УДК 533.72
DOI: 10.15372/PMTF202215230

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ ДАРСИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНО-СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

О. В. Гермидер, В. Н. Попов

Северный (Арктический) федеральный университет
им. М. В. Ломоносова, Архангельск, Россия
E-mails: o.germider@narfu.ru, v.popov@narfu.ru

Предложен метод вычисления коэффициента трения Дарси в плоском канале, образованном двумя бесконечными параллельными пластинами, в зависимости от значений числа Рейнольдса и параметра разреженности газа в канале. В качестве модели отражения молекул газа от стенок канала применяется модель диффузного отражения Максвелла. Изотермический поток газа обусловлен наличием малого по абсолютной величине градиента давления, направленного вдоль стенок канала. Предложенный метод основан на решении линеаризованного эллипсоидально-статистического кинетического уравнения Больцмана с однородными граничными условиями с использованием полиномиальной аппроксимации Чебышева. Неизвестная функция, интерполирующая решение указанного уравнения, представляется в виде частичной суммы ряда по полиномам Чебышева первого рода. С использованием свойств конечных сумм для ортонормированной системы полиномов Чебышева задача сведена к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений искомой функции в узлах интерполяции. Проведен анализ полученных результатов.

Ключевые слова: модельные кинетические уравнения, течение газа в микроканале, коэффициент трения Дарси

Введение. В последнее время активно развиваются микро- и наносистемы [1, 2]. В большинстве таких систем имеют место различные режимы течения жидкости и газа в каналах [1], сложность экспериментального изучения которых определяется размерами систем [2]. Эффективным способом исследования течений в микро- и наноканалах является математическое моделирование с использованием кинетического подхода [2–4]. Одним из параметров, характеризующих поток, является коэффициент трения Дарси [5–9]. Вычисление этого коэффициента для развитых течений в гидродинамическом режиме и режиме течения со скольжением основано на решении системы уравнений Навье — Стокса с граничными условиями прилипания и скольжения [9]. Однако в переходном режиме течения для потоков разреженного газа уравнения Навье — Стокса не применимы, поэтому необходимо использовать кинетический подход, основанный на решении уравнения Больцмана или модельных кинетических уравнений [10].

Данная работа посвящена исследованию изменения коэффициента трения Дарси в случае течения газа в плоском канале с бесконечными параллельными стенками с использованием линеаризованной эллипсоидально-статистической (ЭС) модели кинетического уравнения Больцмана [11]. Предполагается, что поток газа обусловлен наличием малого по абсолютной величине градиента давления, направленного вдоль стенок канала. В качестве граничного условия на стенках канала используется модель диффузного отражения Максвелла. Предлагается метод вычисления коэффициента трения Дарси с помощью системы ортогональных многочленов Чебышева первого рода при аппроксимации решения кинетического уравнения в зависимости от параметра разреженности газа в плоском канале. В гидродинамическом приближении проводится сравнительный анализ полученных значений коэффициента трения Дарси с результатами, основанными на решении системы уравнений Навье — Стокса с граничными условиями прилипания и скольжения.

Постановка задачи. Основные уравнения. Рассмотрим длинный плоский канал с бесконечными параллельными стенками, расположенными в плоскостях $y' = \pm b'/2$ прямоугольной декартовой системы координат (b' — расстояние между стенками канала). Ось z' направлена вдоль стенок канала. Будем полагать, что длина канала L' много больше его гидравлического диаметра $D'_h = 2b'$ [9]. Градиент давления считается малым, а температура стенок постоянной. Состояние газа будем описывать функцией распределения $f'(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v}')$, где $\boldsymbol{r}'$ — радиус-вектор, определяющий положение молекул газа в конфигурационном пространстве; $\boldsymbol{v}'$ — вектор молекулярной скорости. В качестве масштабов длины, скорости, концентрации, температуры и функции распределения выберем соответственно величины D'_h, $\beta'^{-1/2}$, n'_0, T'_0, $n'_0\beta'^{3/2}$, где $\beta' = m'/(2k'_{\rm B}T'_0)$; $k'_{\rm B}$ — постоянная Больцмана; m' — масса молекулы газа; n'_0, T'_0 — концентрация и температура газа в некоторой точке, принятой в качестве начала координат. Далее штрих у безразмерных величин опускается. В принятых обозначениях безразмерное расстояние между пластинами равно $b = 1/2$.

