

ЛИТЕРАТУРА

1. Зубков П. И., Лукьянчиков Л. А., Тен К. А. О гашении электрической дуги с помощью взрывчатых веществ.— ПМТФ, 1978, № 4.
2. Мешков Е. Е. Неустойчивость границы раздела двух газов, ускоряемой ударной волной.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 5.
3. Сизонов В. С. Поведение поверхности раздела двух жидкостей конечной глубины в переменных силовых полях.— ПМТФ, 1970, № 5.

УДК 538.6

ОБ УЧЕТЕ ЗАВИСИМОСТИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ОТ ДАВЛЕНИЯ В СВЕРХСИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Б. А. Бойко, С. П. Роцупкин
(Москва)

Получение сверхсильных импульсных магнитных полей методом обжата начального потока металлической оболочки, ускоренной продуктами взрыва ВВ, ограничивается в основном двумя процессами: динамикой сжатия и диффузией поля, связанной с конечной электропроводностью σ лайнера. Характер изменения электропроводности от физических свойств среды (плотности ρ и удельной тепловой энергии q) существенно влияет на результаты теоретических расчетов [1—3]. В области высоких температур, а также больших и малых плотностей зависимость электропроводности металлов от q и ρ недостаточно изучена. Поэтому в основном используются полуэмпирические соотношения, например

$$\sigma = \sigma_0(1 + \beta q)^{-1} [2], \quad \sigma = \sigma_0(1 + \beta q)^{-1}(\rho/\rho_0)^n \quad [3,4],$$

которые экстраполируются на область плотностей и температур, возникающих в среде при получении сверхсильных магнитных полей. В работе [2] показано, что результаты численных расчетов в предположении зависимости электропроводности меди только от джоулева нагрева хорошо согласуются с экспериментальными в области полей $H \leq 3$ Мэ. Довольно полно численные расчеты верхних теоретических пределов магнитных полей приведены в работе [3], где показано, что для $H > 10$ Мэ эксперимент согласуется с результатами вычислений только тогда, когда учитывается зависимость электропроводности оболочки как от джоулева тепла, так и от плотности в области сжатия. Отменена сравнительно слабая зависимость максимальной величины поля от джоулева тепла. Так, произвольное изменение теплового коэффициента β в 3 раза не привело к лучшему согласованию результатов расчетов [3] с экспериментальными.

Поля напряженностью $H > 10$ Мэ оказывают на проводник давления $p > 4 \cdot 10^{11}$ Па, что приводит к увеличению плотности и, следовательно, возрастанию электропроводности некоторых металлов [5, 6]. Как показывают оценки, изменение электропроводности вследствие нагрева более чем на порядок превосходит соответствующее изменение из-за давления. Поэтому, учитывая вышеизложенное, представляет интерес выяснить, в каких случаях поправка в изменение электропроводности вследствие давления может оказаться существенной.

Исследование проникновения сверхсильных магнитных полей в проводник осложняется нелинейными эффектами, связанными с уменьшением его электропроводности при нагреве и испарении и увеличением ее из-за роста плотности при повышении давления, и возможно в общем случае только численными методами. Отдавая должное численным расчетам, отметим, что они не позволяют оценить качественные закономерности. Аналитическое решение, даже полученное за счет сильного упрощения задачи, при учете, однако, основных физических процессов дает более глубокое понимание явлений и облегчает проведение в дальнейшем более точных машинных расчетов.

В связи с этим, отвлекаясь от динамических ограничений и считая известными некоторые параметры оболочки (электропроводность, уравнение состояния), рассмотрим задачу о влиянии давления на величину магнитного поля при обжате последнего металлическими стенками лайнера и приведем качественные аналитические соотношения, позволяющие оценить это влияние.

1. Рассмотрим в одномерном случае сжатие магнитного потока двумя плоскими металлическими стенками (фиг. 1, где 1 — движущаяся со скоростью v металлическая оболочка, 2 — поверхность оболочки, H — магнитное поле в зазоре, направленное по оси y). Уравнение для баланса потока имеет вид

$$\Phi_0/2 = \Phi_1(t) + \Phi_2(t),$$

где Φ_0 — начальный поток; $\Phi_1(t) = H_0(t)x(t)$ — половина потока между стенками; $\Phi_2(t) = \int_0^s H dx = H_0(t)s(t)$ — поток в стенке. Отсюда для магнитного поля между стенками имеем

