УДК 539.3
DOI: 10.15372/PMTF202215136

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОМПОЗИТНОЙ БАЛКИ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО В ДВУХ НАПРАВЛЕНИЯХ МАТЕРИАЛА, АРМИРОВАННОЙ УГЛЕРОДНЫМИ НАНОТРУБКАМИ

М. Пан, С. М. Чжоу, Б. Л. Ху, Ю. Ц. Чзан

Колледж гражданского строительства и архитектуры Чжэцзянского университета,
Ханчжоу, Китай
E-mails: ppmmzju@163.com, simingzzz@zju.edu.cn, bilanhuzju@163.com, cyqzhang@zju.edu.cn

С использованием теории балки Тимошенко исследованы колебания композитной балки из функционально-градиентного в двух направлениях материала, армированного углеродными нанотрубками. Получено уравнение свободных колебаний композитной балки, в котором учитываются показатель градиентальности, распределение углеродных нанотрубок и их объемная доля. Для решения данного уравнения используется метод дифференциальных квадратур. Определены собственные частоты колебаний балки. Установлено, что собственная частота и формы колебаний балки зависят от показателя градиентальности, распределения нанотрубок и их объемной доли. Распределение нанотрубок по высоте балки и объемная доля нанотрубок оказывают незначительное влияние на формы колебаний композитной балки.

Ключевые слова: свободные колебания, функционально-градиентный в двух направлениях материал, балка Тимошенко, метод дифференциальных квадратур, углеродные нанотрубки

Введение. Поскольку углеродные нанотрубки (УНТ) обладают высокой прочностью, большим модулем упругости, эластичностью, низкой плотностью, их можно использовать в качестве армирующих компонентов в композитах. В последнее время большое внимание уделяется изучению композиционных материалов, армированных УНТ. В работе [1] исследовалось влияние размеров многостенных УНТ на механические и электрические свойства нанокомпозитов на основе эпоксидной смолы. В [2] изучено влияние ориентации и объемной доли УНТ на механические свойства композитов на основе полипропилена. Влияние добавок УНТ на упругие свойства композитов на текстильной основе исследовано в работе [3]. В [4] изучены механические свойства эпоксидной смолы, армированной стекловолокном и УНТ, при различной массовой доле УНТ.

Как правило, УНТ непрерывно распределяются по некоторому закону в матрице композитов. Композиты представляют собой матрицы, армированные УНТ.

В композитах, армированных УНТ по заданному закону, характеристики материала непрерывно изменяются по пространственным координатам. В таких композитах в отличие от традиционных отсутствует концентрация напряжений, что позволяет избежать растрескивания и расслоения конструкций, изготовленных из них. В некоторых отраслях промышленности, таких как аэрокосмическая промышленность, необходимы материалы, характеристики которых изменяются по пространственным координатам. В работах [5–11] изучены различные механические характеристики, в том числе способность к короблению, изгибу, а также линейные и нелинейные динамические реакции функционально-градиентных композитных балок, армированных УНТ. В [12] исследована нелинейная параметрическая динамика двунаправленных функционально-градиентных балок (ФГБ), характеристики которых изменяются по степенному закону как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях. В работе [13] изучены нелинейные свободные колебания ФГБ, армированных УНТ. Характеристики ФГБ, армированных УНТ и находящихся под действием движущейся нагрузки, исследованы в работе [14]. В [15] с использованием сдвиговых теорий высокого порядка выполнен численный анализ нелинейного динамического резонанса при воздействии гармонической поперечной нагрузки геометрически несовершенных ФГБ, армированных УНТ. В работе [16] исследованы линейные и нелинейные свободные колебания функционально-градиентных вращающихся композитных балок Тимошенко, армированных УНТ. В работе [17] проведен динамический анализ ФГБ, армированных УНТ и покоящихся на вязкоупругом основании, при импульсной нагрузке. В [18] исследованы прямая и обратная задачи о вынужденных антиплоских колебаниях поперечного неоднородного упругого слоя.

В настоящее время большая часть исследований ФГБ, армированных УНТ, посвящены балкам, армированным по высоте. Имеется небольшое количество исследований функционально-градиентных в двух направлениях балок, армированных УНТ.

В данной работе изучаются свободные колебания функционально-градиентных в двух направлениях балок, армированных УНТ. Исследуются три варианта расположения УНТ по высоте балки при экспоненциальном законе распределения УНТ по длине балки.

1. Функционально-градиентные в двух направлениях балки, армированные углеродными нанотрубками. Рассматриваются три типа распределения УНТ по высоте ФГБ: UD (однородная балка), X и O (рис. 1). Как известно, физические свойства УНТ и композитов, армированных УНТ, анизотропны. Эквивалентный модуль Юнга и эквивалентный модуль сдвига композита определяются следующим образом [19]:

$$E_{11} = \eta_1 V_{cnt} E_{11}^{cnt} + V_m E^m, \qquad \frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{cnt}}{E_{22}^{cnt}} + \frac{V_m}{E^m}, \qquad \frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{cnt}}{G_{12}^{cnt}} + \frac{V_m}{G^m}. \tag{1}$$

Здесь E_{11}^{cnt}, E_{22}^{cnt} — модули Юнга в направлениях осей x, z соответственно; G_{12}^{cnt} — модуль сдвига в плоскости (x, z); индекс 1 соответствует направлению оси x, индекс 2 — направлению оси z; E^m, G^m — модуль Юнга и модуль сдвига материала матрицы соответственно; η_k $(k = 1, 2, 3)$ — эквивалентные параметры углеродных нанотрубок; V_{cnt}, V_m — объемные доли УНТ и материала матрицы соответственно, причем $V_{cnt} + V_m = 1$.

Непрерывные функции, используемые для определения объемных долей материалов, задаются в следующем виде [14]:

— для UD-типа $V_{cnt} = V_{cnt}^*$;

— для X-типа $V_{cnt} = 4|z/h|V_{cnt}^*$;

— для O-типа $V_{cnt} = 2(1 - 2|z/h|)V_{cnt}^*$,

где

$$V_{cnt}^* = \frac{m_{cnt}}{m_{cnt} + (\rho^{cnt}/\rho^m)(1 - m_{cnt})},$$

m_{cnt} — массовая доля УНТ; ρ^{cnt}, ρ^m — плотности УНТ и материала матрицы соответственно.

