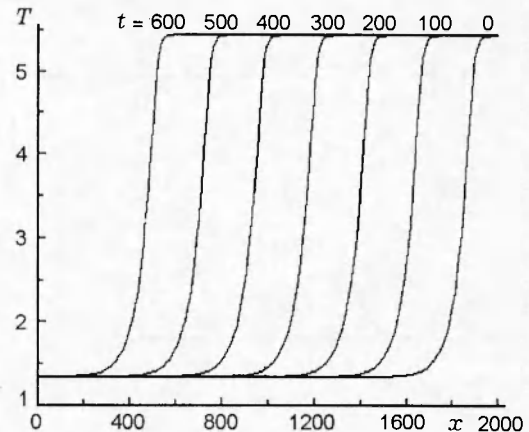


Рис. 6. Распространение волны воспламенения при $\bar{T} = 400$ К, $Nu = 0,5$

с w_0 во все моменты времени: $|w^n - w_0| < \epsilon_0 |w_0|$, где $\epsilon \approx 0,1 \div 0,5$ %.

Устойчивость к конечным возмущениям проверяли на примере, в котором в качестве начальных задавались данные стационарного решения $T_{st}(x)$ с наложенным на него периодическим шумом:

$$T|_{t=0} = T_{st}(x) + A \sin\left(\pi \frac{x - x_{f1}}{l_\infty} m\right),$$

где A — амплитуда возмущения, x_{f1} и l_∞ — левая граница и толщина фронта волны $T_{st}(x)$, $m - 1$ — количество пучностей периодического возмущения, приходящихся на фронт. Расчеты проведены для $\bar{T} = 400$ К, $Nu = 0,2$, $A = 0,01$, $0,1$, $0,3$, $m = 10$. Во всех вариантах профиль

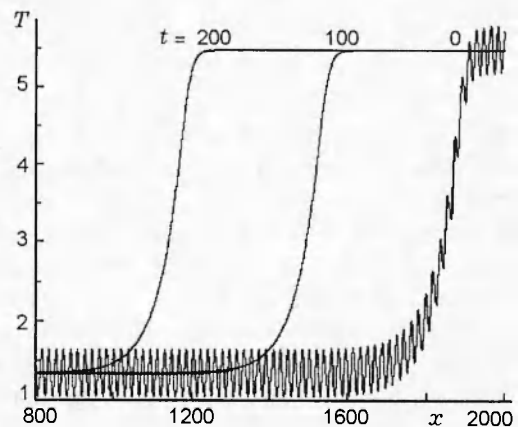


Рис. 7. Эволюция стационарного профиля автоволны с наложенным гармоническим шумом

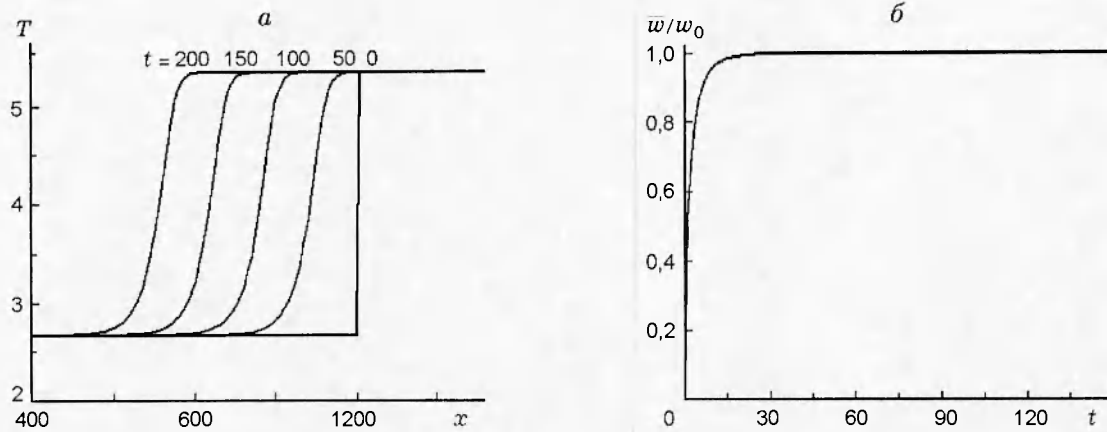


Рис. 8. Формирование волны воспламенения из начальных данных типа «ступенька» (10): $T_H = T_1$, $T_K = T_3$; а — поле температуры; б — сходимость «расчетной» скорости w к скорости стационарной волны $w_0 = 2,493$

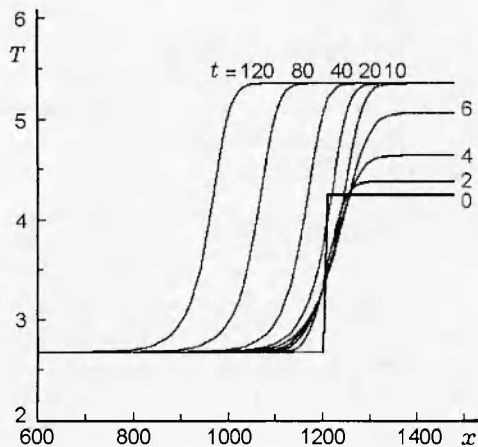


Рис. 9. Иницирование волны воспламенения ($T_2 < T_K < T_3$)

