ПМТФ, № 6, 1967

О ВЛИЯНИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНОГО ПЛАМЕНИ

Г. И. Сивашинский

(Москва)

Исследование гидродинамической устойчивости плоского фронта пламени было проведено в работе Л. Д. Ландау [1], в которой установлено, что плоский фронт пламени абсолютно неустойчив.

Цель предлагаемой заметки: выявить влияние кривизны гидродинамического поля на устойчивость пламени. Исследование устойчивости пламени проводится в рамках теории Л. Д. Ландау, так что фронт пламени представляет собой поверхность, на которой терпят разрыв значения скорости, плотности и температуры. Вязкость, диффузия и теплопроводность не учитываются. Фронт движется относительно газа с известной постоянной скоростью. Газ перед фронтом и за фронтом предполагается несжимаемым.

Показано, что существуют поля как стабилизирующие, так и дестабилизирующие пламя. Рассматривается цилиндрическое пламя, образованное сосредоточенным источником заданной интенсивности (плоская задача). Исследуется устойчивость пламени при возмущении фронта пламени. Показано, что в этом случае гидродинамическое поле оказывает стабилизирующее влияние на пламя. Для первых гармоник возмущения дестабилизирующий фактор расширения газа оказывается достаточно слабым по сравнению со стабилизирующим влиянием поля скоростей. Первые гармоники возмущений затухают. Приведен пример дестабилизирующего влияния поля скоростей: радиальный поток свежей смеси подается извне; существует сосредоточенный сток для продуктов сгорания.

§ 1. Гидродинамическая картина невозмущенного цилиндрического пламени в полярных координатах r, φ имеет вид

$$v_{r1}^\circ = \frac{Q}{2\pi\rho_1 r}, \quad \frac{\partial P_1^\circ}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi^2\rho_1 r^3} \quad \left(0 \leqslant r \leqslant \frac{Q}{2\pi\rho_1 S_1} = R\right)$$
$$v_{r2}^\circ = \frac{Q}{2\pi\rho_2 r}, \quad \frac{\partial P_2^\circ}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi^2\rho_2 r^3} \quad (R \leqslant r) \tag{1.1}$$

Здесь v_r — радиальная компонента скорости газа, S — скорость пламени относительно газа, ρ — плотность газа, P — давление в газе, Q — интенсивность источника свежей смеси, R — радиус невозмущенного фронта пламени (все параметры свежей смеси пишутся с индексом 1, с индексом 2 пишутся параметры продуктов сгорания).

При исследовании устойчивости будем исходить из уравнения для функции тока Ψ

$$\frac{\partial \Delta\Psi}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial\varphi} = 0 \qquad \left(v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}, \quad v_\varphi = -\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) \tag{1.2}$$

Для дальнейшего нам потребуется связь между Ψ и P, которую легко получить из уравнений Эйлера

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t\,\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\,\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} = \frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial\varphi} \tag{1.3}$$

Положим $\Psi = \Psi^\circ + \psi$, $P = P^\circ + p$ (Ψ°, P° соответствуют невозмущенному пламени).

Будем считать, что

$$|\psi| \leqslant |\Psi^\circ|, \qquad |p| \leqslant |P^\circ| \tag{1.4}$$

Используя (1.1), (1.4), линеаризуем уравнения (1.2), (1.3)

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \frac{\varkappa}{r}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial r} = 0 \qquad \left(\varkappa = \frac{Q}{2\pi\rho}\right) \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial r} + \frac{\varkappa}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\varkappa}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} \tag{1.6}$$

Из (1.5) имеем

$$\Delta\psi = F\,(t - r^2 / 2\varkappa,\ \varphi) \tag{1.7}$$

Положим в начальный момент

$$\Delta\psi = F\,(t - r^2 / 2\varkappa,\ \varphi) = 0 \tag{1.8}$$

Предполагая, что источник свежей смеси не является источником вихрей и учитывая (1.8), получим, что $\Delta\psi = 0$ при $t \geqslant 0$, $0 \leqslant r \leqslant R$ и $r \geqslant \sqrt{2\varkappa t + R^2} = D\,(t)$. Таким образом, в линейном приближении течение будет заведомо безвихревым только вне кольца $R \leqslant r \leqslant D\,(t)$.