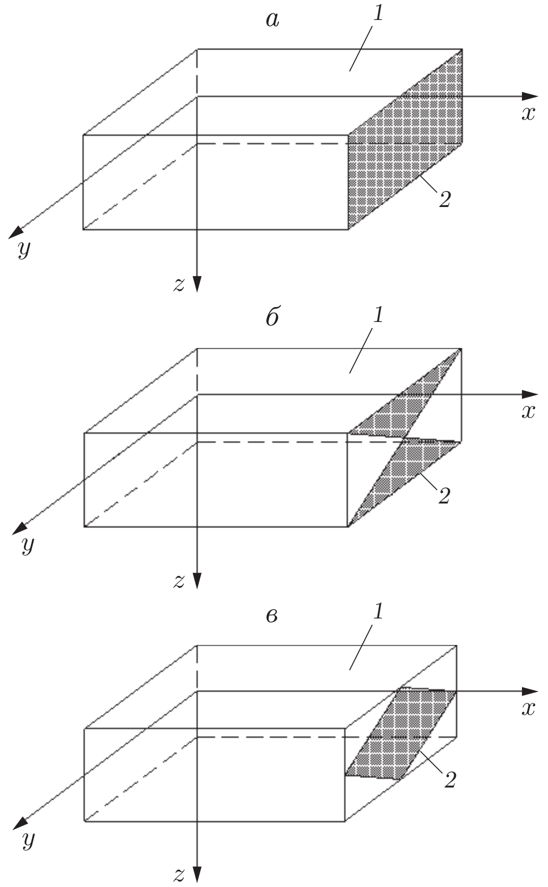

Рис. 1. Структура композита, армированного УНТ:
а — UD-тип, *б* — X-тип, *в* — O-тип; *1* — матрица, *2* — УНТ

Коэффициент Пуассона и плотность композита определяются следующим образом:

$$\nu = V_{cnt}\nu^{cnt} + V_m\nu^m, \qquad \rho = V_{cnt}\rho^{cnt} + V_m\rho^m$$

(ν^{cnt}, ν^m — коэффициенты Пуассона УНТ и материала матрицы соответственно).

Предполагается, что значения механических параметров балки распределены в направлении оси x по экспоненциальному закону:

$$E_{11} = \mathrm{e}^{\beta x}(\eta_1 V_{cnt}E_{11}^{cnt} + V_m E^m), \qquad E_{22} = \mathrm{e}^{\beta x}\,\eta_2/(V_{cnt}/E_{22}^{cnt} + V_m/E^m),$$

$$G_{12} = \mathrm{e}^{\beta x}\,\eta_3/(V_{cnt}/G_{12}^{cnt} + V_m/G^m), \qquad \rho = \mathrm{e}^{\beta x}(V_{cnt}\rho^{cnt} + V_m\rho^m).$$

Здесь β — показатель градиентальности характеристик материала балки в направлении оси x (рис. 2).

2. Основные уравнения задачи. Рассматривается балка, нагруженная динамической осевой силой $\hat{N}_{x0}(t)$ (рис. 3). Согласно теории балки Тимошенко перемещения любой точки балки $U(x,y,t)$ и $W(x,y,t)$ в направлениях осей балки x и z соответственно представляются в виде

$$U(x,z,t) = U_0(x,t) - z\varphi_0(x,t), \qquad W(x,z,t) = W_0(x,t), \qquad \varphi(x,z,t) = \varphi_0(x,t),$$

где $U_0(x,t)$, $W_0(x,t)$ — смещения точек нейтральной оси балки; $\varphi_0(x,t)$ — угол поворота поперечного сечения балки; t — время. Соотношения между смещениями и деформациями имеют вид

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_0(x,t)}{\partial x} - z\,\frac{\partial \varphi_0(x,t)}{\partial x}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial W_0(x,t)}{\partial x} - \varphi_0(x,t).$$

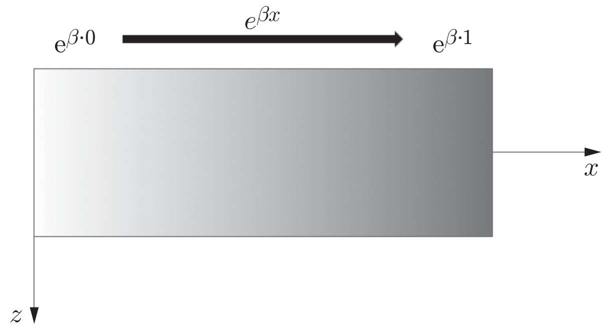

Рис. 2. Градиентальный закон распределения характеристик материала балки в продольном направлении

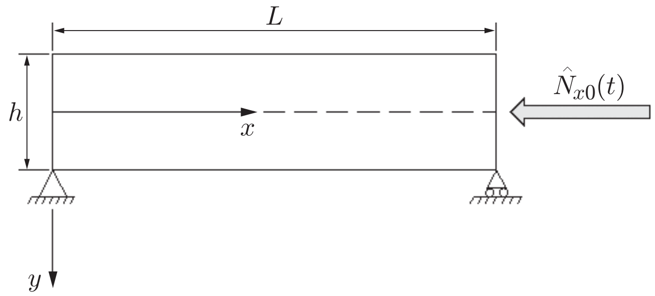

Рис. 3. Геометрия ФГБ, армированной УНТ и нагруженной осевой силой

Нормальное напряжение σ_{xx} и напряжение сдвига τ_{xz} вычисляются по формулам

$$\sigma_{xx} = Q_{11}(x,z)\Big(\frac{\partial U_0}{\partial x} - z\,\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\Big), \qquad \tau_{xz} = Q_{12}(x,z)\Big(\frac{\partial W_0}{\partial x} - \varphi_0\Big),$$

где

$$Q_{11}(x,z) = \frac{E_{11}(x,z)}{1-\nu^2}, \qquad Q_{12}(x,z) = G_{12}. \tag{2}$$