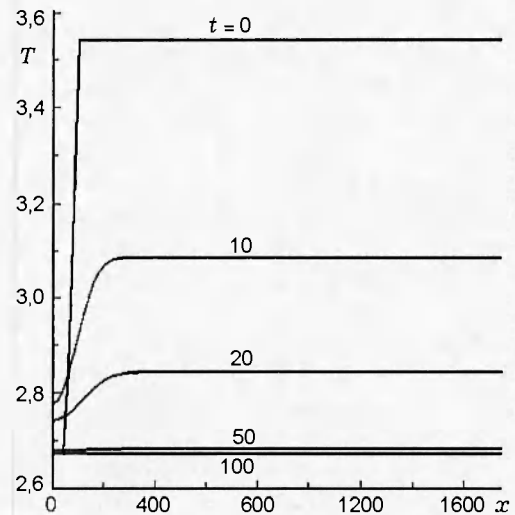


Рис. 10. Эволюция поля температуры нити в режиме погасания ($T_K < T_2$)

устанавливался после $t = 50$. На рис. 7 показана картина установления возмущенного профиля при $A = 0,3$.

3.6. Задача иницирования автоволны. Представляет интерес рассмотрение эволюции кусочно-постоянных начальных данных (9), моделирующих иницирование волны воспламенения. Рассмотрение проведем для нити конечной длины. Пусть L_K — протяженность участка нити с начальной температурой $T = T_K$. В результате проведенных расчетов показано, что справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $L_K > L_K^*$. Тогда

начальные данные (9) для задачи (5) асимптотически эволюционируют: при $T_H = T_1 < T_K < T_2$ — к устойчивому однородному состоянию $T = T_H = T_1$, при $T_2 < T_K$ — к устойчивому однородному состоянию $T = T_3$ в виде волны воспламенения/погасания в зависимости от знака выражения $I(\alpha, \bar{T})$. Если $L_K \leq L_K^*$, то начальные данные (9) асимптотически эволюционируют к устойчивому однородному состоянию $T = T_H = T_1$. Здесь L_K^* — некоторая величина, зависящая от параметров α и \bar{T} .

На рис. 8–10 приведены результаты чи-

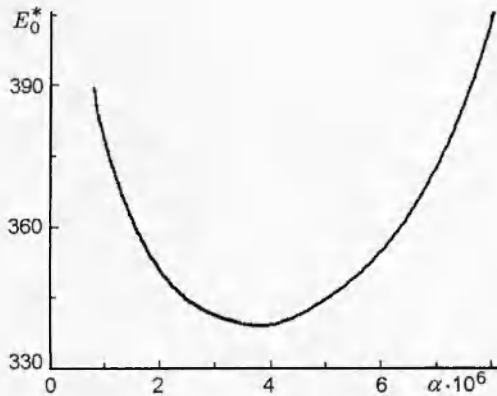


Рис. 11. Зависимость критической величины E_0^* от параметра теплоотдачи α

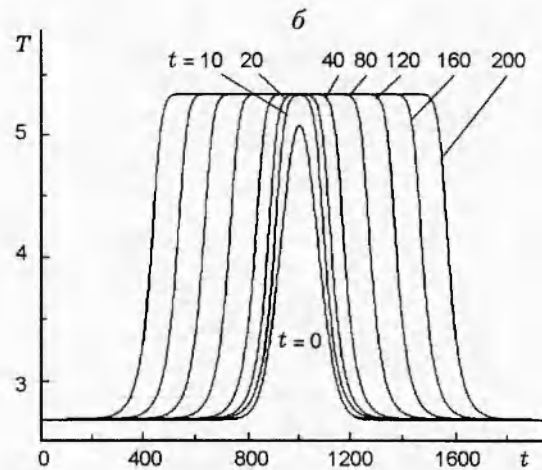
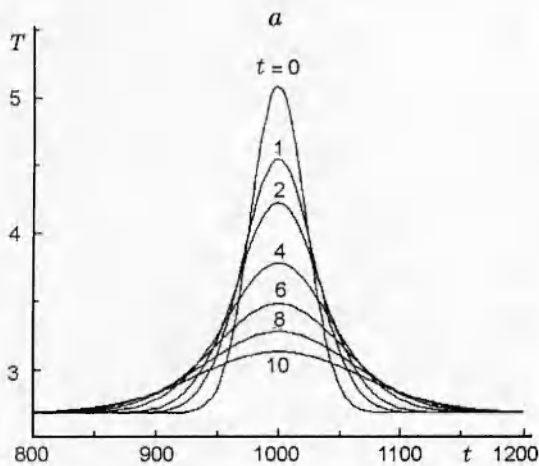


Рис. 12. Развитие начального импульса типа «шапочка»:

$T_2 < T_a < T_3$; а — $\sigma = 1 \cdot 10^3$, воспламенение отсутствует; б — $\sigma = 1 \cdot 10^4$, наблюдается воспламенение нити в виде двух идентичных волн, движущихся к концам нити

сленных экспериментов при $\bar{T} = 800$ К, $Nu = 1,6$ и различной конечной температуре. Во всех вариантах соблюдались граничные условия отсутствия потоков. Рис. 8 иллюстрирует развитие волны воспламенения при $T_k = T_3$. Как видно, стационарное решение сохраняется в течение продолжительного промежутка времени. На рис. 9 приведена эволюция начального распределения температуры (9) при $T_2 < T_k < T_3$; здесь после воспламенения большей части участка нити с температурой, превышающей T_2 , формируется волна воспламенения. Рис. 10 иллюстрирует развитие начального профиля с $T_k < T_2$ в режиме погасания.

Расчеты проводили также и с начальными данными типа «шапочка»,

$$T|_{t=0} = T_1 + T_a \exp\left(-\frac{(x-x_a)^2}{\sigma}\right),$$

где T_a — максимальное значение прироста температуры в импульсе. Положение центра этого распределения x_a задавали в середине нити. Установлено, что простое достаточное условие активирующего действия теплового импульса из работы [12]

$$\dot{E}|_{t=0} > 0, \quad \dot{E} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} g(T|_{t=0}) dx$$

становится для начального импульса типа «шапочка» необходимым в сочетании с условием

$$E_0 > E_0^*, \quad E_0 = \int_{x_l}^{x_r} (T|_{t=0} - T_2) dx,$$

где x_l, x_r — концы интервала, на котором $T|_{t=0} > T_2$. Зависимость критической величины E_0^* от коэффициента теплоотдачи α при

температуре внешнего потока $\bar{T} = 800$ К приведена на рис. 11. На этом рисунке предел слева — по минимальному значению параметра $\alpha = \alpha_{\min} = 8,048 \cdot 10^{-7}$, предел справа по α обусловлен сменой знака величины \bar{E} с плюса на минус. Тепловая картина для случая $E_0 < E_0^*$ представлена на рис. 12,а (погасание), а при $E_0 > E_0^*$ — на рис. 12,б (воспламенение).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена упрощенная математическая модель воспламенения образцов Mg, которая основана на представлении о существовании теплового торможения химической реакции, ответственной за воспламенение, и позволяет:

- реалистично описывать значение температуры воспламенения образца;
- удовлетворительно описать опытные данные по зависимости радиуса мелкой частицы Mg от предельной температуры окружающей среды.

Показана возможность распространения тепловых волн при гетерогенном окислении нити Mg, помещенной во внешний поток:

- выписаны условия существования решения типа бегущей волны и численно построено решение задачи на собственное значение, определяющее волну воспламенения/погасания;
- найдена область существования автоволновых режимов на плоскости параметров «коэффициент теплоотдачи — температура окружающей среды», качественно и по порядку величин соотносящаяся с опытными данными по окислению металлических проволочек;
- численными расчетами в одномерном нестационарном приближении решена задача об инициировании волны воспламенения начальными распределениями температуры частных видов, показана устойчивость автоволн к малым и конечным возмущениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хайкин Б. И., Bloshenko В. Н., Мержанов А. Г. О воспламенении частиц металлов // Физика горения и взрыва. 1970. Т. 6, № 4. С. 474–488.
2. Петухова Е. В., Федоров А. В. Воспламенение частиц магния вблизи торца ударной трубы // Физика горения и взрыва. 1991. Т. 27, № 6. С. 139–142.
3. Кутателадзе С. С. Теплопередача и гидродинамическое сопротивление. М.: Энергоатомиздат, 1990. С. 151.
4. Гостеев Ю. А., Федоров А. В. Воспламенение частицы магния (распределенная модель) // Физика горения и взрыва. 1996. Т. 32, № 4. С. 5–12.
5. Cassel H. V., Libman I. Combustion of magnesium particles. II. Ignition temperatures and thermal conductivities of ambient atmospheres // Combust. Flame. 1963. V. 7, № 1.
6. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме. М.: Наука, 1981. С. 213–242.
7. Канель Я. И. О стабилизации решения задач теории горения // Мат. сб. 1962. Т. 59, доп. 101. С. 245–272.
8. Мержанов А. Г., Барелко В. В., Курочка И. И., Шкадинский К. Г. О распространении фронта гетерогенно-каталитической реакции // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221, № 5. С. 1114–1117.
9. Любченко В. И., Марченко Г. И. Распространение тепловых волн в гетерогенно-каталитических системах // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291, № 1. С. 142–147.
10. Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987. С. 239.
11. Маркштейн Г. Х. Горение металлов // Ракетная техника и космонавтика. 1963. № 3. С. 3–19.
12. Сигов А. С., Чечеткин В. Р. Об асимптотической эволюции начального профиля в системах с двумя устойчивыми положениями теплового равновесия // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, № 2. С. 360–365.

Поступила в редакцию 22/1 1998 г.