Итак, в результате возмущения от фронта пламени отделяется поверхность разрыва вихрей. Скорость ее движения относительно газа равна нулю. Поэтому при $r = D\,(t)$ тангенциальная компонента скорости может претерпевать разрыв $w\,(\varphi,\ t)$. Так как в начальный момент возмущается только фронт, то положим

$$w\,(\varphi,\ 0) = 0 \tag{1.9}$$

§ 2. Напишем линеаризованные условия сохранения потоков масс и компонент импульса на фронте пламени, а также условия постоянства скорости распространения фронта пламени относительно газа. Имеем при $r = R$

непрерывность потока массы

$$S_1\,\rho_1 = S_2\,\rho_2 \tag{2.1}$$

непрерывность нормальной компоненты импульса

$$p_1 - p_2 = \Lambda R^{-3}\,\rho_1\,\varkappa_1\,(\varkappa_2 - \varkappa_1) \quad (|\,\Lambda\,| \ll R) \tag{2.2}$$

непрерывность касательной компонента импульса

$$\frac{\partial}{\partial r}\,(\psi_2 - \psi_1) = \frac{1}{R^3}\,\frac{\partial\Lambda}{\partial\varphi}\,(\varkappa_2 - \varkappa_1) \tag{2.3}$$

постоянство нормальной скорости распространения фронта относительного газа

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \frac{\varkappa_1}{R^2}\,\Lambda = \frac{1}{R}\,\frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial\varphi}\,(\psi_1 - \psi_2) = \frac{\Lambda}{R}\,(\varkappa_1 - \varkappa_2) \tag{2.4}$$

Здесь Λ — возмущение фронта.

Приведем линеаризованные условия сохранения на поверхности разрыва вихрей, а также условие непроницаемости этой поверхности для газа. Имеем при $r = D\,(t)$

непрерывность номальной компоненты импульса

$$p_2 - p_3 = 0 \tag{2.5}$$

непроницаемость поверхности разрыва вихрей

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\,(\psi_2 - \psi_3) = 0 \tag{2.6}$$

возможность разрыва тангенциальной компоненты скорости

$$\frac{\partial}{\partial r}\,(\psi_2 - \psi_3) = w\,(\varphi, t) \tag{2.7}$$

(с индексом 3 пишутся параметры продуктов сгорания в области $r \geqslant D$).

§ 3. Покажем, что радиальное поле сосредоточенного источника оказывает стабилизирующее влияние на фронт пламени. Для этого предположим, что тепловое расширение отсутствует, т. е. $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $S_1 = S_2 = S$. Тогда возмущение фронта пламени не будет вызывать возмущений скорости и давления.

Из первого уравнения (2.4) имеем уравнение для возмущения фронта

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \frac{\varkappa}{R^2} \Lambda = 0 \tag{3.1}$$

Отсюда видно, что фронт пламени абсолютно устойчив.

Покажем, что гидродинамическое поле сосредоточенного стока оказывает дестабилизирующее влияние на фронт. Действительно, положив $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $S_1 = S_2 = S$, аналогично вышеизложенному, получим уравнение

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t} - \frac{\varkappa}{R^2} \Lambda = 0$$

Таким образом, в этом случае фронт пламени абсолютно неустойчив. Если же $\rho_1 > \rho_2$, где ρ_2 — плотность продуктов сгорания, то дестабилизирующее влияние теплового расширения будет суммироваться с дестабилизирующим воздействием радиального поля скоростей невозмущенного пламени, что только усилит неустойчивость фронта.

§ 4. Разложим функции ψ, p, Λ, w, F в ряд Фурье по φ. Условия (2.2) — (2.7), преобразуются в условия для фурье-компонент (индекс k обозначает k-ю фурье-компоненту)

$$\begin{gathered} p_{1k} - p_{2k} = \frac{\Lambda_k}{R^3} \rho_1 \varkappa_1 (\varkappa_2 - \varkappa_1), \quad \frac{\partial}{\partial r} (\psi_{2k} - \psi_{1k}) = \frac{ik}{R^3} (\varkappa_2 - \varkappa_1), \\ \frac{\partial \Lambda_k}{\partial t} + \frac{\varkappa_1}{R^2} \Lambda_k = \frac{ik}{R} \psi_{1k} \\ ik (\psi_1 - \psi_2) = \frac{\Lambda_k}{R} (\varkappa_1 - \varkappa_2), \quad p_{2k} - p_{3k} = 0 \\ \psi_{2k} - \psi_{3k} = 0, \frac{\partial}{\partial r} (\psi_{2k} - \psi_{3k}) = w_k (t) \end{gathered} \tag{4.1}$$