Подставляя (1) в (2), получаем

$$Q_{11}(x,z) = \frac{e^{\beta x}(\eta_1 V_{cnt} E_{11}^{cnt} + V_m E^m)}{1-(V_{cnt}\nu^{cnt} + V_m\nu^m)^2}, \qquad Q_{12}(x,z) = \frac{e^{\beta x}\,\eta_3}{V_{cnt}/G_{12}^{cnt} + V_m/G_m}.$$

Осевая сила N_x, изгибающий момент M_x и перерезывающая сила Q_x в любом сечении балки определяются по формулам

$$N_x = \int\limits_A \sigma_{xx}\,dA = e^{\beta x}\Big(A_{11}\,\frac{\partial U_0}{\partial x} - B_{11}\,\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\Big),$$

$$M_x = \int\limits_A \sigma_{xx} z\,dA = e^{\beta x}\Big(B_{11}\,\frac{\partial U_0}{\partial x} - D_{11}\,\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\Big),$$

$$Q_x = k\int\limits_A \tau_{xz}\,dA = e^{\beta x}\,A_{12}\Big(\frac{\partial W_0}{\partial x} - \varphi_0\Big),$$

где k — коэффициент корреляции сдвига,

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = \int\limits_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z)(1, z, z^2)\,dz, \qquad A_{12} = k\int\limits_{-h/2}^{h/2} Q_{12}(z)\,dz.$$

Уравнения движения балки выводятся с использованием принципа Гамильтона

$$\int (\delta T - \delta V + \delta W_{nc})\,dt = 0. \tag{3}$$

Кинетическая энергия T вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \mathrm{e}^{\beta x}\Big[I_1\Big(\frac{\partial U_0}{\partial t}\Big)^2 - 2I_2\Big(\frac{\partial U_0}{\partial t}\Big)\Big(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}\Big) + I_3\Big(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}\Big)^2 + I_1\Big(\frac{\partial W_0}{\partial t}\Big)^2\Big]\,dx,$$

где

$$(I_1, I_2, I_3) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)(1, z, z^2)\,dz.$$

Потенциальная энергия V и работа внешних сил W_{nc} определяются следующим образом:

$$V = \int_0^L \Big[N_x\,\frac{\partial U_0}{\partial x} + M_x\,\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + Q_x\Big(\frac{\partial W_0}{\partial x} - \varphi_0\Big)\Big]\,dx,$$

$$W_{nc} = \frac{1}{2}\int_0^L \Big[\hat{N}_{x0}\Big(\frac{\partial W_0}{\partial x}\Big)^2\Big]\,dx.$$

Вариации величин T, V, W_{nc} вычисляются по формулам

$$\delta T = \int_0^L \mathrm{e}^{\beta x}\Big[\Big(I_1\,\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}\Big)\,\delta U_0 - \Big(I_2\,\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2}\Big)\,\delta U_0 - \Big(I_2\,\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}\Big)\,\delta\varphi_0 + {}$$
$$+ \Big(I_3\,\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2}\Big)\,\delta\varphi_0 + \Big(I_1\,\frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2}\Big)\,\delta W_0\Big]\,dx,$$

$$\delta V = \int_0^L \Big[\Big(\frac{\partial N_x}{\partial x}\Big)\,\delta U_0 + \Big(\frac{\partial M_x}{\partial x}\Big)\,\delta\varphi_0 + \Big(\frac{\partial Q_x}{\partial x}\Big)\,\delta W_0 - Q_x\,\delta\varphi_0\Big]\,dx, \tag{4}$$

$$\delta W_{nc} = \int_0^L \Big[\Big(\hat{N}_{x0}\,\frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2}\Big)\,\delta W_0\Big]\,dx.$$

Подставляя выражения (4) в уравнение (3) и приравнивая к нулю коэффициенты при вариациях δU_0, δW_0 и $\delta\varphi_0$, получаем

$$\begin{gathered}\frac{\partial N_x}{\partial x} = \mathrm{e}^{\beta x}\Big(I_1\,\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} - I_2\,\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2}\Big),\\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \hat{N}_{x0}(t)\,\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} = \mathrm{e}^{\beta x}\Big(I_1\,\frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2}\Big),\\ \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = \mathrm{e}^{\beta x}\Big(I_3\,\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} - I_2\,\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}\Big).\end{gathered} \tag{5}$$

Подставляя выражения для N_x, Q_x, M_x в соотношения (5), находим

$$\beta\Big(A_{11}\,\frac{\partial U_0}{\partial x}-B_{11}\,\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\Big)+\Big(A_{11}\,\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2}-B_{11}\,\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}\Big)=I_1\,\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}-I_2\,\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2},$$

$$\beta\,\mathrm{e}^{\beta x}\,A_{12}\Big(\frac{\partial W_0}{\partial x}-\varphi_0\Big)+A_{12}\,\mathrm{e}^{\beta x}\,\Big(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2}-\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\Big)-\hat{N}_{x0}(t)\,\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2}=\mathrm{e}^{\beta x}\,I_1\,\frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2},$$

$$\beta\Big(B_{11}\,\frac{\partial U_0}{\partial x}-D_{11}\,\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\Big)+\Big(B_{11}\,\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2}-D_{11}\,\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}\Big)-A_{12}\Big(\frac{\partial W_0}{\partial x}-\varphi_0\Big)=I_3\,\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2}-I_2\,\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}.$$

При исследовании свободных колебаний балки осевую силу N_{x0} следует положить равной нулю. Уравнения свободных колебаний балки имеют вид

$$\begin{gathered}\alpha\Big(a_{11}\,\frac{\partial u}{\partial \zeta}-b_{11}\,\frac{\partial \phi}{\partial \zeta}\Big)+\Big(a_{11}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}-b_{11}\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2}\Big)=\bar{I}_1\,\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}-\bar{I}_2\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2},\\ \alpha a_{12}\Big(\frac{\partial w}{\partial \zeta}-\eta\phi\Big)+a_{12}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}-\eta\frac{\partial \phi}{\partial \zeta}\Big)=\bar{I}_1\,\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2},\\ \alpha\Big(b_{11}\,\frac{\partial u}{\partial \zeta}-d_{11}\,\frac{\partial \phi}{\partial \zeta}\Big)+\Big(b_{11}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}-d_{11}\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2}\Big)-\eta a_{12}\Big(\frac{\partial w}{\partial \zeta}-\eta\phi\Big)=\bar{I}_3\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2}-\bar{I}_2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2},\end{gathered}\tag{6}$$

