

ω^* . Это означает, что все полученные в п. 1, 3 асимптотические представления при $T \rightarrow 0$ сохраняют свой характер и здесь. Они полностью совпадают, если положить $\omega^* = 1$. Существование интеграла (1.7) приводит к появлению фронта тепловой волны и, следовательно, к конечной скорости теплопереноса для рассматриваемого диффузионного приближения.

Заметим, что в случае численной реализации соотношение (4.3) дает возможность уточнять приближенное решение, полученное на основе (4.4).

В заключение автор благодарит К. Б. Павлова и Л. Д. Покровского за высказанные критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1966.
2. Зельдович Я. Б., Компанец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры.— Сб., посвященный семидесятилетию акад. А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950.
3. Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1958, т. 22, № 5.
4. Калашников А. С. О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением.— ЖВММФ, 1974, т. 14, № 4.
5. Унзольд А. Физика звездных атмосфер.— М.: ИЛ, 1949.
6. Справочник по специальным функциям/Под ред. А. Абрамовица, И. Стиган.— М.: Наука, 1979.
7. Красносельский М. А., Михлин С. Г. и др. Справочная математическая библиотека. Интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.
8. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений.— М.: ИЛ, 1961.
9. Думкина Г. В., Козманов М. Ю. Точное решение нелинейной системы уравнений энергии и нестационарного переноса излучения.— ЖВММФ, 1979, № 4.
10. Баренблатт Г. И., Вишик М. И. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа.— ПММ, 1956, т. 20, № 3.
11. Галактионов В. А., Курдюмов С. П. и др. О сравнении решений параболических уравнений.— ДАН СССР, 1979, т. 248, № 3.
12. Покровский Л. Д., Тараненко С. Н. Пространственная локализация решений нелинейных уравнений параболического типа.— Труды МВТУ, 1980, № 336.
13. Романов А. С. О сравнении решений нелинейного уравнения теплопроводности.— Дифференциальные уравнения, 1984. Деп. в ВИНТИ, № 4273—84.
14. Прокофьев В. А. К вопросу об учете излучения при одномерном стационарном движении одноатомного газа.— Учен. зап. МГУ. Механика, 1954, т. 5, вып. 172.
15. Самарский А. А., Соболев И. М. Примеры численного расчета температурных волн.— ЖВММФ, 1963, т. 3, № 4.
16. Павлов К. Б., Романов А. С. Об изменении области локализации возмущений в процессах нелинейного переноса.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 6.
17. Маслов В. П. Распространение ударных волн в изэнтропическом невязком газе.— В кн.: Современные проблемы математики. Итоги науки и техники. М.: ВИНТИ, 1977, т. 8.

Поступила 10/II 1985 г.

УДК 536.42

ОБ УПРАВЛЕНИИ ФОРМОЙ ФРОНТОВ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА В ПРОЦЕССЕ ЗОННОЙ ПЛАВКИ

О. М. Лаврентьева

(Новосибирск)

Для получения монокристаллов широко используется метод зонной плавки, при осуществлении которого длинный образец протягивается через нагреватель [1, 2]. В результате возникает зона расплава, заключенная между расходуемым стержнем из поликристаллического материала и образующимся монокристаллом. Варианты метода различаются по способу нагрева и охлаждения, а также по тому, заключен ли образец в тигель или нет. Качество получаемого кристалла зависит от формы возникающих поверхностей фазового перехода, которая определяется граничным режимом на поверхности слитка. Важное значение имеет задача определения гранично-

го режима, обеспечивающего заданную (оптимальную в смысле какого-либо критерия) форму этих поверхностей. Для многих веществ оптимальна с точки зрения качества получаемого монокристалла, по-видимому, плоская форма.

В данной работе рассматривается наиболее простая модель процесса зонной плавки в пренебрежении конвективным теплопереносом в жидкой фазе. Применение этой модели оправдано только в случае весьма медленного движения образца, когда наибольший интерес представляет изучение установившегося процесса. Предполагается, что размеры слитка, параметры переплавляемого вещества, скорость протяжки, ширина жидкой зоны и режим нагревания известны. Искомым является режим охлаждения, обеспечивающий плоскую форму фронтов плавления и кристаллизации.

1. Постановка задачи. Пусть слиток протягивается через нагреватель с постоянной скоростью v . Выберем декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) , связанную с нагревателем, такую, чтобы ось x_1 совпадала с направлением движения образца. Предположим, что известны условия теплообмена на границе области G' , неподвижной в этой системе координат. Стационарное в выбранной системе координат температурное поле $T'(x_1, x_2, x_3)$ и положение фронтов плавления Σ_1 и кристаллизации Σ_2 определяются из условий

$$(1.1) \quad \Delta T' + v\chi^{-1}(T') T'_{x_1} = 0 \text{ при } X \in G';$$

$$(1.2) \quad T' = T_0 \text{ при } X \in \Sigma'_1 \cup \Sigma'_2;$$

$$(1.3) \quad [\kappa(T') \partial T' / \partial n_{\Sigma'_i}] = \Lambda' v n_{\Sigma'_i} \text{ при } X \in \Sigma'_i, \quad i = 1, 2;$$

$$(1.4) \quad \Phi_i(\partial T' / \partial n_{\Gamma_i}, T', X) = f_i(X) \text{ при } X \in \Gamma_i.$$