$$(1.1) \quad H_0(t) = \frac{\Phi_0/2}{x(t) + s(t)}.$$

Рассмотрим данное выражение в момент остановки лайнера. Обозначим x_* расстояние от оси y до точки поворота. Из соотношения (1.1) следует, что при $x_* \leq s$ поправка в глубине скин-слоя s из-за давления может оказаться существенной. Пусть H_1 — магнитное поле, рассчитываемое по (1.1) в предположении, что электропроводность лайнера зависит только от джоулева тепла ($s(t)$ — глубина теплового скин-слоя), H_2 — аналогичная величина для среды с электропроводностью, зависящей как от джоулева тепла, так и от давления ($s(\tau_2)$ — глубина скин-слоя в этом случае). Отношение данных полей при одинаковых расстояниях до точки поворота равняется

$$(1.2) \quad \frac{H_2}{H_1} = \frac{1 + x_*/s(t)}{s(\tau_2)/s(t) + x_*/s(t)}.$$

Из соотношения (1.2) следует, что для оценки влияния давления на величину магнитного поля достаточно определить отношение соответствующих толщин скин-слоя.

В рассматриваемом одномерном случае проникновения плоского магнитного поля в полупространство $x > 0$ уравнения диффузии и теплопроводности имеют вид

$$(1.3) \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial H}{\partial x};$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{c^2}{16\pi^2\sigma} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2.$$

Предположим, что вещество проводника существует только в двух состояниях:

1) полностью проводящий металл, электропроводность которого равна [3, 4]

$$(1.5) \quad \sigma = \sigma_0(1 + \beta q)^{-1}(\rho/\rho_0)^n,$$

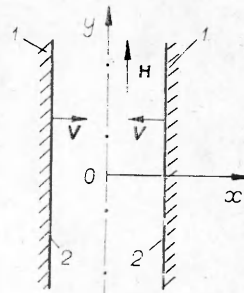
где σ_0 , ρ_0 — электропроводность и плотность среды соответственно при $T = 20^\circ\text{C}$; β — тепловой коэффициент; q — плотность тепловой энергии; n — коэффициент, зависящий от среды, например, для Cu и Pb равный 2,7 и 6 соответственно [5];

2) расширившийся непроводящий пар ($\sigma = 0$).

Последнее предположение основано на результатах работы [3], где показано, что электропроводностью плазмы можно пренебречь.

Используется следующее уравнение состояния [7]:

$$(1.6) \quad p = A[(\rho/\rho_0)^m - 1],$$



Фиг. 1

справедливое в области холодного сжатия для давлений $p \leq 10^{11}$ Па, где m и A — постоянные параметры, например, для Си и Рб равные 4,8; 5,3 и $3,05 \cdot 10^{10}$ Па и $0,87 \cdot 10^{10}$ Па соответственно.

Давление магнитного поля для несжимаемого проводника [4]

$$(1.7) \quad p(x, t) = [H^2(0, t) - H^2(x, t)]/8\pi.$$

Учитывая выражения (1.5) — (1.7), электропроводность запишем в виде

$$(1.8) \quad \sigma = \sigma_0 [1 + \beta q(x, t)]^{-1} \left[1 + \frac{H^2(0, t)}{8\pi A} - \frac{H^2(x, t)}{8\pi A} \right]^\delta,$$

где $\delta = n/m$.

2. Система дифференциальных уравнений в частных производных (1.3), (1.4) с условием (1.8) в общем случае допускает только численные решения. Поэтому, для того чтобы провести необходимые качественные оценки, воспользуемся условием независимого изменения электропроводности среды от магнитного давления и от джоулева тепла (1.8), а также тем, что скорость импульса давления более чем на порядок превосходит скорость диффузии магнитного поля [4], т. е. диффузия происходит по сжатому холодному металлу. Таким образом, вначале рассмотрим проникновение поля в среду, электропроводность которой зависит только от давления, в пренебрежении джоулевым теплом. Это позволит показать, что влияние давления на электропроводность сводится к ее увеличению по всему скин-слою в некоторое число раз.