где

$$\zeta=\frac{x}{L},\quad (u,w)=\frac{(U_0,W_0)}{h},\quad \phi=\varphi,\quad (\bar{I}_1,\bar{I}_2,\bar{I}_3)=\Big(\frac{I_1}{I_{10}},\frac{I_2}{I_{10}h},\frac{I_3}{I_{10}h^2}\Big),\quad \alpha=\beta l,\quad \eta=\frac{L}{h},$$

$$N_{x0}=\frac{\hat{N}_{x0}}{A_{110}},\quad (a_{11},a_{12},b_{11},d_{11})=\Big(\frac{A_{11}}{A_{110}},\frac{A_{12}}{A_{110}},\frac{B_{11}}{A_{110}h},\frac{D_{11}}{A_{110}h^2}\Big),\quad \tau=\frac{t}{L}\sqrt{\frac{A_{110}}{I_{10}}}\,,$$

A_{110}, I_{10} — значения величин A_{11} и I_1 для однородной балки соответственно.

В предположении, что левый торец балки жестко защемлен, а правый торец защемлен в подвижной опоре, краевые условия записываются в виде

$$x=0,\quad U=0,\quad W=0,\quad \varphi=0,\qquad x=L,\quad N_x=0,\quad W=0,\quad \varphi=0.$$

Следовательно, в безразмерных переменных эти условия имеют вид

$$\zeta=0,\quad u=0,\quad w=0,\quad \phi=0,\qquad \zeta=1,\quad a_{11}\,\frac{\partial u}{\partial \zeta}-b_{11}\,\frac{\partial \phi}{\partial \zeta}=0,\quad w=0,\quad \phi=0.$$

3. Последовательность решения уравнений задачи. В данной работе уравнения задачи решаются методом дифференциальных квадратур. Основная идея этого метода заключается в следующем. Пусть в интервале $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет m производных. Интервал $[a,b]$ можно разбить на $N-1$ интервалов N точками. Значения производных в каждой точке сетки можно заменить линейной аппроксимацией в виде взвешенной суммы значений производных в каждой точке сетки. В соответствии с методом дифференциальных квадратур производные по координате x от смещений k-го порядка представляются в виде [20]

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\,\{u,w,\phi\}\big|_{x=x_i}=\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(k)}\{u_j,w_j,\phi_j\},\qquad i,j=1,2,\dots,N,\tag{7}$$

где N — число узлов вдоль балки. Согласно работе [21] принимается следующий закон распределения узлов на интервале:

$$x_i=\frac{1}{2}\Big(1-\cos\frac{\pi(i-1)}{N-1}\Big),\qquad i=1,2,\dots,N.$$

Коэффициенты $C_{ij}^{(k)}$ в (7) вычисляются по формулам [22]

$$C_{ij}^{(1)} = \frac{\prod\limits_{k=1,k\ne i}^{N}(x_i - x_k)}{(x_i - x_j)\prod\limits_{k=1,k\ne j}^{N}(x_j - x_k)}, \qquad C_{ii}^{(1)} = -\sum_{j=1,j\ne i}^{N} C_{ij}^{(1)},$$

$$C_{ij}^{(n)} = n\Big(C_{ij}^{(1)}C_{ii}^{(n-1)} - \frac{C_{ij}^{(n-1)}}{x_i - x_j}\Big), \qquad C_{ii}^{(n)} = -\sum_{j=1,j\ne i}^{N} C_{ij}^{(n)}.$$

Производные от смещений записываются в матричной форме

$$\Big\{\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}\Big\} = [C^{(2)}]\{u\}, \qquad \Big\{\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta^2}\Big\} = [C^{(2)}]\{w\}, \qquad \Big\{\frac{\partial^2 \phi}{\partial\zeta^2}\Big\} = [C^{(2)}]\{\phi\},$$
$$\Big\{\frac{\partial u}{\partial\zeta}\Big\} = [C^{(1)}]\{u\}, \qquad \Big\{\frac{\partial w}{\partial\zeta}\Big\} = [C^{(1)}]\{w\}, \qquad \Big\{\frac{\partial \phi}{\partial\zeta}\Big\} = [C^{(1)}]\{\phi\}, \tag{8}$$

где

$$\Big\{\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}\Big\} = \left\{\begin{array}{c} \partial^2 u(x_1,t)/\partial\zeta^2 \\ \vdots \\ \partial^2 u(x_N,t)/\partial\zeta^2 \end{array}\right\},$$

$$[C^{(2)}] = \left[\begin{array}{ccc} C_{11}^{(2)} & \ldots & C_{1N}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1}^{(2)} & \ldots & C_{NN}^{(2)} \end{array}\right], \qquad [C^{(1)}] = \left[\begin{array}{ccc} C_{11}^{(1)} & \ldots & C_{1N}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1}^{(1)} & \ldots & C_{NN}^{(1)} \end{array}\right].$$

Подставляя соотношения (8) в уравнения (6), получаем

$$\begin{gathered}(\alpha a_{11}[C^{(1)}] + a_{11}[C^{(2)}])\{u\} - (\alpha b_{11}[C^{(1)}] + b_{11}[C^{(2)}])\{\phi\} = \bar I_1[E]\{\ddot u\} - \bar I_2[E]\{\ddot\phi\},\\ (\alpha a_{12}[C^{(2)}] + a_{12}[C^{(2)}])\{w\} - (\alpha\eta a_{12}[E] + \eta a_{12}[C^{(1)}])\{\phi\} = \bar I_1[E]\{\ddot w\},\\ (\alpha b_{11}[C^{(1)}] + b_{11}[C^{(2)}])\{u\} - \eta a_{12}[C^{(1)}]\{w\} + (\eta^2 a_{12}[E] - \alpha d_{11}[C^{(1)}] - d_{11}[C^{(2)}])\{\phi\} =\\ = \bar I_3[E]\{\ddot\phi\} - \bar I_2[E]\{\ddot u\},\end{gathered} \tag{9}$$