Здесь T_0 — температура плавления; Λ' — скрытая теплота плавления; n_{Γ}, n_{Σ} — единичные векторы нормали к поверхностям Γ и Σ ; $\chi(T')$, $\kappa(T')$ — коэффициенты температуропроводности и теплопроводности, причем

$$\chi(T') = \begin{cases} \chi_1 & \text{при } T' > T_0, \\ \chi_2 & \text{при } T' < T_0, \end{cases} \quad \kappa(T') = \begin{cases} \kappa_1 & \text{при } T' > T_0, \\ \kappa_2 & \text{при } T' < T_0; \end{cases}$$

$X = (x_1, x_2, x_3)$, $\Phi_i(\partial T' / \partial n, T', X)$ — заданные функции, характеризующие тип теплообмена на границах слитка и зависящие от устройства нагревателя и от способа охлаждения кристалла; Φ_i могут быть различны на разных частях границы области G' . Обычно полагают, что Φ_i или линейны по первым аргументам, или имеют вид

$$(1.5) \quad \Phi = \partial T' / \partial n + \alpha T'^4 + g(X),$$

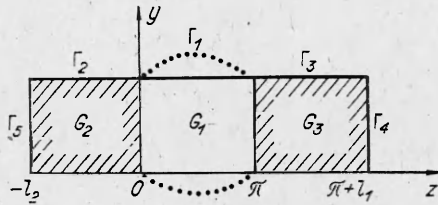
где α — известная величина; $g(X)$ — известная функция. Линейные условия (1.4) характерны для процессов переплавки в тигле, а (1.5) при подстановке в (1.4) дает условие излучения Стефана — Больцмана [1] и применяется при описании процессов бестигельной зонной плавки.

Задача нахождения $T'(X)$ и $f(X)$ на части границы области G' , удовлетворяющих (1.1)—(1.4), при заданных Σ_1, Σ_2 и $f(X)$ на оставшейся части границы относится к обратным задачам типа Стефана, или к задачам управления процессами кристаллизации [3]. Применительно к данной задаче эти термины равносильны. Ниже используется последний.

Задачам управления процессами кристаллизации посвящено значительное число работ. Обзор результатов и подробная библиография имеются в [3, 4]. Наиболее существенные успехи достигнуты в изучении нестационарной задачи с одной пространственной переменной. Плоская и осесимметричная задачи ранее решались приближенно. При этом в уравнении (1.1) пренебрегали членом $T'_{x_1 x_1}$ [1, 5] или $v T'_{x_1}$ [6].

В данной работе многомерная квазистационарная задача о зонной плавке решается в точной постановке для случая, когда Σ_1 и Σ_2 представляют собой плоскости, перпендикулярные оси x_1 .

Пусть Σ_1 — плоскость $x_1 = a$, Σ_2 — плоскость $x_1 = 0$. Поставим задачу управления, считая режим нагревания заданным, а охлаждения —



Р и с. 1

$l_1 > 0, l_2 > 0, \Omega$ — односвязная область на плоскости (y_1, y_2) . Область G разделена на 3 части: G_1, G_2, G_3 , а граница Γ области G — на 5 частей: $\Gamma_i, i = 1, \dots, 5$, как показано на рис. 1. Рассматривается задача

$$(1.6) \quad \Delta T + 2b_1 T_z = 0 \quad \text{при } x \in G_1;$$

$$(1.7) \quad \Delta T + 2b_2 T_z = 0 \quad \text{при } x \in G_2 \cup G_3;$$

$$(1.8) \quad T = 0 \quad \text{при } x \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2;$$

$$(1.9) \quad [k(z) T_z]_{\Sigma_i} = \Lambda \quad \text{при } x \in \Sigma_i, i = 1, 2.$$

Здесь $b_i = va/(2\pi\chi_i); \Lambda = \Lambda' T_0 \chi_1 / \kappa_1; \Sigma_1 = \{x : z = 0, y \in \Omega\}; \Sigma_2 = \{x : z = \pi, y \in \Omega\};$

$$k(z) = \begin{cases} k_1 = \pi\chi_1/(av) & \text{при } z \in (0, \pi), \\ k_2 = k_1\kappa_2/\kappa_1 & \text{при } z \in \overline{(0, \pi)}. \end{cases}$$

На границе Γ выполнены условия (1.4).

Заданными считаются функции $\Phi_i (i = 1, \dots, 5), f_1(x)$ и все числовые параметры, искомыми — $T(x), x \in G$ и $f_i(x)$ при $x \in \Gamma_i, i > 1$. Постановленная таким образом задача сводится к трем последовательно решаемым: краевой (1.6), (1.4), (1.8) в области G_1 и двум задачам Коши (1.7)—(1.9) в областях G_2 и G_3 . Краевые задачи типа (1.6), (1.4), (1.8) хорошо изучены, в [7] можно найти достаточные условия существования их гладких решений.