Исходное уравнение в данных предположениях имеет вид

$$(2.1) \quad \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial H}{\partial x};$$

$$(2.2) \quad H(0, t) = H_0(t), \quad H(x, 0) = 0,$$

где

$$(2.3) \quad \sigma = \sigma_0 \left[1 + \frac{H_0^2(t)}{8\pi A} - \frac{H^2(x, t)}{8\pi A} \right]^\delta.$$

Полученное уравнение можно упростить, разложив выражение для электропроводности (2.3) по малому параметру $\varepsilon = \frac{H^2/8\pi A}{1 + H_0^2/8\pi A}$:

$$(2.4) \quad \sigma = \sigma_0 (1 + H_0^2/8\pi A)^\delta (1 - \delta\varepsilon).$$

В силу квадратичной зависимости ε от H для $x > 0$ ε будет быстро убывать и стремиться к нулю на глубине порядка скин-слоя. Поэтому $\varepsilon \ll 1$ во всей области интегрирования $0 < x < \infty$, $0 < t < t_0$, за исключением малой окрестности вблизи $x = 0$, $t = t_0$, где ε может быть порядка единицы. Следовательно, решение уравнения (2.1), (2.2), (2.4) при $\varepsilon = 0$ можно использовать в качестве первого приближения к решению нелинейного уравнения (2.1) — (2.3). Таким образом, получим

$$(2.5) \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma_0} (1 + H_0^2/8\pi A)^{-\delta} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.$$

Вводя новую переменную

$$(2.6) \quad \tau = \int_0^t [1 + H_0^2(\lambda)/8\pi A]^{-\delta} d\lambda,$$

из (2.5), (2.2) имеем линейное уравнение диффузии, решение которого хорошо известно и имеет вид

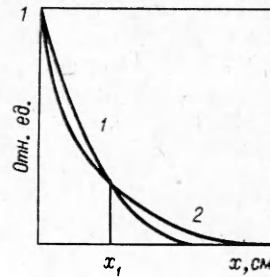
$$(2.7) \quad H(x, \tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{c\sqrt{\tau}} - 1}^{\infty} H_0 \left(\tau - \frac{\pi\sigma_0 x^2}{c^2 \lambda^2} \right) e^{-\lambda^2} d\lambda,$$

где $\xi_1 = (\pi\sigma_0 x^2 / c^2 \tau)^{1/2}$. Используя линейные решения типа (2.7), можно построить второе приближение к нелинейному уравнению (2.1) — (2.3). Проинтегрируем уравнение (2.1) по x от 0 до x :

$$\int_0^x \frac{\partial H}{\partial t} dx = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{c^2}{4\pi\sigma_0} \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

Учитывая, что при $x \rightarrow \infty \partial H / \partial x \rightarrow 0$, получим

$$-\frac{c^2}{4\pi\sigma_0} \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=0} = \int_0^\infty \frac{\partial H}{\partial t} dx$$



Ф и г. 2

Отсюда для нелинейного решения (которое обозначим H_+) имеем

$$(2.8) \quad \frac{c^2}{4\pi\sigma} \left| \frac{\partial H_+}{\partial x} \right| = \int_x^\infty \frac{\partial H_+}{\partial t} dx,$$

где σ определяется выражением (2.3). Для линейного решения (которое обозначим H_-) уравнения диффузии (2.1), (2.2) с постоянной электропроводностью σ_1 из интервала

$\sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_* = \sigma_0 (1 + H_0^2 / 8\pi A)^{\delta}$ получим аналогичное выражение

$$(2.9) \quad \frac{c^2}{4\pi\sigma_1} \left| \frac{\partial H_-}{\partial x} \right| = \int_x^\infty \frac{\partial H_-}{\partial t} dx$$

Предположим, что в точке x_1 линейное (H_-) и нелинейное (H_+) решения пересекаются (качественно это изображено на фиг. 2, где кривая 1 соответствует H_+ , 2 — H_-), тогда, вычитая (2.8) из (2.9), получим

$$(2.10) \quad \frac{c^2}{4\pi\sigma_1} \left(\left| \frac{\partial H_-}{\partial x} \right| - \frac{\sigma_1}{\sigma} \left| \frac{\partial H_+}{\partial x} \right| \right) \Big|_{x=x_1} = \int_{x_1}^\infty \left(\frac{\partial H_-}{\partial t} - \frac{\partial H_+}{\partial t} \right) dx$$

Как видно из фиг. 2, в точке x_1 для данного момента времени всегда выполняется условие $\left| \frac{\partial H_-}{\partial x} \right| < \left| \frac{\partial H_+}{\partial x} \right|$. Учитывая, что в интервале $[x_1, \infty] \left| \frac{\partial H_-}{\partial t} \right| > \left| \frac{\partial H_+}{\partial t} \right|$, из (2.10) имеем

$$\left| \frac{\partial H_-}{\partial x} \right| > \frac{\sigma_1}{\sigma} \left| \frac{\partial H_+}{\partial x} \right|$$