Уравнения (1.6), (1.7) перейдут к уравнениям для фурье-компонент

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial t \, \partial r} + \frac{\varkappa}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\varkappa}{r^2} \frac{\partial \psi_k}{\partial r} = -\frac{ik}{\rho r} p_k \\ \frac{\partial^2 \psi_{1k}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{1k}}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2} \psi_{1k} = 0 \\ \frac{\partial^2 \psi_{2k}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{2k}}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2} \psi_{2k} = F_k \\ \frac{\partial^2 \psi_{3k}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{3k}}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2} \psi_{3k} = 0 \end{gathered} \tag{4.2}$$

Используя (4.1.2), (4.1.4), (4.2.1) — (4.2.3), преобразуем условие (4.1.1) к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial t \, \partial r} (\rho_1 \psi_{1k} - \rho_2 \psi_{2k}) = \frac{\rho_1 \varkappa_1}{R} F_k \left(t - \frac{R^2}{2\varkappa^2}\right) \tag{4.3}$$

Аналогично условие (4.1.5) преобразуется к виду

$$\varkappa_1 \rho_1 F_k \left(t - \frac{D^2}{2\varkappa_2}\right) = D \rho_2 \frac{dw_k}{dt} \tag{4.4}$$

Но $F_k (t - D^2 / 2\varkappa_2) = F_k (-R^2 / 2\varkappa_2) = 0$ в силу начального условия (1.8).

Таким образом, условие (4.1.5) эквивалентно условию

$$dw_k \,/\, dt = 0$$

Отсюда, $w_k \equiv 0$ согласно начальному условию (1.9). Итак, начальное условие (1.9) обеспечивает непрерывность тангенциальной компоненты скорости на поверхности $r = D\,(t)$. Условие (4.1.7) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial r}(\psi_{2k} - \psi_{3k}) = 0 \tag{4.5}$$

Заметим, что теперь условие (4.1.5) — следствие условия (4.5), поэтому при $r = D\,(t)$ достаточно требовать выполнения лишь соотношений (4.1.6) и (4.5).

§ 5. Случай $k = 0$, соответствующий одномерным возмущениям фронта, как нетрудно видеть, приводит к уравнению (3.1). Отсюда — устойчивость фронта для $k = 0$.

При $k = 1, 2, \ldots$ удобно перейти к безразмерным переменным по следующим формулам:

$$r = R + R\xi \,/\, k, \qquad t = R\tau \,/\, S_2 k, \qquad \rho_2 = \varepsilon\rho_1, \quad i\Lambda_k = R\vartheta\,(\tau)/k,$$

$$\psi_k = RS_2\omega\,(\tau, \xi)\,/\,k, \qquad RF_k = S_2\,k\,\theta\,(\tau - \xi - \xi^2\,/\,2k)$$

Условия (4.1.1) — (4.1.4), (4.1.6), (4.5) примут вид

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\tau}(\omega_1 - \varepsilon\omega_2) = \varepsilon\theta, \qquad \frac{\partial}{\partial\xi}(\omega_2 - \omega_1) = \vartheta\,(1 - \varepsilon)$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} + \frac{\varepsilon}{k}\,\vartheta + \omega_1 = 0, \quad \omega_1 - \omega_3 + \frac{1+\varepsilon}{k}\,\vartheta = 0 \quad (\xi = 0) \tag{5.1}$$

$$\omega_2 - \omega_3 = 0, \qquad \frac{d}{d\xi}(\omega_2 - \omega_3) = 0 \quad (\xi = k\,(\sqrt{1 + 2\tau/k} - 1) = d)$$

Из (4.2.2) — (4.2.4), переходя к безразмерным переменным, получим

$$\omega_1 = C_1\,(\tau)\,(1 + \xi\,/\,k)^k$$

$$\omega_2 = C_2\,(\tau)\,(1 + \xi\,/\,k)^{-k} + C_3\,(\tau)\,(1 + \xi\,/\,k)^k) + \tag{5.2}$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^\xi \theta\,(\eta, \tau)\left(1 + \frac{\eta}{\tau}\right)\left[\left(\frac{\xi + k}{\eta + k}\right)^k - \left(\frac{\xi + k}{\eta + k}\right)^{-k}\right]d\eta$$

$$\omega_3 = C_4(\tau)\,(1 + \xi\,/\,k)^{-k}$$

Здесь учтено условие $|\psi_1| < \infty$ при $r = 0$, $\psi_3 \to 0$ при $r \to \infty$.