Задача Коши для эллиптических уравнений не является, вообще говоря, корректной, но, как будет показано ниже, если данные Коши имеют вид (1.8), (1.9), то она однозначно разрешима в цилиндрах G_2, G_3 и, если известно $T(x), x \in G_1$, ее решение строится в явном виде.

Заметим, что решение (1.6)—(1.9), (1.4) после перехода к физическим переменным дает решение исходной задачи Стефана (1.1)—(1.4) не всегда, а в том и только в том случае, когда выполнены неравенства

$$(1.10) \quad T > 0 \quad \text{при } x \in G_1, T < 0 \quad \text{при } x \in G_2 \cup G_3.$$

С другой стороны, любое решение задачи (1.1)—(1.4) с плоскими Σ'_1, Σ'_2 после перехода к безразмерным переменным удовлетворяет (1.6)—(1.10), поэтому нарушение неравенств (1.10) для решения задачи (1.6)—(1.9), (1.4) означает несуществование решения (1.1)—(1.4) с данными $f_1(x), a, v, l_1, l_2, \chi_1, \chi_2, \kappa_1, \kappa_2$ и плоскими Σ'_1 и Σ'_2 .

Основное содержание настоящей работы состоит в построении решения (1.6)—(1.9) и получении достаточных и необходимых условий выполнения (1.10), т. е. разрешимости исходной задачи управления. Эти условия имеют вид неравенств на геометрические характеристики слитка, теплофизические параметры переплавляемого вещества и характеристики нагревателя.

2. Решение вспомогательной задачи. Рассмотрим сначала задачу (1.6)—(1.9), (1.4), не заботясь о выполнении (1.10). Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть Φ_1, f_1 таковы, что существует единственное решение

$$T_1(x) \in C^{2+\alpha}(G_1) \cap C^1(\bar{G}_1)$$

задачи (1.6), (1.8), (1.4). Тогда найдутся

$$T_i(x) \in C^{2+\alpha}(G_i) \cap C^1(\bar{G}_i), \quad i = 2, 3,$$

удовлетворяющие в G_i уравнению (1.7), а на Σ_1 и Σ_2 — условиям (1.8)₂ (1.9). Функция $T(x)$, $x \in G$, такая, что $T = T_i(x)$ при $x \in G_i$ и

$$f_j(x) = \Phi_j(\partial T / \partial n_{\Gamma_j}, T, x), \quad x \in \Gamma_j \quad (j = 2, \dots, 5)$$

будут, очевидно, решением (1.6)—(1.9), (1.4), определенным в п. 1. При данных f_1 , Φ_1 решение (1.6)—(1.9), (1.4) единственно.

Замечание 1. Условия, обеспечивающие однозначную разрешимость задачи (1.6)—(1.9), (1.4), постулируемую в условии теоремы 1, даны в [7]. Они имеют вид требований гладкости f_1 и условий согласования (1.4) и (1.8).

Единственность решения следует из единственности решения краевой задачи в G_1 и задач Коши в G_2 и G_3 [8]. Существование доказывается ниже путем построения в явном виде функций T_2 и T_3 через известную функцию T_1 .

Доказательство. Найдём сначала решение (1.6)—(1.9), зависящее только от одной переменной z . Функция $T(z)$ должна удовлетворять уравнениям

$$T'' + 2b_1 T' = 0 \quad \text{при } z \in (0, \pi),$$

$$T'' + 2b_2 T' = 0 \quad \text{при } z \in (\pi, 2\pi),$$

и условиям

$$T(0) = T(2\pi) = 0,$$

$$k_1 T'(+0) - k_2 T'(-0) = k_2 T'(\pi + 0) - k_1 T'(\pi - 0) = \Lambda,$$

которые определяют функцию $T(z)$ единственным образом:

$$T = T^0(z) = \begin{cases} \Lambda [1 - \exp(-2b_2 z)] / (2b_2 k_2) & \text{при } z \leq 0, \\ 0 & \text{при } z \in (0, \pi), \\ \Lambda [1 - \exp(2b_2 \pi - 2b_2 z)] / (2b_2 k_2) & \text{при } z \geq \pi, \end{cases}$$

$T^0(z)$ не удовлетворяет (1.10) и соответствующая ей размерная функция не является, следовательно, решением (1.1)—(1.4).