где $[E]$ — единичная матрица. Введем обозначение

$$\{d\} = \{\{u_i\}^{\text{т}}, \{w_i\}^{\text{т}}, \{\phi_i\}^{\text{т}}\}.$$

Тогда уравнения (9) можно записать в виде

$$[M]\{\ddot d\} + [K_e]\{d\} = 0, \tag{10}$$

где $[M]$ — матрица масс; $[K_e]$ — матрица жесткости. Матрицы $[M]$ и $[K_e]$ — матрицы размерности $3N \times 3N$.

При исследовании собственных колебаний осевая сила N_{x0} полагается равной нулю. Следовательно, вектор смещения можно представить в следующем виде:

$$\{d\} = \{d^*\}\,\mathrm{e}^{i\bar\omega\tau}, \qquad i = \sqrt{-1}. \tag{11}$$

Подставляя выражение (11) в (10), получаем уравнение

$$([K_e] - \bar\omega^2[M])\{d^*\} = 0,$$

Значения эффективных коэффициентов балки из функционально-градиентного материала

V_{cnt}^*	η_1	η_2	η_3
0,12	1,2833	1,0556	1,0556
0,17	1,3414	1,7101	1,7101
0,28	1,3238	1,7380	1,7380

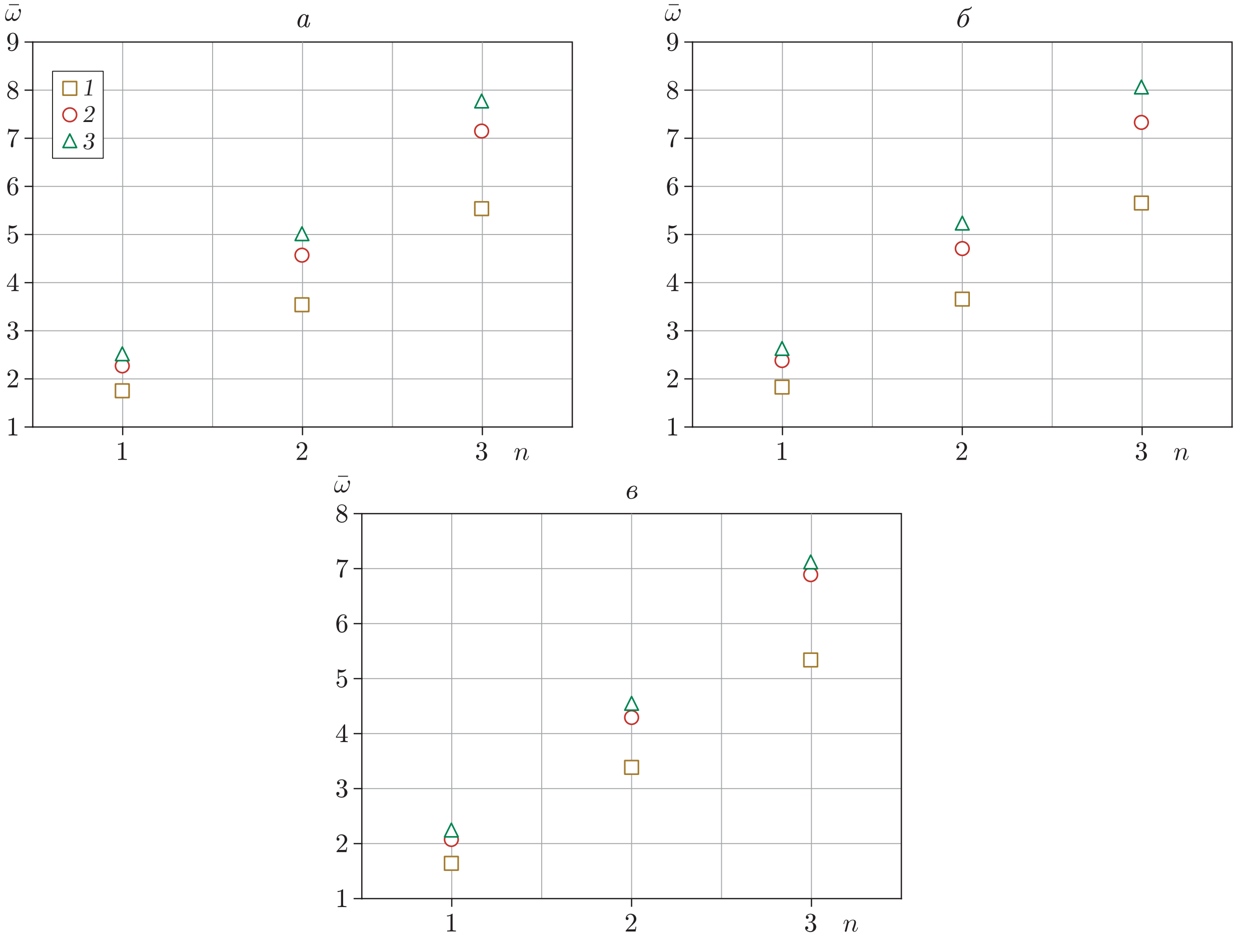

Рис. 4. Значения первых трех собственных частот колебаний ФГБ ($\alpha = 1$, $L/h = 10$):
а — балка типа UD, *б* — балка типа X, *в* — балка типа O; *1* — $V_{cnt}^* = 0{,}12$, *2* — $V_{cnt}^* = 0{,}17$, *3* — $V_{cnt}^* = 0{,}28$

где $\bar{\omega} = \omega l \sqrt{I_{10}/A_{110}}$ — безразмерная собственная частота балки, определяемая из равенства нулю определителя этого уравнения.