Следуя [9], коэффициент трения Дарси f_d выразим через отношение чисел Пуазейля P_0 и Рейнольдса Re:

$$f_d = \frac{\mathrm{P}_0}{\mathrm{Re}}. \tag{1}$$

Число Пуазейля P_0 определяется соотношением [8]

$$\mathrm{P}_0 = -\frac{2G_p p'_0 D'_h \beta'^{1/2}}{\mu' \bar{u}_z}. \tag{2}$$

Здесь $p'_0 = n'_0 k'_{\rm B} T'_0$ — давление газа; μ' — динамическая вязкость; $\bar{u}_z$ — средняя безразмерная массовая скорость газа u_z; G_p — безразмерный градиент давления:

$$G_p = D'_h p'^{-1}_0 \frac{dp'}{dz'}.$$

Учитывая, что $|G_p| \ll 1$, функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям запишем в линеаризованном виде

$$f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{C}) = f_0(C)(G_p(h(y, \boldsymbol{C}) + z) + 1), \tag{3}$$

где $h(y, \boldsymbol{C})$ — функция возмущения; $\boldsymbol{C}$ — безразмерный вектор скорости молекул газа; $f_0(C)$ — безразмерный абсолютный максвеллиан:

$$f_0(C) = \pi^{-3/2}\, \mathrm{e}^{-C^2}.$$

Безразмерная массовая скорость газа может быть выражена через интеграл от функции возмущения $h(y, \boldsymbol{C})$:

$$u_z = -G_p U_z, \qquad U_z(y) = \pi^{-3/2} \int \mathrm{e}^{-C^2} C_z h(y, \boldsymbol{C})\, d^3 \boldsymbol{C}. \tag{4}$$

Отсюда находим

$$\bar{u}_z = -G_p \bar{U}_z,$$

где компонента $\bar{U}_z$ определяется как предел средней безразмерной массовой скорости [10]:

$$\bar{U}_z = \frac{1}{b} \int\limits_{-b/2}^{b/2} U_z(y)\, dy. \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (2), с учетом выражения $\delta = D'_h p' \beta'^{1/2}/\mu'$ для параметра разреженности газа [10] находим

$$\mathrm{P}_0 = \frac{2\delta}{\bar{U}_z}.$$

Тогда из (1) получаем

$$f_d = \frac{2\delta}{\mathrm{Re}\, \bar{U}_z}. \qquad (6)$$

Для нахождения $\bar{U}_z$ введем функцию $Z = Z(y, C_y)$:

$$Z(y, C_y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-C_z^2}\, C_z h(y, \boldsymbol{C})\, dC_z. \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (4), получаем

$$U_z(y) = \pi^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-C_y^2}\, Z(y, C_y)\, dC_y. \qquad (8)$$

Функцию $Z(y, C_y)$ находим из решения линеаризованного эллипсоидально-статистического уравнения Больцмана [11], записанного в виде [12]

$$C_y \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{1}{2} + \mathrm{Pr}\ \delta Z(y, C_y) = \mathrm{Pr}\ \delta \Big(U_z + \Big(1 - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\Big) C_y \sigma(y)\Big), \qquad (9)$$

где $\mathrm{Pr} = 2/3$ — число Прандтля [13],

$$\sigma(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C_y\, \mathrm{e}^{-C_y^2}\, Z(y, C_y)\, dC_y. \qquad (10)$$

Заметим, что если в (9) подставить $\mathrm{Pr} = 1$, то получим модельное кинетическое уравнение Бхатнагара — Гросса — Крука (БГК) [14]. Из рассматриваемой модели взаимодействия молекул газа со стенками канала следует, что граничные условия для функции $Z = Z(y, C_y)$ однородные:

$$Z(\pm b/2, C_y) = 0, \qquad \pm C_y < 0. \qquad (11)$$

Вводя обозначения $W_1(y, C_y) = Z(y, C_y)$ для $C_y \in [0, +\infty)$ и $W_2(y, C_y) = Z(y, C_y)$ для $C_y \in (-\infty, 0]$, получаем уравнения относительно введенных функций

$$\frac{\partial W_i}{\partial y} C_y + \mathrm{Pr}\ \delta W_i(y, C_y) + \frac{1}{2} = \mathrm{Pr}\ \delta \Big(U_z(y) + \Big(1 - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\Big) C_y \sigma(y)\Big), \quad i = 1, 2 \qquad (12)$$