Будем искать решение (1.6)—(1.9) в виде

$$T(x) = \begin{cases} T^0(z) + k_2^{-1} \exp(-b_2 z) u(x) & \text{при } z \leq 0, \\ k_1^{-1} \exp(-b_1 z) u(x) & \text{при } z \in (0, \pi), \\ T^0(z) + k_2^{-1} \exp(b_2 \pi - b_2 z) u(x) & \text{при } z \geq \pi, \end{cases}$$

где $u(x)$ есть решение задачи

$$(2.1) \quad \Delta u = b_1^2 u \quad \text{при } x \in G_1;$$

$$(2.2) \quad \Delta u = b_2^2 u \quad \text{при } x \in G_2 \cup G_3;$$

$$(2.3) \quad [u_z]_{z=0} = [u_z]_{z=\pi} = 0 \quad \text{при } y \in \Omega;$$

$$(2.4) \quad u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \quad \text{при } y \in \Omega;$$

$$(2.5) \quad F_1(\partial u / \partial n_{\Gamma_1}, u, x) = \Phi_1(k_1^{-1} \exp(-b_1 z) \partial u / \partial n_{\Gamma_1},$$

$$T^0(z) + k_1^{-1} \exp(-b_1 z) u, x) = f_1(x) \quad \text{при } x \in \Gamma_1.$$

Если Φ_1 , f_1 удовлетворяют условиям теоремы 1, то задача (2.1), (2.4),

(2.5) имеет в G_1 единственное решение $u_1(x) \in C^{2+\alpha}(G_1) \cap C^1(\bar{G}_1)$. Оно представимо в виде ряда Фурье

$$(2.6) \quad u_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(y) \sin nz \quad \text{при } x \in G_1,$$

где $\psi_n(y) = \pi^{-1} \int_0^{\pi} u_1(x) \sin nz \, dz$.

Заметим, что $\psi_n(y)$ удовлетворяет при $y \in \Omega$ уравнению

$$\Delta \psi_n = (l_1^2 + n^2) \psi_n.$$

Если Φ_1 линейна по первым двум аргументам, то задание $f_1(x)$ определяет для каждой из функций ψ_n граничные условия на $\partial\Omega$. Формула (2.6) дает в этом случае явное решение задачи (2.1), (2.4), (2.5) в G_1 .

Пусть $b_2^2 - b_1^2 < 1$, или в размерных переменных

$$(2.7) \quad \chi_2^2 - \chi_1^2 < 4\pi^2/(av)^2.$$

Доопределим u при $z < 0$ и $z > \pi$ следующим образом:

$$(2.8) \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} n (b_1^2 - b_2^2 + n^2)^{-1/2} \psi_n(y) \sin \left(\sqrt{(b_1^2 - b_2^2 + n^2)} z \right)$$

при $z < 0, y \in \Omega$;

$$(2.9) \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} n (b_1^2 - b_2^2 + n^2)^{-1/2} \psi_n(y) \times$$

$\times \sin \left[\sqrt{(b_1^2 - b_2^2 + n^2)} (\pi - z) \right]$ при $z > \pi, y \in \Omega$.

Сходимость рядов (2.8) и (2.9) в соответствующих пространствах следует из сходимости ряда (2.6). Равенства (2.3) и (2.4) выполняются почленно. Таким образом, теорема 1 доказана.

Замечание 2. Для большинства веществ $\chi_1 < \chi_2$ и неравенство (2.7) выполнено. Если же оно нарушено, то в рядах (2.8), (2.9) конечное число членов меняет вид. Именно, если $b_1^2 + n^2 < b_2^2$, $\sin \sqrt{(b_1^2 - b_2^2 + n^2)} z$ меняется на $\text{sh} \sqrt{(b_2^2 - b_1^2 - n^2)} z$, а если $b_1^2 + n^2 = b_2^2$, то на линейную функцию z . На сходимости рядов (2.8), (2.9) это никак не влияет, но качественные свойства решения могут при этом существенно измениться.

Замечание 3. Проведенное выше построение имеет смысл не только для цилиндрических областей G , но и когда $G_1 \supset (0, \pi) \times \Omega$, $G_2 \subset (-l_2, 0) \times \Omega$, $G_3 \subset (\pi, \pi + l_1) \times \Omega$. Пример области такого вида показан на рис. 1 пунктиром. Подобные области возникают при описании процессов бестигельной зонной плавки. Для них верна и теорема 1, причем если Γ_1 не имеет общих точек с $(0, \pi) \times \partial\Omega$, то в условии теоремы можно отказаться от требования $u_1 \in C^1(\bar{G}_1)$.

3. Точные решения. Единственность решения исходной задачи управления следует из теоремы 1. Для существования решения этой задачи необходимо и достаточно, чтобы решение вспомогательной задачи удовлетворяло неравенствам (1.10) или, что то же самое, решение задачи (2.1)–(2.5) удовлетворяло неравенствам

$$(3.1) \quad u > 0 \quad \text{при } x \in G_1;$$

$$(3.2) \quad b_2 u < +\Lambda \text{ sh}(b_2 z) = b_2 \varphi_2(z) \quad \text{при } x \in G_2;$$

$$(3.3) \quad b_2 u < \Lambda \text{ sh}(b_2 \pi - b_2 z) = b_2 \varphi_3(z) \quad \text{при } x \in G_3.$$

Построим пример точного решения задачи (2.1)–(2.4), удовлетворяющего (3.1)–(3.3). Пусть выполнено (2.7). Положим

$$u^1(x) = \begin{cases} \beta b^{-1} \psi_1(y) \sin bz & \text{при } z \leq 0, y \in \Omega, \\ \beta \sin z \psi_1(y) & \text{при } z \in (0, \pi), y \in \Omega, \\ \beta b^{-1} \psi_1(y) \sin b(\pi - z) & \text{при } z \geq \pi, y \in \Omega. \end{cases}$$