4. Результаты численного решения. В работе [21] вычислена критическая нагрузка, при которой происходит выпучивание балки из функционально-градиентного материала. Установлено, что при числе узлов, большем 10, критическая нагрузка не меняется. Поэтому в данной работе число узлов принято равным 10. С учетом результатов работы [22] в расчетах приняты значения эффективных коэффициентов балки, приведенные в таблице.

В качестве материала матрицы выбран полиметилметакрилат, имеющий следующие механические характеристики: коэффициент Пуассона $\nu^m = 0{,}3$, плотность $\rho^m = 1190$ кг/м^3, модуль упругости $E^m = 2{,}5$ ГПа, модуль сдвига $G_{12}^m = 0{,}96$ ГПа. Механические характеристики УНТ типа armchair (10,10) следующие: коэффициент Пуассона $\nu^{cnt} = 0{,}19$, плотность $\rho^{cnt} = 1400$ кг/м^3, модуль упругости в направлении оси x $E_{11}^{cnt} = 600$ ГПа, модуль упругости в направлении оси z $E_{22}^{cnt} = 10$ ГПа, модуль сдвига $G_{12}^{cnt} = 17{,}2$ ГПа, корреляционный коэффициент сдвига $k = 0{,}85$ [23]. Длина балки равна $L = 1$ м. Были вычислены собственные частоты колебаний ФГБ типов UD, V и O.

На рис. 4 представлены три собственные частоты колебаний балок с армированием различного типа при $\alpha = 1$, $L/h = 10$ (n — номер собственной частоты). С увеличением объемной доли УНТ собственные частоты балки возрастают. Как известно, факторами, влияющими на собственную частоту, являются жесткость и масса балки. Для системы с одной степенью свободы собственная частота равна $\omega = \sqrt{k/m}$. В случае системы с бесконечной степенью свободы соотношение между собственной частотой, жесткостью и объемной долей УНТ удовлетворяет аналогичному соотношению. Заметим, что масса балки увеличивается с увеличением объемной доли УНТ, но при этом жесткость балки увеличивается более существенно, чем ее масса. В результате собственные частоты возрастают.

На рис. 5 представлена зависимость первой собственной частоты колебаний от показателя градиентальности в продольном направлении для ФГБ различного типа с объемной долей УНТ, равной 0,12. При увеличении показателя градиентальности α собственные частоты увеличиваются, в то время как при увеличении отношения L/h они уменьшаются.

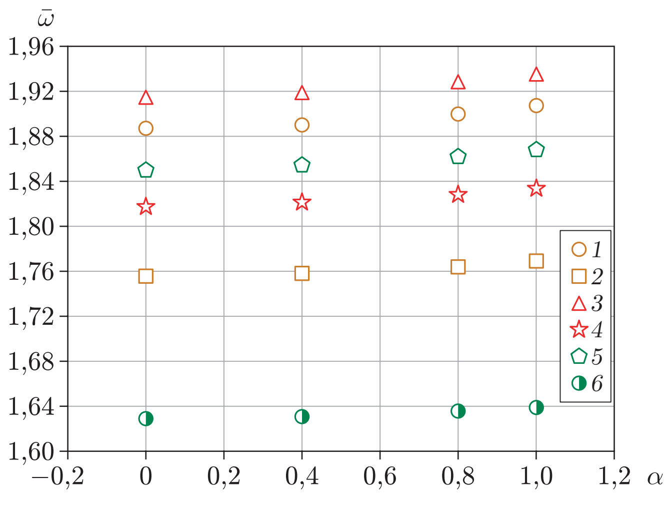

Рис. 5. Зависимость первой (основной) частоты колебаний ФГБ от показателя градиентальности характеристик материала балки в направлении оси x:
1, 2 — балка типа UD (*1* — $L/h = 5$, *2* — $L/h = 10$), *3, 4* — балка типа X (*3* — $L/h = 5$, *4* — $L/h = 10$), *5, 6* — балка типа O (*5* — $L/h = 5$, *6* — $L/h = 10$)