с граничными условиями

$$W_i((-1)^i b/2, C_y) = 0, \qquad (-1)^i C_y < 0. \tag{13}$$

В этом случае выражения (8), (10) для $U_z(y)$ и $\sigma(y)$ принимают вид

$$\begin{gathered} U_z(y) = \pi^{-1/2}\left(\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-C_y^2}\, W_1(y, C_y)\, dC_y + \int\limits_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-C_y^2}\, W_2(y, C_y)\, dC_y\right), \\ \sigma(y) = 2\pi^{-1/2}\left(\int\limits_0^\infty C_y\, \mathrm{e}^{-C_y^2}\, W_1(y, C_y)\, dC_y + \int\limits_{-\infty}^0 C_y\, \mathrm{e}^{-C_y^2}\, W_2(y, C_y)\, dC_y\right). \end{gathered} \tag{14}$$

Функции $W_1(y, C_y)$ и $W_2(y, C_y)$ раскладываем в ряды по многочленам Чебышева первого рода. Ограничиваясь в разложениях членами с номерами, не превышающими n_i $(i = 1, 2)$, имеем

$$W_j(y, C_y) = T^{(1)}(x_1) \otimes T^{(2)}(x_2^{(j)}) A^{(j)} = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{k=0}^{n_2} a_{ik}^{(j)} T_i(x_1) T_k(x_2), \tag{15}$$

где "$\otimes$" — прямое тензорное произведение матриц [15]; $T^{(1)}(x_1)$, $T^{(2)}(x_2^{(j)})$ — матрицы, имеющие соответственно размерности $1 \times n_1'$ и $1 \times n_2'$ ($n_1' = n_1 + 1$, $n_2' = n_2 + 1$) и состоящие из многочленов Чебышева первого рода:

$$\begin{gathered} T^{(1)}(x_1) = (T_0(x_1), T_1(x_1), \ldots, T_{n_1}(x_1)), \\ T^{(2)}(x_2^{(j)}) = (T_0(x_2^{(j)}), T_1(x_2^{(j)}), \ldots, T_{n_2}(x_2^{(j)})), \end{gathered}$$

неизвестные матрицы $A^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ размерности $n_1' n_2' \times 1$ содержат элементы, которые являются коэффициентами в разложениях функций $W_j(y, C_y)$:

$$A^{(j)} = (a_{00}^{(j)}, a_{01}^{(j)}, \ldots, a_{n_1\, n_2-1}^{(j)}, a_{n_1 n_2}^{(j)})^{\text{т}}.$$

Здесь верхний индекс "т" обозначает транспонирование матрицы. Если $B^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ — некоторые матрицы размерности $m_j \times n_j$, то произведение Кронекера $B^{(1)} \otimes B^{(2)}$ есть блочная матрица размерности $m_1 m_2 \times n_1 n_2$:

$$B^{(1)} \otimes B^{(2)} = \begin{pmatrix} b_{11}^{(1)} B^{(2)} & \cdots & b_{1n_1}^{(1)} B^{(2)} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{i1}^{(1)} B^{(2)} & \cdots & b_{in_1}^{(1)} B^{(2)} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m_1 1}^{(1)} B^{(2)} & \cdots & b_{m_1 n_1}^{(1)} B^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}^{(1)} b_{11}^{(2)} & b_{11}^{(1)} b_{12}^{(2)} & \cdots & b_{1n_1}^{(1)} b_{1n_2}^{(2)} \\ b_{11}^{(1)} b_{21}^{(2)} & b_{11}^{(1)} b_{22}^{(2)} & \cdots & b_{1n_1}^{(1)} b_{2n_2}^{(2)} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ b_{i1}^{(1)} b_{11}^{(2)} & b_{i1}^{(1)} b_{12}^{(2)} & \cdots & b_{in_1}^{(1)} b_{1n_2}^{(2)} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ b_{m_1 1}^{(1)} b_{11}^{(2)} & b_{m_1 1}^{(1)} b_{12}^{(2)} & \cdots & b_{m_1 n_1}^{(1)} b_{m_1 n_2}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Переход от переменных y и C_y для каждой функции $W_j(y, C_y)$ $(j = 1, 2)$ к $x_1, x_2^{(j)} \in [-1; 1]$ выполнен по формулам

$$\begin{gathered} x_1 = \frac{2y}{b}, \quad x_2^{(1)} = \frac{C_y - 1}{C_y + 1}, \quad C_y \in [0, +\infty), \\ x_2^{(2)} = -\frac{C_y + 1}{C_y - 1}, \quad C_y \in (-\infty, 0]. \end{gathered} \tag{16}$$