Здесь $b = (b_1^2 - b_2^2 + 1)^{1/2}$, а $\psi_1(y)$ есть решение задачи

$$\begin{aligned} \Delta \psi_1 &= (b_1^2 + 1) \psi_1 \text{ при } y \in \Omega, \\ \psi_1 &= a(y) \text{ при } y \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Заданная функция $a(y)$ такова, что $0 < a_0 \leq a(y) \leq 1$ при $y \in \partial\Omega$; $u^1(x)$ есть решение задачи (2.1)–(2.5), где условие (2.5) имеет вид

$$u(x) = \beta a(y) \sin z \text{ при } y \in \partial\Omega, z \in (0, \pi).$$

Величина β характеризует мощность нагревателя.

Из принципа максимума следует существование числа $\psi_m > 0$ такого, что $\psi_m \leq \psi_1(y) < 1$ при $y \in \Omega$. Если рассматривается плоская или осесимметричная задача (наиболее важные для приложений), то можно положить $a(y) = 1$ и найти явный вид $\psi_1(y)$. Так, в осесимметричном случае условию $\psi_1(\bar{r}) = 1$ удовлетворяет функция

$$\psi_1(r) = I_0(\sqrt{(b_1^2 + 1)r}) / I_0(\sqrt{(b_1^2 + 1)R}),$$

где I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента; $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$. Эта функция достигает своего минимального значения при $r = 0$,

$$\psi_m = 1/I_0(\sqrt{(b_1^2 + 1)R}).$$

Последняя формула иллюстрирует зависимость ψ_m от толщины слитка. Так,

$$\psi_m = o(\exp(-\sqrt{(b_1^2 + 1)R})) \text{ при } R \rightarrow \infty.$$

Очевидно, что при $\beta > 0$ функция $u^1(x)$ удовлетворяет (3.1), а при $\beta \leq 0$ — нет. Для любого решения задачи (2.1)–(2.4) вида $\varphi(z)\psi(y)$, кроме $u^1(x)$, неравенство (3.1) нарушено.

Для любой непрерывно дифференцируемой в G функции $u(x)$, удовлетворяющей условиям (2.4) и (3.1), необходимым условием выполнения (3.3) в некоторой правой окрестности Σ_1 является выполнение неравенства

$$(3.4) \quad \partial u / \partial z \leq -\Lambda = \varphi'_3(\pi) \text{ при } z = \pi - 0, y \in \Omega,$$

а достаточным — неравенства

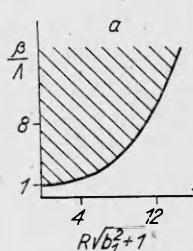
$$\partial u / \partial z \leq -(1 + \varepsilon)\Lambda \text{ при } z = \pi - 0, y \in \Omega$$

с $\varepsilon > 0$. В рассматриваемом частном случае (3.4) выполняется одновременно с

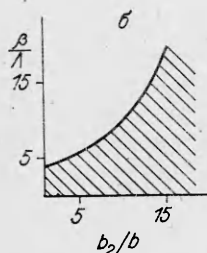
$$(3.5) \quad \beta > \Lambda \psi_m^{-1}.$$

Пусть $z_0 = \pi(1 + b^{-1})$. Очевидно, $T^0(z_0) > 0$, $u^1(z_0) = 0$ и неравенство (3.3) нарушено. Следовательно, $l_1 < l_1^0 < \pi/b$, где l_1^0 — наименьший положительный корень уравнения $\beta \psi_m \sin b(\pi + l_1^0) = b \varphi_3(l_1^0 + \pi)$. С другой стороны, $T^0(z) \leq 0$, $u^1(x) < 0$ при $-\pi/b < z < 0$, и (3.2) выполнено. Значит, решение задачи управления, соответствующее $u = u^1$, существует при всех $l_2 < \pi/b$.

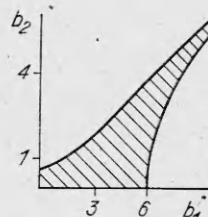
Поскольку $T^0(z) < 0$ и монотонно возрастает при $z < 0$, а u^1 таково, что при $z < 0$, $y \in \Omega$ $u^1(z, y) = -u^1(-2n\pi/b - \pi + z, y)$, $n = 0, 1, \dots$,



Р и с. 2



Р и с. 3



неравенство (3.2) может быть нарушено только при $z \in \left(-\frac{3\pi}{2b}, -\frac{\pi}{b}\right)$.
Если же

$$(3.6) \quad \beta < b\varphi_2(3\pi/2b) = \Lambda b b_2^{-1} \text{sh}(3\pi b_2/2b),$$

то (3.2) верно при всех $z < 0$ и l_2 может быть выбрано сколь угодно большим. В противном случае $l_2 < l_2^0$, где l_2^0 — наименьший положительный корень уравнения $b\varphi_2(l_2^0) = \beta \sin(bl_2^0)$. Из проведенных рассуждений следует, что $2\pi < 2bl_2^0 < 3\pi$.