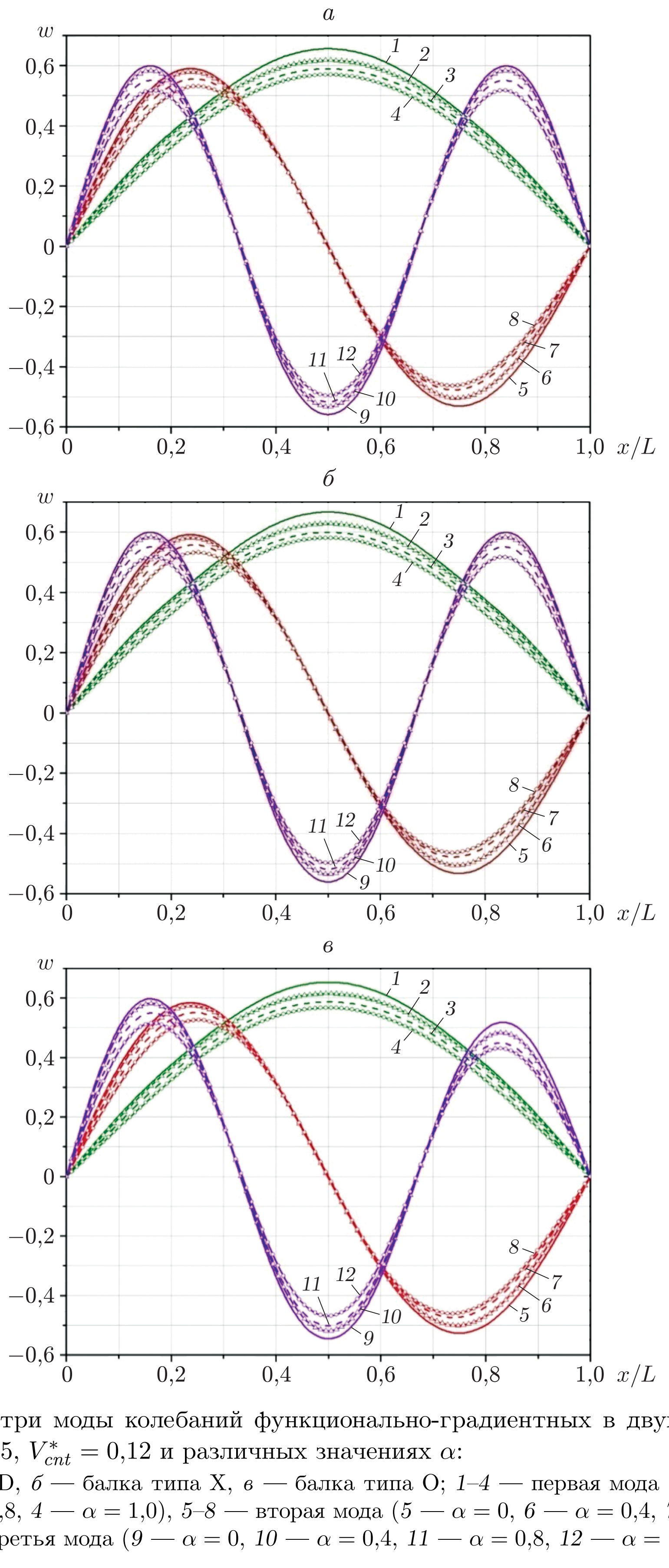

Рис. 6. Первые три моды колебаний функционально-градиентных в двух направлениях балок при $L/h = 5$, $V^*_{cnt} = 0{,}12$ и различных значениях α:
а — балка типа UD, *б* — балка типа X, *в* — балка типа O; *1–4* — первая мода (*1* — $\alpha = 0$, *2* — $\alpha = 0{,}4$, *3* — $\alpha = 0{,}8$, *4* — $\alpha = 1{,}0$), *5–8* — вторая мода (*5* — $\alpha = 0$, *6* — $\alpha = 0{,}4$, *7* — $\alpha = 0{,}8$, *8* — $\alpha = 1{,}0$), *9–12* — третья мода (*9* — $\alpha = 0$, *10* — $\alpha = 0{,}4$, *11* — $\alpha = 0{,}8$, *12* — $\alpha = 1{,}0$)

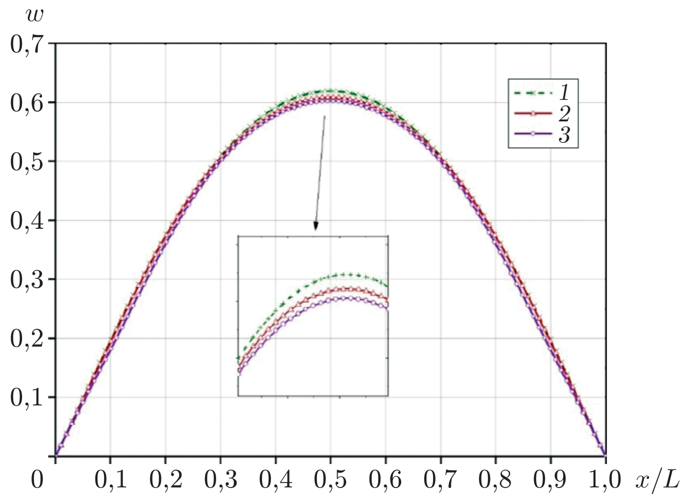

Рис. 7. Первая мода колебаний балки типа UD из функционально-градиентного в двух направлениях материала при различной объемной доле УНТ ($\alpha = 1$, $L/h = 10$):
1 — $V_{cnt}^* = 0{,}12$, *2* — $V_{cnt}^* = 0{,}17$, *3* — $V_{cnt}^* = 0{,}28$

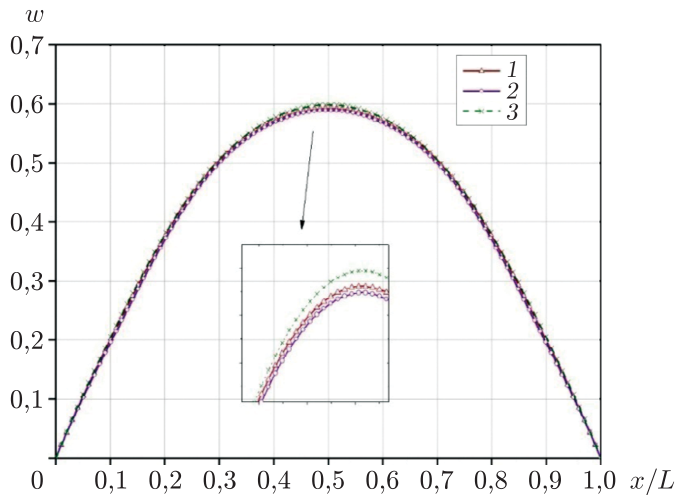

Рис. 8. Первая мода колебаний балки из функционально-градиентного в двух направлениях материала при различном распределении УНТ ($V_{cnt}^* = 0{,}28$, $\alpha = 1$, $L/h = 10$):
1 — балка типа UD, *2* — балка типа X, *3* — балка типа O

Собственные частоты балки типа X больше собственных частот балки типа UD, которые в свою очередь больше собственных частот балки типа O. При одной и той же объемной доле УНТ V_{cnt}^* для балок типов X и O требуется одинаковое количество УНТ. Основная частота колебаний балки типа X является наибольшей среди основных частот колебаний балок трех рассматриваемых типов, даже больше, чем у балки типа UD, для которой количество УНТ в два раза больше, чем у балки типа X. Поэтому, в случае если нужно увеличить основную частоту балки, с целью экономии можно использовать распределение УНТ типа X.

На рис. 6 приведены первые три моды колебаний функционально-градиентных в двух направлениях балок при $L/h = 5$ и различных значениях α. Видно, что амплитуда колебаний балки уменьшается с увеличением показателя градиентальности α. На рис. 7, 8 приведены формы колебаний балки при различных значениях объемной доли УНТ и различном распределении УНТ. Как объемная доля УНТ, так и тип их распределения практически не влияют на форму колебаний балки. Таким образом, показатель градиентальности α в направлении оси x оказывает более существенное влияние на амплитуду колебаний балки, чем объемная доля УНТ и тип их распределения в направлении оси z.