В качестве узлов интерполяции в (12) для переменной x_1 выберем точки экстремума многочлена $T_{n_1}(x_1)$:

$$x_{1,k} = \cos\Big(\frac{\pi(n_1 - k)}{n_1}\Big), \qquad k = \overline{0, n_1}, \tag{17}$$

а для переменных $x_2^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ — нули $T_{n_2'}(x_2^{(j)})$:

$$x_{2,k}^{(j)} = \cos\Big(\frac{\pi(2n_2 - 2k + 1)}{2(n_2 + 1)}\Big), \qquad k = \overline{0, n_2}. \tag{18}$$

Для получения значения многочлена Чебышева $T_l(x)$ в точках (17), (18) используем его определение [16]

$$T_l(x) = \cos(l \arccos x), \qquad l = \overline{0, n}. \tag{19}$$

Тогда из равенства (19) при подстановке в него узлов (17), (18) следует

$$\begin{gathered} T_l(x_{1,k}) = \cos\Big(\frac{\pi l(n_1 - k)}{n_1}\Big), \qquad l, k = \overline{0, n_1}, \\ T_l(x_{2,k}^{(j)}) = \cos\Big(\frac{\pi l(2n_j - 2k + 1)}{2(n_j + 1)}\Big), \qquad l, k = \overline{0, n_2}, \quad j = 1, 2. \end{gathered} \tag{20}$$

Производная $T^{(1)}(x_1)$ по переменной x_1 может быть записана в виде произведения [16]

$$\frac{dT^{(1)}(x_1)}{dx_1} = T^{(1)}(x_1) D, \tag{21}$$

где D — верхнетреугольная матрица размерности $n_1' \times n_1'$, ненулевые элементы которой определяются следующим образом:

$$D_{j_1 j_2} = \begin{cases} j_2, & j_1 = 0, \quad j_2 = 1, 3, 5, \ldots, \\ 2j_2, & j_1 > 0, \quad j_2 - j_1 > 0, \quad j_2 - j_1 = 1, 3, 5, \ldots, \end{cases}$$

нумерация строк и столбцов матрицы начинается с нуля. Подставляя (15) в (14), получаем выражения для U_z и σ:

$$\begin{gathered} U_z(x_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=0}^{1} T^{(1)}(x_1) \otimes K^{(0,i)} A^{(i+1)}, \\ \sigma(x_1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=0}^{1} T^{(1)}(x_1) \otimes K^{(1,i)} A^{(i+1)}. \end{gathered} \tag{22}$$

Здесь $K^{(j,i)}$ — матрица размерности $1 \times n_2'$ $(i, j = \overline{0, 1}\,)$:

$$K^{(j,i)} = (K_{00}^{(j,i)}, K_{01}^{(j,i)}, \ldots, K_{0l}^{(j,i)}, \ldots, K_{0n_2}^{(j,i)}); \tag{23}$$

$$\begin{gathered} K_{0l}^{(j,0)} = \int_{-1}^{1} \rho_{l,j}(x_2^{(1)})\, dx_2^{(1)}, \qquad K_{0l}^{(j,1)} = (-1)^{j+l} K_{0l}^{(j,0)}, \qquad l = \overline{0, n_2}, \\ \rho_{l,j}(x) = \frac{2(1 + x)^j T_l(x)}{(1 - x)^{j+2}} \exp\Big(-\frac{(1 + x)^2}{(1 - x)^2}\Big), \qquad j = \overline{0, 1}. \end{gathered} \tag{24}$$

Для элементов $K_{0l}^{(j,1)}$ ($j = 0, 1$, $l = \overline{0, n_2}$) соотношения (24) записаны с использованием свойства многочленов Чебышева [16]

$$T_l(-x) = (-1)^l T_l(x). \tag{25}$$

С учетом (15)–(25) из (12), (13) получаем

$$a_{ij}^{(2)} = (-1)^{i+j} a_{ij}^{(1)}, \qquad i = \overline{0, n_1}, \quad j = \overline{0, n_2},$$

следовательно, для восстановления U_z достаточно найти W_1.