Заметим, что условия (3.5) и (3.6) могут быть выполнены одновременно, только если ψ_m^{-1} достаточно мало:

$$(3.7) \quad \psi_m^{-1} \leq b \text{sh}(3\pi b_2/2b)/(2b_2).$$

На рис. 2, а, б заштрихована область значений параметров, удовлетворяющих неравенствам (3.5) и (3.6).

В осесимметричном случае, используя явный вид зависимости ψ_m от радиуса области и величины b_1 , можно записать (3.7) в виде

$$(3.8) \quad \frac{\pi R'}{a} = R < (b_1^2 + 1)^{-1/2} I_0^{-1} \left[\frac{b}{2b_2} \text{sh}\left(\frac{3\pi b_2}{2b}\right) \right] \equiv R_0(b_1, b_2),$$

где I_0^{-1} — функция, обратная к I_0 ; R' — радиус цилиндрического образца.

При моделировании процесса бестигельной зонной плавки желательное выполнение условия гидродинамической устойчивости жидкой зоны, которое для кругового цилиндра длины a и радиуса R' имеет вид [9]

$$(3.9) \quad 2\pi R'/a > 1.$$

Возникает вопрос, совместны ли условия (3.8) и (3.9). Легко показать, что (3.8) и (3.9) могут быть выполнены одновременно, если b_1 и b_2 достаточно малы. На рис. 3 заштрихована область на плоскости (b_1, b_2) , определяемая неравенствами

$$\sqrt{1 + b_1^2} > b_2 > 0, \quad 2R_0(b_1, b_2) > 1,$$

т. е. область значений b_1, b_2 , для которых существуют решения типа u^1 и неравенства (3.8) и (3.9) могут быть выполнены одновременно.

Если неравенство (2.7) нарушено, то решения задачи (2.1)–(2.4), имеющие при $x \in \bar{G}_1$ вид $\beta \sin z \psi_1(y)$, при $x \in G_2 \cup G_3$ или линейны по z (если $b_2^2 = b_1^2 + 1$), или пропорциональны $\text{sh } b'z$ (если $b_2^2 > b_1^2 + 1$, $b' = (b_2^2 - b_1^2 - 1)^{1/2}$). Если $\beta > 0$, то эти решения удовлетворяют (3.1) при $x \in G_1$ и (3.2) при всех $z < 0$, $y \in \Omega$. Для выполнения (3.3) в некоторой окрестности \bar{z}_1 достаточно выполнения (3.5). Поскольку $b' < b_2$, неравенство (3.3) нарушено при достаточно больших z . Поэтому l_2 можно выбирать сколь угодно большим, а $l_1 < l_1^0$, где l_1^0 — наименьший корень уравнения $\beta \psi_m \text{sh } b'l_1^0 = b'\varphi_3(l_1^0 + \pi)$, если $b_2^2 - b_1^2 > 1$, и уравнения $\beta \psi_m l_1^0 = b'\varphi_3(l_1^0 + \pi)$, если $b_2^2 = b_1^2 + 1$. Нетрудно видеть, что $l_1^0 \rightarrow \infty$

при $\beta \rightarrow \infty$. Поэтому можно добиться существования решения задачи при сколь угодно больших l_1 , выбирая достаточно большой мощность нагревателя.

Рассмотренный пример дает основание предположить, что случай $\chi_1 > \chi_2$ более благополучен с точки зрения получения качественных монокристаллов методом зонной плавки.

Решения вида $u^1(x)$ задачи (2.1)–(2.5) существуют при любых значениях b_1, b_2 , но требуют специального задания f_1 . Ниже рассматриваются точные решения (2.1)–(2.5) с произвольной f_1 , существующие при $b_1 = b_2$. Последнее верно, если $v = 0$ или $\chi_1 = \chi_2$.

Если $b_1 = b_2$, то из (2.8), (2.9) следует, что $u(x)$ есть 2π -периодическая, антисимметричная относительно плоскостей $z = 0$ и $z = \pi$ функция.

Если $v = 0$, то $b_1 = b_2 = 0$ и $T^0(z) = 0$. Поэтому если (3.1) верно при $x \in G_1$, то $T > 0$ — при $z \in (2\pi, 3\pi)$ и $z \in (-2\pi, -\pi)$. Следовательно, решение задачи управления существует при $l_1 \leq \pi, l_2 \leq \pi$ и не существует при нарушении хотя бы одного из этих условий.

Если $v \neq 0, b_1 = b_2$, то, повторяя рассуждения, проведенные выше для $u = u^1(x)$, легко показать, что решение задачи управления с $l_2 < \pi$ и $l_1 > 0$ существует, если выполнено (3.5). Можно указать достаточные условия существования решения с любым $l_1 \leq \pi$ и любым $l_2 > 0$ в виде неравенств для функции $f_1(x)$.

