

УДК 539.214+539.374

## ОДНОМЕРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ РАЗГРУЗКИ С ДВИЖУЩЕЙСЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Е. А. Герасименко, Л. В. Ковтанюк, А. А. Буренин<sup>\*,\*\*</sup>

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,  
690041 Владивосток, Россия

\* Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН,  
681005 Комсомольск-на-Амуре, Россия

\*\* Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет,  
681013 Комсомольск-на-Амуре, Россия

E-mails: gerasimenko@iacp.dvo.ru, lk@iacp.dvo.ru, mail@imim.ru

Рассмотрена одномерная динамическая задача теории больших упругопластических деформаций о взаимодействии волны разгрузки с упругопластической границей. Показано, что до момента возникновения волны разгрузки упруговязкопластический материал, заполняющий круглую трубу, под действием растущего перепада давления квазистатически деформируется, удерживаясь в трубе за счет трения о ее стенку, при этом образуются пристенное вязкопластическое течение и упругое ядро. Волна разгрузки инициируется в момент начала проскальзывания материала на внутренней стенке трубы. Проведены расчеты с использованием лучевого метода построения приближенных решений за поверхностями сильных разрывов, получены лучевые разложения решений за возникающими цилиндрическими поверхностями разрывов.

Ключевые слова: большие деформации, упругость, вязкость, пластичность, ударная волна, волна разгрузки.

DOI: 10.15372/PMTF20180215

**Введение.** Исследованию динамики упругопластических сред посвящено большое количество работ. Хорошо изучены свойства поверхностей разрывов [1–5] и разработаны численные методы решения динамических задач упругопластического деформирования [6–9]. Среди приближенных аналитических методов исследования динамики деформирования и особенностей распространения граничных возмущений в деформируемых телах следует отметить лучевой метод [10, 11], позволяющий построить разложение решения за поверхностями разрывов в форме степенных рядов по времени [10] или лучевой координате [11]. Для таких построений необходимы рекуррентные зависимости, связывающие разрывы функций и их производных на движущихся в среде поверхностях разрывов. Формулировка таких ограничений, называемых геометрическими и кинематическими условиями совместности разрывов, рассматривалась в работах [12–15]. Обзор работ, посвященных исследованию лучевого метода приближенного решения динамических задач,

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-01-00038).

© Герасименко Е. А., Ковтанюк Л. В., Буренин А. А., 2018

приведен в [16]. В случае наличия ударных волн данный метод рассматривался в работах [17, 18]. В [19, 20] лучевые прифронтовые асимптотики использовались для выявления разрывов. Отметим также работу [21], в которой решена динамическая задача о разгрузке упруговязкопластической среды при аналогичных граничных условиях, но для случая плоской волны разгрузки.

В данной работе рассматривается одномерная динамическая задача теории больших упругопластических деформаций о взаимодействии волны разгрузки с упругопластической границей.

**1. Модельные соотношения.** При описании движения точек среды используется способ Эйлера:  $a^i = a^i(x^1, x^2, x^3, t)$ . Здесь  $x^i$  — пространственные криволинейные координаты;  $a^i$  — материальные координаты точки деформируемой среды. Согласно [22] ковариантные компоненты обратимой (упругой)  $e_{ij}$  и необратимой (пластической)  $p_{ij}$  составляющих тензора деформаций Альманси  $d_{ij}$  определяются дифференциальными уравнениями изменения (переноса) в форме