Подставляя (15) в (12) для W_1 и используя (17), (18), получаем систему линейных $n_1' n_2'$-уравнений. В этой системе уравнений в соответствии с граничными условиями (13) выполняется замена уравнений в точках, для которых $x_1 = x_{1,0}$, на уравнения

$$T^{(1)}(-1) \otimes T^{(2)}(x_{2,k}^{(1)}) A^{(1)} = 0, \qquad k = \overline{0, n_2}\,.$$

Вводя обозначение $W = (w_{00}, w_{01}, \ldots, w_{n_1 n_2 - 1}, w_{n_1 n_2})^{\text{т}}$, где $w_{ij} = W_1(x_{1,i}, x_{2,j}^{(1)})$, имеем

$$BW = F. \tag{26}$$

Здесь F — матрица размерности $n_1' n_2' \times 1$ с элементами, равными $-1/2$, за исключением первых $n_2 + 1$ нулевых элементов; B — квадратная матрица размерности $n_1' n_2' \times n_1' n_2'$ вида

$$B = \frac{2}{b} B^{(1)} + \delta \Pr I - \delta \Pr \left(B^{(2)} + \left(1 - \frac{1}{\Pr}\right) B^{(3)} \right),$$

$$B^{(1)} = J' D J^{-1} \otimes I^{(d)}, \qquad B^{(i)} = {I^{(i)}}' \otimes G^{(i)}, \qquad i = 2, 3,$$

$J, G^{(1)}$ — квадратные матрицы размерности $n_i' \times n_i'$ с элементами $J_{k_1 j_1} = T_{j_1}(x_{1,k_1})$, $G_{k_2 j_2}^{(1)} = T_{j_2}(x_{2,k_2}^{(1)})$, $j_i, k_i = \overline{0, n_i}$, $i = 1, 2$; I — единичная матрица размерности $n_1' n_2' \times n_1' n_2'$; $I^{(d)}$ — диагональная матрица размерности $n_2' \times n_2'$ с элементами

$$I_{k,k}^{(d)} = \frac{1 + x_{2,k}^{(1)}}{1 - x_{2,k}^{(1)}}, \qquad k = \overline{0, n_2}\,,$$

$I^{(i)}$ — квадратные матрицы размерности $n_1' \times n_1'$ с единичной главной диагональю и элементами $(-1)^i$ на побочной диагонали (если n_1 — нечетное число, то вне диагоналей элементы матрицы $I^{(i)}$ равны нулю ($i = 2, 3$), если n_1 — четное число, то $I_{n_1/2\, n_1/2}^{(2)} = 2$ и $I_{n_1/2\, n_1/2}^{(3)} = 0$); матрицы $G^{(i)}$ определяются по формуле $G^{(i)} = V^{(i)} K^{(i-2,0)} (G^{(1)})^{-1}$ ($i = 2, 3$); $V^{(i)}$ ($i = 2, 3$) — матрицы-столбцы размерности $n_2' \times 1$: $V_{k0}^{(2)} = 1$, $V_{k0}^{(3)} = I_{kk}^{(d)}$, $k = \overline{0, n_2}$; штрих у матриц J и $I^{(i)}$ ($i = 2, 3$) означает, что верхняя строка этих матриц нулевая.

Решение системы уравнений (26) находим с использованием LU-метода. Далее восстанавливаем $U_z(x_1)$:

$$U_z(x_1) = R \circ T^{(1)}(x_1) J^{-1} \otimes G^{(2,0)} \otimes W.$$

Здесь R — матрица размерности $n_1' \times 1$ с элементами $R_{k0} = 0$, если k — нечетное число, иначе $R_{k0} = 2$ ($k = \overline{0, n_1}$); $G^{(2,0)}$ — матрица, образованная из верхней строки матрицы $G^{(2)}$; символ “$\circ$” означает произведение Адамара [15]. В частности, если $B^{(j)}$ ($j = 1, 2$) — матрицы, каждая из которых имеет размерность $m \times n$, то произведение Адамара $B^{(1)} \circ B^{(2)}$ есть матрица размерности $m \times n$: $(B^{(1)} \circ B^{(2)})_{ij} = B_{ij}^{(1)} B_{ij}^{(2)}$. Из (5) находим

$$\bar{U}_z = L J^{-1} \otimes G^{(2,0)} W, \qquad 2L = R \circ \int_{-1}^{1} T^{(1)}(x_1)\, dx_1. \tag{27}$$

Если k — нечетное число, то $L_{0k} = 0$, иначе $L_{0k} = 2(1 - k^2)^{-1}$ ($k = \overline{0, n_1}$). Подставляя (27) в (6), получаем значение коэффициента трения Дарси f_d в зависимости от параметра разреженности газа δ и значения числа Рейнольдса Re.