4. Решение задачи управления в общем случае. Выше на примере точных решений показано, что, хотя разрешимость задачи (2.1)–(2.5) вытекает из разрешимости краевой задачи (2.1), (2.3), (2.5) в G_1 , для существования решения задачи управления необходимо еще выполнение условий типа неравенств на величины $l_1, l_2, f_1(x)$. Ниже приводится обобщение этих результатов на случай произвольных значений b_1, b_2 и произвольных функций f_1 .

Пусть сначала на границе расплава задано распределение температур

$$u = \beta f_1(x) \text{ при } x \in \Gamma_1,$$

$$\beta > 0, f_1(0; y) = f_1(\pi, y) = 0 \text{ при } y \in \partial\Omega.$$

Из принципа максимума следует, что (3.1) выполняется одновременно с неравенством $f_1(x) \geq 0$ при $x \in \Gamma_1$. В силу непрерывной дифференцируемости функции $u(x)$ и непрерывности $T^0(z)$, а также неравенства $T^0(z) < 0$ при $z < 0$ выполнение (3.2) в некоторой окрестности Σ_2 вытекает из (3.1), а достаточным условием выполнения (3.3) в некоторой окрестности Σ_1 будет неравенство (3.4), для проверки которого в общем случае нужно решать краевую задачу в G_1 . Если область Ω имеет простую форму (например, круга), то задача решается в явном виде. Если же форма Ω более сложна или G_1 не есть цилиндр (см. замечание 3), то можно получить достаточные условия выполнения (3.4) в виде неравенств на β и $f_1(x)$. Рассмотрим для этого задачу Дирихле:

$$\Delta w = b_1^2 w \text{ при } x \in G_1,$$

$$w = \beta f_1 - \beta_0 \psi_1(y) \sin z \text{ при } x \in \Gamma_1,$$

$$w = 0 \text{ при } x \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2,$$

где β_0 удовлетворяет (3.5). Из принципа максимума следует, что если

$$(4.1) \quad \beta f_1(x) > \beta_0 a(y) \sin z,$$

то $w \geq 0$ при $x \in G_1$, и поэтому $w_z \leq 0$ при $z = \pi$. Полагая $w = u - u^1$, заключаем, что u удовлетворяет (3.4). Условие (4.1) не является необходимым, что демонстрирует пример функции

$$u^2(x) = \beta \psi_1(y) \sin z + \gamma \psi_2(y) \sin 2z.$$

Если f_1 удовлетворяет условиям теоремы 1 и, кроме того,

$$f_{1z}|_{z=0} > 0, f_{1z}|_{z=\pi} < 0, f_1(x) > 0 \text{ при } x \in \Gamma_1,$$

то выполнения (4.1) можно добиться, выбирая $\bar{\rho}$ достаточно большим. С другой стороны, если

$$(4.2) \quad \beta f_1(x) < \beta_1 a(y) \sin z_x$$

где $\bar{\rho}_1$ удовлетворяет (3.6), то l_2 может быть сколь угодно большим. Условия (4.1) и (4.2) могут быть выполнены одновременно, только если $\beta_1 > \beta_0$. Необходимые и достаточные условия выполнения последнего неравенства приведены в п. 3. Ниже в форме теоремы приводятся обобщения этих результатов на случай нелинейных граничных условий.

Теорема 2. Пусть $u^1(x)$, $x \in G_1$ — функция, определенная в п. 3, β удовлетворяет (3.5), тогда найдется $\delta > 0$ такое, что если функции Φ_1 , f_1 удовлетворяют условиям теоремы 1 и

$$\|F(\partial u^1 / \partial n_T, u^1, x) - f_1(x)\| < \delta,$$

то решение задачи (2.1)–(2.5) удовлетворяет (3.1) при $x \in G_1$, (3.2) при $x \in (-l_2^0/2, 0) \times \Omega$ и (3.3) при $x \in (\pi, \pi + l_1^0/2) \times \Omega$, где l_1^0 , l_2^0 определены в п. 3. Если β , кроме того, удовлетворяет (3.6) и δ достаточно мало, то (3.2) выполнено при всех $z < 0$, $y \in \Omega$

Утверждения теоремы 2 вытекают из непрерывной зависимости решения краевой задачи (2.1), (2.3), (2.5) от f_1 , представления решения при $z < 0$, $z > \pi$, $y \in \Omega$ в виде рядов (2.8), (2.9) и свойств функции $u^1(x)$, установленных в п. 3.

Замечание 4. Утверждения теоремы 2 остаются в силе, если в ее условии заменить $u^1(x)$ на любое другое точное решение (2.1)–(2.5), удовлетворяющее (3.1)–(3.3), например на $u^2(x)$ при подходящих β и γ .

Покажем теперь, что для любых значений $b_1 > b_2 > 0$ и любых функций f_1 , Φ_1 найдется l_1^0 такое, что при $l_1 > l_1^0$ решения рассматриваемой задачи не существует.