Это возможно только тогда, когда в точке $x_1 \sigma > \sigma_1$. Исключение составляют две точки: $x_1 = 0$, где $\sigma = \sigma_1 = \sigma_0$, и $x_1 = \infty$, где $\sigma = \sigma_1 = \sigma_*$ (это следует из (2.9) при подстановке $x_1 = 0$ и $x_1 = \infty$). Таким образом, учитывая выражение (2.3), получим, что на графике распределения поля в среде от глубины нелинейное решение будет лежать выше трансцендентного, каждая точка которого определяется пересечением прямой $\eta = \text{const}$ ($0 \leq \eta \leq 1$) с линейным решением (2.7), у которого $\tau = \tau_1$, где

$$(2.11) \quad \tau_1 = \int_0^1 \left[1 + \frac{H_0^2(\lambda)}{8\pi A} (1 - \eta^2) \right]^{-\delta} d\lambda;$$

$$(2.12) \quad \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{H_0} \int_{\xi_1}^\infty H_0 \left(\tau_1 - \frac{\pi\sigma_0 \lambda^2}{c^2 \lambda^2} \right) e^{-\lambda^2} d\lambda,$$

где $\xi_2 = (\pi\sigma_0 x^2/c^2\tau_1)^{1/2}$. Так как трансцендентное решение (2.12) построено из линейных, у которых $\sigma \leq \sigma_*$, то оно будет лежать выше линейного решения (2.7), у которого $\sigma = \sigma_*$. Таким образом, получено второе приближение нелинейного уравнения (2.1) — (2.3).

3. В случае постоянного граничного условия $H_0(t) = H_0 = \text{const}$ решения (2.7), (2.12) соответственно имеют вид

$$(3.1) \quad H/H_0 = 1 - \text{erf} [\xi(1 + H_0^2/8\pi A)^{\delta/2}];$$

$$(3.2) \quad \eta = 1 - \text{erf} \left\{ \xi \left[1 + \frac{H_0}{8\pi A} (1 - \eta^2) \right]^{\delta/2} \right\},$$

где $\xi = (\pi\sigma_0 x^2/c^2 t)^{1/2}$.

Скин-слой по потоку для линейного (3.1), трансцендентного (3.2) и численного решения уравнения (2.1) — (2.3) при $H_0 = \text{const}$ имеет вид

$$s_i = \alpha_i^{-1} \sqrt{\frac{c^2 t}{\pi^2 \sigma_0} \left(1 + \frac{H_0^2}{8\pi A} \right)^{-\delta/2}} \quad (i = 0, 1, 2),$$

где $i = 0$ соответствует линейному решению, $i = 1$ — трансцендентному, $i = 2$ — численному; $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = s_0/s_1$, $\alpha_2 = s_0/s_2$, где s_0, s_1, s_2 определяются соответственно линейным (3.1), трансцендентным (3.2) и численным решениями. Таким образом, для указанных решений можно сказать, что влияние давления магнитного поля на электропроводность сводится к ее увеличению до значения

$$\sigma = \sigma_0 \alpha_i^2 (1 + H_0^2/8\pi A)^\delta.$$

Возвращаясь к исходной задаче, выражение (1.8) можно представить в виде

$$(3.3) \quad \sigma = \sigma_0 (1 + \beta q)^{-1} \alpha_i^2 (1 + H_0^2/8\pi A)^\delta.$$

Уравнения (1.3), (1.4) с электропроводностью (3.3) введением переменной $\tau_2 = \tau/\alpha_i^2$, где τ определяется выражением (2.6), сводятся к системе уравнений относительно переменных x, τ_2 с электропроводностью, зависящей только от Джоулева тепла

$$(3.4) \quad \sigma = \sigma_0 (1 + \beta q)^{-1}.$$

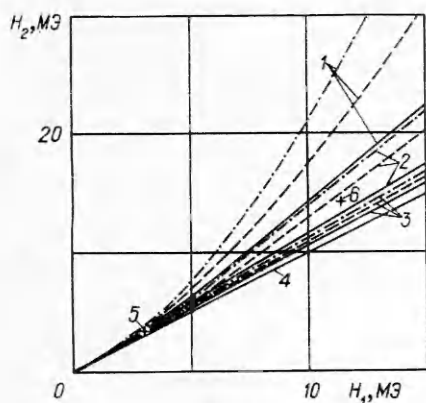
Таким образом, если глубина скин-слоя в случае системы (1.3), (1.4), (3.4) определяется функцией $s = s(t)$, то в случае системы (1.3), (1.4), (3.3) имеем $s = s(\tau_2)$. Известно, что для постоянного на границе поля оценка глубины скин-слоя имеет вид $s \sim (t/\sigma)^{1/2}$, тогда отношение соответствующих толщин скин-слоя будет равно

$$(3.5) \quad \frac{s(\tau_2)}{s(t)} = (\tau_2/t)^{1/2} = \alpha_i^{-1} (1 + H_0^2/8\pi A)^{-\delta/2}.$$