Результаты расчетов. На рис. 1 приведены результаты вычислений коэффициента трения Дарси f_d по формуле (6) при $\mathrm{Re} = 30$ на основе ЭС-модели кинетического уравнения Больцмана с помощью предлагаемого метода при $n_1 = n_2 = 20$, $\mathrm{Pr} = 2/3$ (кривая *1*). Кривая *2* соответствует решению уравнения (9) при $\mathrm{Pr} = 1$ (БГК-модель). Кривые *1, 2* построены с помощью кубической сплайн-интерполяции с использованием значений $\delta =$ 0,01; 0,1; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 5,0; 10,0; 20,0; 50,0; 100,0. Точками показаны значения f_d, полученные с использованием значений безразмерного потока массы $J_{b,M}$ [17]. В этом случае в расчетах использовано соотношение $4\bar{U}_z = J_{b,M}|_{\delta=2\delta_b}$. Из рис. 1 следует, что результаты расчетов с помощью предлагаемого метода полиномиальной аппроксимации решения модельного кинетического уравнения хорошо согласуются с результатами [17]. Различие результатов для параметра разреженности газа в диапазоне $1 \leqslant \delta \leqslant 100$ не превышает 1 %. Кривая *3* на рис. 1 построена на основе решения уравнения Навье — Стокса с граничными условиями скольжения на стенках рассматриваемого канала. Ниже показано, каким образом получено это решение.

В гидродинамическом режиме ($\delta \to \infty$) безразмерная макроскопическая скорость газа U_z может быть найдена с использованием уравнений Навье — Стокса

$$\frac{d^2 U_z}{dy^2} = -\delta \tag{28}$$

с условиями прилипания на стенках канала

$$U_z(\pm b/2) = 0.$$

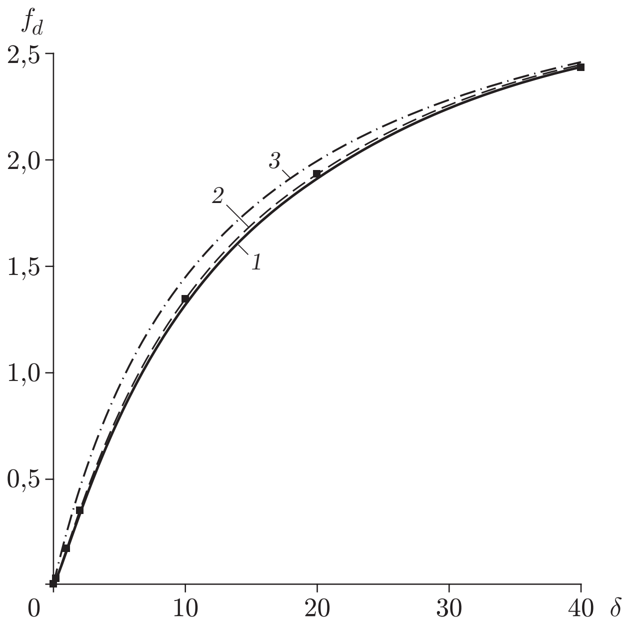

Рис. 1. Зависимость коэффициента трения Дарси f_d от параметра разреженности газа δ при $\mathrm{Re} = 30$:

1 — расчет по ЭС-модели, *2* — расчет по БГК-модели, *3* — расчет с использованием уравнения Навье — Стокса с граничными условиями скольжения