$$\begin{aligned} \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2} [(\varepsilon_{im} - \varepsilon_{im}^p + z_{im})e_j^m + e_i^m(\varepsilon_{mj} - \varepsilon_{mj}^p - z_{mj})], \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij}^p - p_i^m \varepsilon_{mj}^p - \varepsilon_{mi}^p p_j^m, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{im}n_j^m + n_i^m r_{mj}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{v_{i,j} + v_{j,i}}{2}, \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}v^j, \\ z_{ij} &= A^{-1}[(\varepsilon_i^m e_{mj} - e_i^m \varepsilon_{mj})B^2 + B(\varepsilon_i^m e_{mn}e_j^n - e_i^m e_{mn}\varepsilon_j^n) + e_i^m \varepsilon_m^n e_n^k e_{kj} - e_i^m e_m^n \varepsilon_n^k e_{kj}], \\ A &= 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - E_1^3/3 + E_3/3, \quad B = 2 - E_1, \\ E_1 &= e_k^k, \quad E_2 = e_j^i e_i^j, \quad E_3 = e_j^i e_k^j e_i^k, \quad r_{ij} = \omega_{ij} + z_{ij}, \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $u_i, v_i$  — ковариантные компоненты векторов перемещения и скорости точек среды;  $D/Dt$  — объективная производная по времени, записанная для произвольного тензора  $n_{ij}$ ;  $\varepsilon_{ij}^p$  — ковариантные компоненты тензора скоростей пластических деформаций (источниковый член в уравнении переноса для тензора необратимых деформаций); индекс после запятой соответствует ковариантной производной по пространственной координате. Заметим, что в случае равенства нулю нелинейной составляющей  $z_{ij}$  тензора вращений  $r_{ij}$  производная  $D/Dt$  переходит в производную Яумана. Согласно уравнениям (1.1) в условиях разгрузки ( $\varepsilon_{ij}^p = 0$ ) компоненты тензора необратимых деформаций изменяются так же, как при жестком перемещении тела. Из (1.1) следует представление тензора полных деформаций Альманси  $d_{ij}$  через его составляющие  $e_{ij}$  и  $p_{ij}$

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - e_{in}e_j^n/2 - e_{in}p_j^n - p_{in}e_j^n + e_{in}p_m^n e_j^m.$$

Напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями и согласно законам термодинамики в случае несжимаемой среды связаны с ними зависимостями (аналоги формулы Мурнагана)

$$\sigma_j^i = \begin{cases} -p\delta_j^i + \frac{\partial W}{\partial d_i^k} (\delta_j^k - 2d_j^k), & p_{ij} \equiv 0, \\ -p_1\delta_j^i + \frac{\partial W}{\partial e_i^k} (\delta_j^k - e_j^k), & p_{ij} \neq 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

где  $p, p_1$  — добавочные гидростатические давления;  $W$  — упругий потенциал. Полагая среду изотропной, упругий потенциал  $W$  представим в виде [22, 23]

$$W = -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b - \mu)J_1J_2 - \chi J_1^3 + \dots, \quad (1.3)$$

$$J_k = \begin{cases} L_k, & p_{ij} \equiv 0, \\ I_k, & p_{ij} \neq 0, \end{cases}$$

$$L_1 = d_k^k, \quad L_2 = d_k^i d_i^k, \quad I_1 = e_k^k - \frac{1}{2} e_j^i e_i^j, \quad I_2 = e_k^i e_i^k - e_j^i e_k^j e_i^k + \frac{1}{4} e_j^i e_k^j e_l^k e_l^i$$

( $\mu, b, \chi$  — упругие постоянные среды). Выбор инвариантов  $I_1, I_2$  тензора обратимых деформаций в виде (1.3) обеспечивает предельный переход от второй зависимости в (1.2) к первой при стремлении необратимых деформаций к нулю.

Будем полагать, что необратимые деформации в материале накапливаются при достижении напряженным состоянием поверхности нагружения, которая в силу принципа максимума Мизеса является пластическим потенциалом. В качестве такой поверхности будем использовать условие пластичности Треска, обобщенное на случай деформирования с учетом вязких свойств среды при ее пластическом течении [24], в виде

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max |\varepsilon_k^p|, \quad (1.4)$$

где  $k$  — предел текучести;  $\eta$  — вязкость;  $\sigma_i$  — компоненты главных напряжений;  $\varepsilon_k^p$  — главные значения тензора скоростей пластических деформаций. Скорости необратимых деформаций связаны с напряжениями ассоциированным законом пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma^{ij}}, \quad f(\sigma^{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = k, \quad \lambda > 0. \quad (1.5)$$

Под поверхностью сильного разрыва  $\Sigma(t)$  понимается предельный слой толщиной  $\Delta S$  при  $\Delta S \rightarrow 0$ , в котором скорости и напряжения изменяются от значений  $v_i^+, \sigma_{ij}^+$  до значений  $v_i^-, \sigma_{ij}^-$  монотонно и непрерывно [2–5]. Пластические деформации должны быть непрерывны на поверхности разрыва  $\Sigma$ , так как в противном случае скорости деформации неограниченно возрастают внутри слоя при  $\Delta S \rightarrow 0$  и в силу условия пластичности (1.4) неограниченно увеличивается тензор напряжений. Однако напряжения внутри слоя должны быть конечны. На поверхностях сильного разрыва дифференциальные законы сохранения не выполняются, но остаются в силе интегральные законы сохранения массы, импульса и энергии, которые принимают вид динамических условий совместности