Из системы уравнений (5.1) — (5.2) можно выделить систему уравнений для ϑ и θ

$$a\vartheta'' + b\vartheta' + \theta = 0, \quad 2\vartheta' + c\vartheta = \int\limits_0^\tau \theta\,(z)\left(1 + \frac{2}{k}\,(\tau - z)\right)^{-1/_2 k} dz \tag{5.3}$$

$$a = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}, \quad b = \frac{(1 - \varepsilon)\,(1 + k)}{k}, \quad k_0 = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}, \quad c = \frac{(1 - \varepsilon)\,(k_0 - k)}{k}$$

Рассмотрим случай $k \to \infty$, тогда $(1 + 2\,(\tau - z)\,/\,k)^{-1/_2 k} \to e^{z - \tau}$

Если при этом $Q \to \infty$, так что $Q\,/\,k < \infty$, то приходим к задаче об устойчивости плоского фронта пламени исследованной Л. Д. Ландау [1] методом волновых решений.

При $k \to \infty$ система (5.3) легко приводится к одному уравнению для ϑ

$$(1+\varepsilon)\,\vartheta'' + 2\varepsilon\vartheta' + \varepsilon(\varepsilon - 1)\ \vartheta = 0$$

Положим $\vartheta(0) = \vartheta_0$, тогда из (5.3.2) имеем $\vartheta'(0) = {}^1/_2\ \vartheta_0(1-\varepsilon)$. Отсюда видно, что плоский фронт пламени абсолютно неустойчив.

Отметим, что решение полученного уравнения асимптотически совпадает с решением, данным Л. Д. Ландау [1].

§ 6. Для дальнейшего исследования удобно преобразовать систему (5.3) к виду

$$\vartheta' = -\frac{\vartheta_0 c}{2}\exp\frac{-b\tau}{a} - \frac{1}{a}\int_0^\tau \theta(z)\exp\frac{-b(\tau-z)}{a}\,dz \tag{6.1}$$

$$\theta = A\theta \equiv \int_0^\tau \theta(z)\,G(\tau - z)\,dz + \frac{\vartheta_0 c\,(2b-ac)}{2(2+a)}\exp\frac{-b\tau}{a} \tag{6.2}$$

$$\vartheta_0 = \vartheta(0),\qquad G(z) = \frac{a}{a+2}\left(1+\frac{2}{k}z\right)^{-{}^1/_2 k-1} + \frac{2b-ac}{a(2+a)}\exp\frac{-bz}{a}$$

Отметим, что

$$2b - ac = (kk_0 - 1)\,/\,\varepsilon\, kk_0 \geqslant 0 \quad \text{при}\quad k \geqslant 1$$

Ниже будем считать $\vartheta_0 \geqslant 0$, что не уменьшает общности задачи.

Докажем, что $\vartheta' \geqslant 0$ при $k > k_0$ $(c < 0)$. Для этого, как видно из (6.1) достаточно показать, что $\theta \leqslant 0$. Рассмотрим множество функций $\{u(\tau)\}$ таких, что $-\Omega e^{\gamma\tau} \leqslant u(\tau) \leqslant 0$ (Ω, γ — положительные постоянные). Покажем, что для достаточно больших Ω и γ оператор A переводит это множество функций в себя. Для этого, как нетрудно убедиться, достаточно показать, что

$$\Omega e^{\gamma\tau}\left(\int_0^\tau G(z)\,e^{-\gamma z}\,dz - 1\right) - \frac{\vartheta_0 c\,(2b-ac)}{2(2+a)} \leqslant 0$$

Это неравенство заведомо справедливо для достаточно больших Ω и γ. Итак, $-\Omega e^{\gamma\tau} \leqslant Au \leqslant 0$, когда $-\Omega e^{\gamma\tau} \leqslant u \leqslant 0$. Отсюда, согласно теореме Лере — Шаудера [2], существует такое $\theta(\tau) \leqslant 0$, что $A\theta = \theta$.

Аналогично можно доказать, что $\vartheta' \leqslant 0$ при $k < k_0$ $(c > 0)$. В этом случае ищем θ среди множества функций $\{u(\tau)\}$ таких, что

$$0 \leqslant u(\tau) \leqslant \Omega \qquad (\Omega = \mathrm{const})$$

Для того чтобы оператор A перевел это множество в себя, достаточно потребовать выполнения неравенства

$$\Omega\left(\int_0^\tau G(z)\,dz - 1\right) + \frac{\vartheta_0 c\,(2b-ac)}{2(2+a)} \leqslant 0$$

что имеет место при достаточно больших Ω, так как

$$\int_0^\tau G(z)\,dz \leqslant 1 - \frac{ac}{b(2+a)} \leqslant 1$$

Заметим, что из вышеизложенного и из (5.3.2) непосредственно следует, что $\vartheta \geqslant 0$ при $k < k_0$.