Учитывая, что $b = 1/2$, получаем

$$U_z(y) = -\frac{\delta}{2}\,y^2 + \frac{\delta}{32}. \tag{29}$$

Заметим, что решение уравнения (9) с граничными условиями (11) при $\delta \to \infty$ согласуется с соответствующим гидродинамическим решением (29). В этом случае

$$Z(y, C_y) = -\frac{\delta}{2}\,y^2 + \frac{\delta}{32}.$$

Подставляя (29) в (5), получаем выражение для $\bar{U}_z$ в виде

$$\bar{U}_z = \delta/48. \tag{30}$$

Из (30) следует, что в гидродинамическом режиме течения число Пуазейля P_0, определяемое отношением $2\delta/\bar{U}_z$, равно 96 и не зависит от степени разреженности газа δ. Полученное значение P_0 совпадает с соответствующим значением, полученным в [8]. Подставляя (30) в (6), находим

$$f_d = 96/\operatorname{Re}. \tag{31}$$

В случае течения газа в режиме со скольжением согласно [10] записываем граничные условия для уравнения (17) в виде

$$U_z\Big(\pm\frac{b}{2}\Big) = \mp\frac{\sigma_p}{\delta}\,\frac{dU_z}{dy}\Big|_{y=\pm b/2}, \tag{32}$$

где σ_p — коэффициент скольжения. Для модели диффузного отражения σ_p определяется выражением [10, 18]

$$\sigma_{p,\text{БГК}} = \sigma_{p,\text{ЭС}} = 1{,}016.$$

Решая граничную задачу (28), (32), находим

$$U_z(y) = -\frac{1}{2}\,\delta y^2 + \frac{1}{32}\,\delta + \frac{1}{4}\,\sigma_p. \tag{33}$$

В этом случае, подставляя (33) в (5), получаем

$$\bar{U}_z = \frac{1}{48}\,\delta + \frac{1}{4}\,\sigma_p. \tag{34}$$

Первое слагаемое в (34) соответствует $\bar{U}_z$ в гидродинамическом пределе, а второе учитывает скольжение. Если, следуя [10], в качестве характерной величины выбрать высоту канала b', то получим выражение для $\bar{U}_{b,z}$ в виде [10]

$$\bar{U}_{b,z} = 2\bar{U}_z\big|_{\delta=2\delta_b} = \frac{1}{12}\,\delta_b + \frac{1}{2}\,\sigma_p.$$

Подставляя (34) в (6), находим

$$f_d = \frac{96}{\operatorname{Re}\left(1 + 12\sigma_p\delta^{-1}\right)}. \tag{35}$$

На рис. 2 представлена зависимость коэффициента трения Дарси f_d от числа Рейнольдса Re при значениях параметра разреженности $\delta = 5$, 20, 100. Кривая *1* получена с использованием ЭС-модели, кривая *2* — с использованием БГК-модели, кривой *3* показаны результаты вычисления по формуле (35), т. е. на основе решения уравнения Навье — Стокса с граничными условиями скольжения. На рис. 2 видно, что при $\delta = 100$ кривые *1–3*

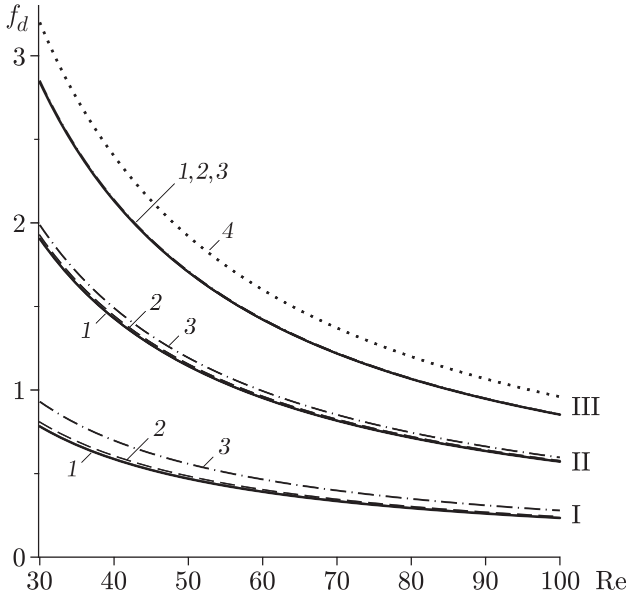

Рис. 2. Зависимость коэффициента трения Дарси f_d от числа Рейнольдса Re при различных значениях δ:
I — $\delta = 5$, II — $\delta = 20$, III — $\delta = 100$; *1* — расчет по ЭС-модели, *2* — расчет по БГК-модели, *3* — расчет с использованием уравнения Навье — Стокса с граничными условиями скольжения, *4* — расчет с использованием уравнения Навье — Стокса с граничными условиями прилипания

практически совпадают, различие значений, полученных на основе ЭС-модели и гидродинамического решения уравнения Навье — Стокса, составляет менее 0,3 %. При $\delta = 20$ различие результатов не превышает 4 %. Кривой *4* показаны результаты вычисления по формуле (31), т. е. на основе решения уравнения Навье — Стокса с граничными условиями полного прилипания.