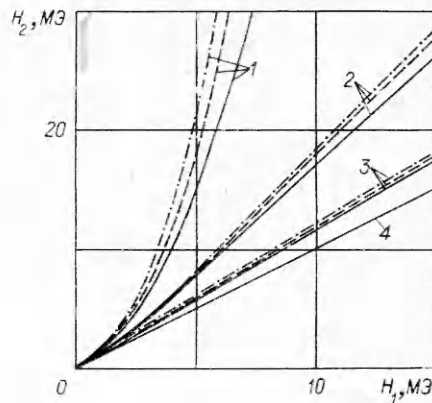
Подставляя выражение (3.5) в (1.2), получим

$$(3.6) \quad \frac{H_2}{H_1} = \frac{1 + x_*/s(t)}{\alpha_i^{-1} (1 + H_0^2/8\pi A)^{-\delta/2} + x_*/s(t)}.$$

На фиг. 3, 4 соответственно для медной и свинцовой оболочек приведены зависимости (3.6) для случаев: 1 — соответствует $x_* = 0$, 2 — $x_* = s(t)$, 3 — $x_* = 5s(t)$, 4 — $x_* \gg s(t)$, 5 — данные работы [2], 6 — данные работы [3], причем штрихпунктирные линии соответствуют линейным решениям, штриховые — трансцендентным, сплошные — численным. Из графиков следует, что для поля $H = 15$ Мэ отличие линейного и трансцендентного решений от численного максимально при $x_* = 0$ и составляет соответственно 80; 40% для медной оболочки и 133; 65% для свинцовой. С увеличением x_* данное отличие уменьшается и в области $x_* \approx s(t)$



Фиг. 3



Фиг. 4

составляет соответственно 25; 13% для меди и 9; 6% для свинца. Таким образом, соотношение (3.6) для линейного и трансцендентного решений может быть использовано для оценки влияния давления на величину магнитного поля в лайнере.

Из фиг. 3, 4 также следует, что при $x_* \gg s(t)$ $H_1 = H_2$ и при расчете максимально достижимого магнитного поля влиянием давления на электропроводность среды можно пренебречь независимо от величины напряженности поля. В области же расстояний до точки поворота, меньших или сравнимых с глубиной теплового скин-слоя ($x_* \lesssim s(t)$), зависимость электропроводности оболочки от давления существенно влияет на величину магнитного поля, причем для медного лайнера в области $H > 3-5$ МЭ, для свинцового — в области $H > 1-2$ МЭ. Поэтому для оболочек из этих металлов в указанных интервалах полей в расчетах, учитывающих зависимость электропроводности только от джоулева тепла, величина максимально достижимого поля будет занижена и тем заметнее, чем меньше расстояние до точки поворота по сравнению с глубиной теплового скин-слоя. Как видно из фиг. 3 (точки 5, 6), полученные зависимости хорошо согласуются с экспериментальными (по оси ординат отложены экспериментальные значения поля, а по оси абсцисс — соответствующие расчетные значения H_1).

Поступила 7 VII 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакулин Ю. Д., Куропатенко В. Ф., Лучинский А. В. Магнитогидродинамический расчет взрывающихся проводников.— ЖТФ, 1976, т. 46, вып. 9.
2. Калиткин Н. Н., Царева Л. С. Приближенная теория магнитной кумуляции.— ЖТФ, 1969, т. 39, вып. 8.
3. Kidder R. E. Compression of magnetic field inside a hollow explosive — driven cylindrical conductor.— In: Proceedings of the Conference on Megagauss Magnetic Fields. Frascati, Italy, 1965.
4. Knoepfel H. Pulsed High Magnetic Fields. London — Amsterdam: North-Holland, 1970. Рус. пер. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. М.: Мир, 1972.
5. Mott N. F., Jones H. The Theory of the Properties of Metals and Alloys. N. Y.: Dover Publications Inc., 1958.
6. Таблицы физических величин. Справочник/Под ред. И. К. Кикоина. М.: Наука, 1976.
7. Физика взрыва/Под ред. К. П. Станюковича. М.: Наука, 1975.