$$\begin{aligned} [\rho(v^i \nu_i - G)] &= 0, & [\sigma^{ij}] \nu_j &= \rho^+(v^{j+} \nu_j - G)[v^i], \\ \sigma^{ij+} [v_i] \nu_j &= \rho^+(v^{j+} \nu_j - G)([v_i][v^i]/2 - [e]) - [q^j] \nu_j. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь  $\nu_i$  — ковариантные компоненты единичной нормали к поверхности разрывов  $\Sigma$ , направление которой совпадает с направлением движения  $\Sigma$ ;  $G$  — скорость движения  $\Sigma$  в направлении нормали;  $q^j$  — контравариантные компоненты вектора теплового потока;  $e$  — плотность внутренней энергии; квадратные скобки обозначают скачок соответствующей величины на  $\Sigma$ . Разрывы функций на  $\Sigma$  связаны соотношениями (1.6), а также геометрическими и кинематическими условиями совместности

$$\begin{aligned} [f, i] &= \left[ \frac{\partial f}{\partial \nu} \right] \nu_i + a^{\alpha\beta} [f]_{, \beta} x_{j, \alpha}, & x_{j, \alpha} &= g_{jk} x_{\alpha}^k, & \alpha &= 1, 2, & \beta &= 1, 2, \\ [f] &= \frac{\delta [f]}{\delta t} - \left[ \frac{\partial f}{\partial \nu} \right] G, & \frac{\partial f}{\partial \nu} &= f, i \nu^i, & \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial t}, & [f, i] &= f, i^+ - f, i^-, \\ \left[ \frac{\partial f}{\partial \nu} \right] &= \frac{\partial f^+}{\partial \nu} - \frac{\partial f^-}{\partial \nu}, & [f, \alpha] &= (f^+ - f^-)_{, \alpha} = [f]_{, \alpha}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

а разрывы их производных  $k$ -го порядка — рекуррентными соотношениями [14, 15]. В (1.7)  $g_{ij}$ ,  $a^{\alpha\beta}$  — компоненты пространственной и поверхностной метрик; векторы с координатами  $\partial x^i / \partial y^\alpha = x_\alpha^i$  являются векторами, касательными к поверхности  $\Sigma$ ;  $\delta / \delta t$  — операция дифференцирования по времени в данной точке  $\Sigma(t)$  (дельта-производная) [13].

**2. Упругое деформирование.** Полагаем, что цилиндрическая труба с круговым сечением радиусом  $R$  и бесконечными образующими заполнена несжимаемым упруговязкопластическим материалом, свойства которого описаны выше. Стенки трубы считаем недеформируемыми. Деформирование материала и его движение по трубе обусловлены воздействием увеличивающегося со временем перепада давления:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\psi(t), \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(t) = \alpha t \quad (\alpha = \text{const}). \quad (2.1)$$

Полагаем, что деформирование начинается из свободного состояния и сначала является обратимым. Вследствие осевой симметрии задачи будем использовать цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ . В рассматриваемом случае отличными от нуля являются осевое перемещение  $u = u_z(r, t)$  и компоненты тензора деформаций

$$d_{rr} = -u_{,r}^2 / 2, \quad d_{rz} = u_{,r} / 2.$$

Компоненты тензора напряжений найдем из (1.2) при  $p_{ij} = 0$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} &= -s(z, r, t) - (b - \mu)u_{,r}^2 / 2 = -p(z, t), \\ \sigma_{zz} &= -p(z, t) + \mu u_{,r}^2, \quad \sigma_{rz} = \mu u_{,r}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $s(z, r, t)$  — неизвестная функция добавочного гидростатического давления. В соотношении (2.2) содержатся слагаемые до второго порядка включительно относительно величины  $u_{,r}$ . Таким образом, обратимые деформации полагаются малыми, учитываются только старшие нелинейные слагаемые в зависимостях напряжений от обратимых деформаций. Для упругопластических материалов такое ограничение является естественным.