Заключение. В работе получены значения коэффициента трения Дарси для потока разреженного газа в канале, образованном двумя бесконечными параллельными пластинами, в зависимости от значений параметра разреженности и числа Рейнольдса. Предложенный метод вычислений основан на решении линеаризованного эллипсоидально-статистического уравнения с использованием полиномиальной аппроксимации Чебышева. Установлено, что с увеличением значений параметра разрежения газа значения коэффициента трения Дарси увеличиваются до значений, соответствующих гидродинамическому пределу. Показано, что в режиме течения со скольжением результаты полиномиальной аппроксимации решения модельного кинетического уравнения Больцмана хорошо согласуются с результатами, полученными на основе решения уравнения Навье — Стокса.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рудяк В. Я., Лежнев Е. В., Любимов Д. Н.** Об анизотропии процессов переноса газа в нано- и микроканалах // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9, № 1. С. 152–163.

2. **Sharipov F.** Rarefied gas dynamics: Fundamentals for research and practice. Berlin: Wiley-VCH, 2016.

3. **Ambrus V., Sharipov F., Sofonea V.** Comparison of the Shakhov and ellipsoidal models for the Boltzmann equation and DSMC for ab initio-based particle interactions // Comput. Fluids. 2020. V. 211. 104637.
4. **Titarev V.** Implicit high-order method for calculating rarefied gas flow in a planar microchannel // J. Comput. Phys. 2012. V. 231, N 1. P. 109–134.
5. **Shaikh M. M., Massan S., Wagan A. I.** A sixteen decimal places accurate Darcy friction factor database using non-linear Colebrook's equation with a million nodes: A way forward to the soft computing techniques // Data Brief. 2019. V. 27. 1047332.
6. **Dutkowski K.** Experimental investigations of Poiseuille number laminar flow of water and air in minichannels // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2008. V. 51. P. 5983–5990.
7. **Valougeorgis D.** The friction factor of a rarefied gas flow in a circular tube // Phys. Fluids. 2007. V. 19, N 9. 091702.
8. **Liu C., Yang J., Ni Y.** A multiplicative decomposition of Poiseuille number on rarefaction and roughness by lattice Boltzmann simulation // Comput. Math. Applicat. 2011. V. 61, N 12. P. 3528–3536.
9. **Kandlikar S.** Heat transfer and fluid flow in minichannels and microchannels / S. Kandlikar, S. Garimella, S. Li, M. King. Amsterdam: Elsevier, 2006.
10. **Шарипов Ф. М.** Движение разреженных газов в каналах и микроканалах / Ф. М. Шарипов, В. Д. Селезнев. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2008.
11. **Holway L.** New statistical models for kinetic theory: Methods of construction // Phys. Fluids. 1966. V. 9, N 9. P. 1658–1673.
12. **Гермидер О. В., Попов В. Н.** Метод коллокации и его применение для решения линеаризованного уравнения Холвея // Мат. моделирование. 2020. Т. 32, № 9. С. 3–19.
13. **Zheng Yi., Struchtrup H.** Ellipsoidal statistical Bhatnagar — Gross — Krook model with velocity dependent collision frequency // Phys. Fluids. 2005. V. 17, N 12. 127103.
14. **Bhatnagar P., Gross E., Krook M.** A model for collision processes in gases. 1. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // Phys. Rev. 1954. V. 94, N 3. P. 511–525.
15. **Liu S., Trenkler G.** Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products // Intern. J. Inform. Systems Sci. 2008. V. 4, N 1. P. 160–177.
16. **Mason J.** Chebyshev polynomials / J. Mason, D. Handscomb. Florida: CRC Press, 2003.
17. **Титарев В. А., Шахов Е. М.** Кинетический анализ изотермического течения в длинном микроканале прямоугольного поперечного сечения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 7. С. 1285–1302.
18. **Taguchi S., Saito K., Takata S.** A rarefied gas flow around a rotating sphere: diverging profiles of gradients of macroscopic quantities // J. Fluid Mech. 2019. V. 862. P. 5–33.

Поступила в редакцию 17/XI 2022 г.,
после доработки — 14/II 2023 г.
Принята к публикации 27/II 2023 г.