Действительно, в противном случае это решение было бы при $z > \pi$ представимо в виде $T = T^0(z) + k_2^{-1} \exp(b_2 z - b_2 \pi) u(x)$, где $u(x)$ удовлетворяет (3.3) при $z > \pi$, откуда

$$U(x) = b_2^{-2} \Lambda^{-1} \left| \int_{\pi}^z u(\zeta, y) d\zeta \right| > \operatorname{ch}(b_2 z - b_2 \pi) - 2.$$

С другой стороны, из представимости $u(x)$ в виде ряда (2.9) следует, что если $u_1 \in C^1(G_1)$, то U равномерно по z ограничено при $z > \pi$, $y \in \Omega$. Утверждение доказано. Оно остается в силе и в случае $b_2 < b_1$. При этом $U(x)$ может расти линейно или экспоненциально, но медленнее, чем $\exp(b_2 z)$. Поэтому (3.3) нарушено при достаточно больших z .

5. О других постановках задачи управления зонной плавкой. Выше рассматривался процесс теплопереноса в области, фиксированной в системе координат, связанной с нагревателем. В реальных же процессах образец имеет конечные размеры и в момент времени t занимает область $G_t = (-l_2' - vt, a + l_1' - vt) \times \Omega'$. Зона расплава ширины a , заключенная между твердыми стержнями, может существовать только конечное время $t_0 < l_1'/v$. Если $G_t \subset G$ при всех $t < t_0$, т. е. $l_1' < l_1^0 a/\pi$, $l_2' + vt_0 < l_2^0 a/\pi$, то построенное выше решение определено в области $\{(X, t) : t \in (0, t_0), X \in G_t\}$, но для его реализации нужно уметь поддерживать сложный существенно нелинейный режим охлаждения торцов слитка. Наиболее просто получить решения типа u^1 при линейных уравнениях на торцах. Для этого надо задать функции f_4, f_5 следующим образом:

$$f_i(x) = \psi_1(y) [\alpha \sin \pi(l_{i-3} - vt)/a + \beta \cos \pi(l_{i-3} - vt)/a]$$

при $X \in \Gamma_i$, $i = 4, 5$.

Выбор в качестве управляющей функции режима охлаждения затрудняет практическое использование полученных результатов. На практике легче управлять режимом нагрева. Охлаждение же обычно произ-

водится или путем излучения, или обдува газом, или с помощью струй жидкости. Из теоремы единственности рассмотренной задачи следует, что при произвольно заданном режиме охлаждения обеих частей кристалла нельзя, вообще говоря, путем подбора режима нагрева сделать плоскими фронты плавления и затвердевания. Можно задавать произвольным образом только режим охлаждения части кристалла или перед фронтом плавления, или за фронтом кристаллизации. Проблема обеспечения специального режима охлаждения другой части кристалла при этом остается. Заметим, что из результатов данной работы ясно, что если скорость движения образца отлична от нуля, то при задании одинакового режима охлаждения двух частей кристалла нельзя обеспечить плоские фронты фазовых переходов.

В п. 4 показано, что если $b_1 > b_2$, то решение задачи о зонной плавке с плоскими фронтами плавления и кристаллизации существует только при $l_1 < l_1^0$, причем во всех рассмотренных примерах $l_1^0 \leq \pi$, в то время как при проведении технологических процессов длина зоны расплава обычно много меньше длины слитка. Это ограничение возникло из требования продолжения решения за плоский фронт плавления. Отказ от этого требования не должен сильно ухудшить качество получаемого кристалла. Представляет поэтому интерес задача построения решений с достаточно узкой зоной расплава и плоским фронтом затвердевания, но искривленным фронтом плавления.

Пользуясь методами настоящей работы, можно построить также обширный класс точных существенно нестационарных решений о зонной плавке с плоскими фронтами фазовых переходов. Но эти решения требуют задания согласованных начальных данных в жидкой и твердой фазах.

В тех случаях, когда точных решений поставленной задачи не существует или соответствующие им режимы теплопереноса по каким-либо причинам неосуществимы, следует искать решения с формой фронтов, близкой к плоской, пользуясь методами теории оптимального управления. В [3, 4] этот подход применялся к задачам управления процессами кристаллизации, в которых управляемые функции не были связаны с формой фазового перехода.

Автор выражает благодарность В. В. Пухначеву за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рубинштейн Л. Н. Проблема Стефана.— Рига: Звайгзне, 1967.
2. Пфани В. Зонная плавка.— М.: Мир, 1970.
3. Hoffmann K. H., Niezgodka M. Control of parabolic systems, involving free boundaries.— In: Free Boundary Problems. Theory and Applications. Boston, 1983.— (Res. Notes in Math.; v. 179, pt II).
4. Pawlow I. Optimal control of nonlinear evolutionary problems with applications to processes, involving free boundaries.— In: Constructive Aspects of Optimization. Warszawa, 1985.
5. Гольдман Н. Л., Успенский А. Б. и др. Численный метод определения граничного режима на поверхности непрерывного слитка по профилю фронта затвердевания.— ИФЖ, 1974, т. 27, № 4.
6. Сигел Р. Решение методом Коши задачи о границе затвердевания при непрерывной разливке стали.— Теплопередача, 1983, т. 105, № 3.
7. Ладыженская О. А., Уральцева Н. П. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М.: Наука, 1973.
8. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения.— М.: Мир, 1970.

Поступила 26/XI 1985 г.