Заключение. На основе теории балки Тимошенко получено уравнение свободных колебаний балки из функционально-градиентного в двух направлениях материала. Уравнение свободных колебаний решено методом дифференциальных квадратур. С использованием численного моделирования исследованы первые три собственные частоты и соответствующие формы колебаний при различных значениях параметров задачи.

Установлено, что при увеличении объемной доли УНТ и показателя градиентальности α в продольном направлении собственная частота колебаний балки увеличивается, тогда как при увеличении отношения длины и ширины балки она уменьшается. Несмотря на то что в балках типов X и O объемная доля УНТ одна и та же, частоты колебаний этих балок различны. Основная частота колебаний балки в случае распределения УНТ X-типа больше, чем в случае распределений типов O и UD. Установлено, что показатель градиентальности в продольном направлении оказывает существенное влияние на формы колебаний балки, в то время как объемная доля УНТ и тип их распределения по высоте балки влияют незначительно. Амплитуда колебаний композитной балки увеличивается с уменьшением показателя градиентальности в продольном направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ayatollahi M. R., Shadlou S., Shokrieh M. M., Chitsazzadeh M.** Effect of multi-walled carbon nanotube aspect ratio on mechanical and electrical properties of epoxy-based nanocomposites // Polymer Testing. 2011. V. 30. P. 548–556.
2. **Huang J., Rodrigue D.** The effect of carbon nanotube orientation and content on the mechanical properties of polypropylene based composites // Materials Design. 2014. V. 55. P. 653–663.
3. **Tarfaoui M., Lafdi K., Moumen A. E.** Mechanical properties of carbon nanotubes based polymer composites // Composites. B. 2016. V. 103. P. 113–121.
4. **Patil A., Patel A., Sharma P. K.** Effect of carbon nanotube on mechanical properties of hybrid polymer matrix nano composites at different weight percentages // Materials Today. 2018. V. 5. P. 6401–6405.
5. **Lin F., Xiang Y.** Vibration of carbon nanotube-reinforced composite beams based on the first and third order beam theories // Appl. Math. Model. 2014. V. 38. P. 3741–3754.
6. **Shenas A. G., Malekzadeh P., Ziaee S.** Vibration analysis of pre-twisted functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams in thermal environment // Composite Structures. 2017. V. 162. P. 325–340.
7. **Wu Z. H., Zhang Y. M., Yao G., Yang Z.** Nonlinear primary and super-harmonic resonances of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams // Intern. J. Mech. Sci. 2019. V. 153/154. P. 321–340.
8. **Simsek M.** Bi-directional functionally graded materials (BDFGMs) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions // Composite Structures. 2015. V. 133. P. 968–978.
9. **Ninh V. T. A.** Fundamental frequencies of bidirectional functionally graded sandwich beams partially supported by foundation using different beam theories // Transport Comm. Sci. J. 2021. V. 72. P. 452–467.
10. **Nguyen D. K., Vu A. N. T., Pham V. N., Truong T. T.** Vibration of a three-phase bidirectional functionally graded sandwich beam carrying a moving mass using an enriched beam element // Engng Comput. 2021. V. 38. P. 4629–4650. DOI: 10.1007/s00366-021-01496-3.

11. **Attia M. A., Shanab R. A.** On the dynamic response of bi-directional functionally graded nanobeams under moving harmonic load accounting for surface effect // Acta Mech. 2022. V. 233. P. 3291–3317.
12. **Lu Y. X., Chen X. C.** Nonlinear parametric dynamics of bidirectional functionally graded beams // Shock Vibrat. 2020. V. 2020. ID 8840833. DOI: 10.1155/2020/8840833.
13. **Ke L. L., Yang J., Kitipornchai S.** Nonlinear free vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beam // Composite Structures. 2010. V. 92. P. 678–683.
14. **Yas M. H., Heshmati M.** Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite beams reinforced by randomly oriented carbon nanotube under the action of moving load // Appl. Math. Model. 2012. V. 36. P. 1371–1394.
15. **Gholami R., Ansariet R., Gholami Y.** Nonlinear resonant dynamics of geometrically imperfect higher-order shear deformable functionally graded carbon-nanotube-reinforced composite beams // Composite Structures. 2017. V. 174. P. 45–58.
16. **Heidari M., Arvin H.** Nonlinear free vibration analysis of functionally graded rotating composite Timoshenko beams reinforced by carbon nanotubes // J. Vibrat. Control. 2019. V. 25, N 14. P. 2063–2078.
17. **Kiarasi F., Asadi A., Babaei M., et al.** Dynamic analysis of functionally graded carbon nanotube (FGCNT) reinforced composite beam resting on viscoelastic foundation subjected to impulsive loading // J. Comput. Appl. Mech. 2022. V. 53, N 1. P. 1–22.
18. **Vatul'yan A. O., Uglich P. S.** Reconstruction of inhomogeneous characteristics of a transverse inhomogeneous layer in antiplane vibrations // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2014. V. 55, N 3. P. 499–505.
19. **Wattanasakulpong N., Ungbhakorn V.** Analytical solutions for bending, buckling and vibration responses of carbon nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundation // Comput. Materials Sci. 2013. V. 71. P. 201–208.
20. **Behnam G., Ebrahim N., Mehdi Z. S.** Bending, second-order and buckling analysis of non-prismatic beam-columns by differential quadrature method // Appl. Math. Model. 2018. V. 63. P. 362–373.
21. **Ke L. L., Yang J., Kitipornchai S., Xiang Y.** Flexural vibration and elastic buckling of a cracked Timoshenko beam made of functionally graded materials // Mech. Adv. Materials Structures. 2009. V. 16. P. 488–502.
22. **Shen H. S.** Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments // Composite Structures. 2017. V. 170. P. 80–90.
23. **Ke L. L., Yang J., Kitipornchai S.** Dynamic stability of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams // Mech. Adv. Materials Structures. 2013. V. 20. P. 28–37.

Поступила в редакцию 11/V 2022 г.,
после доработки — 5/V 2023 г.
Принята к публикации 29/V 2023 г.