Считаем, что, до тех пор пока среда удерживается в трубе за счет сухого трения, определяемого условием

$$|\sigma_{rz}|_{r=R} < f_0 \quad (f_0 = \text{const}, \quad f_0 > k), \quad (2.3)$$

на стенках трубы выполняется условие жесткого сцепления

$$u(R, t) = 0, \quad v(R, t) = 0. \quad (2.4)$$

На этом этапе движения силами инерции можно пренебречь, полагая скорости процесса деформирования и течения достаточно малыми (квазистатическое приближение). Тогда из уравнений равновесия следует, что среди диагональных компонент тензора напряжений только  $\sigma_{zz}$  зависит от  $r$ , а  $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -p(z, t)$  от  $r$  не зависят.

Интегрируя уравнение равновесия с учетом (2.1), (2.4), получаем распределения напряжений и перемещений в цилиндрическом слое

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= -\psi(t)r/2, \quad p = -\psi(t)z + p_0(t), \\ u &= h(r, t), \quad v = \frac{\partial h(r, t)}{\partial t}, \quad h(r, t) = \frac{\alpha t}{4\mu} (R^2 - r^2), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $p_0$  — заданная функция контрольного давления в сечении трубы  $z = 0$ . Решение (2.5) справедливо до момента времени  $t = t_0$ , в который на стенке  $r = R$  выполняется условие пластичности

$$\sigma_{rz}(R, t_0) = -k, \quad t_0 = 2k / (\alpha R).$$

Согласно первой формуле в (1.1) через компоненты найденного поля перемещений упругие деформации выражаются зависимостями

$$e_{rz} = -\frac{\alpha tr}{4\mu}, \quad e_{rr} = -\frac{3}{2} e_{rz}^2, \quad e_{zz} = \frac{e_{rz}^2}{2}.$$

**3. Пластическое течение.** Начиная с момента времени  $t_0$  в среде имеется две области: упругое ядро  $V^E$ :  $0 \leq r \leq m(t)$ , где деформации являются обратимыми (упругими), и область течения  $V^P$ :  $m(t) \leq r \leq R$ . Поверхность  $r = m(t)$  является движущейся упруго-пластической границей. В рассматриваемом случае условие пластического течения (1.4) записывается в виде

$$f(\sigma_{rz}, \varepsilon_{rz}^p) = \sigma_{rz}^2 - (k - \eta \varepsilon_{rz}^p)^2 = 0. \quad (3.1)$$

В силу ассоциированного закона пластического течения (1.5) из условия (3.1) следует

$$\sigma_{rz} = -k + \eta \varepsilon_{rz}^p, \quad \lambda = \varepsilon_{rz}^p / (\eta \varepsilon_{rz}^p - k).$$

Параметры напряженно-деформированного состояния в любой момент времени  $t > t_0$  находятся путем интегрирования уравнений равновесия. Неизвестные функции, возникающие при интегрировании, определяются из условий (2.1), (2.4), а также из условий равенства компонент напряжений, перемещений и их производных на упругопластической границе  $r = m(t)$ . Таким образом, решением задачи являются следующие зависимости:

— в области вязкопластического течения  $V^P$

$$\begin{aligned} v^P &= \frac{\partial h(r, t)}{\partial t} + g(r, t), \quad g(r, t) = \frac{2}{\eta} \left( \frac{\psi(t)}{4} (R^2 - r^2) - k(R - r) \right), \\ p_{rz} &= \frac{1}{\eta} \left( kt - \frac{\alpha t^2 r}{4} \right) - \frac{k^2}{\alpha r \eta}, \quad e_{rz} = -\frac{\psi(t)r}{4\mu}, \\ u^P &= h(r, t) + \frac{2}{\eta} \left( \frac{k^2}{\alpha} \ln \frac{R}{r} + kt(r - R) + \frac{\alpha t^2}{8} (R^2 - r^2) \right); \end{aligned} \quad (3.2)$$

— в области упругого ядра  $V^E$

$$\begin{aligned} v^E &= \frac{\partial h(r, t)}{\partial t} + g(m(t), t), \\ u^E &= h(r, t) - \frac{2}{\eta} \left( \frac{k^2}{\alpha} \ln \frac{t_0}{t} + kR(t - t_0) - \frac{\alpha R^2}{8} (t^2 - t_0^2) \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Напряжение и гидростатическое давление для обеих областей определяются первыми двумя соотношениями в (2.5), положение упругопластической границы  $r = m(t)$  — из условия равенства на ней нулю скорости пластических деформаций  $\varepsilon_{rz}^p$ :

$$m(t) = \frac{2k}{\psi(t)} = \frac{2k}{\alpha t}, \quad \varepsilon_{rz}^p = \frac{1}{\eta} \left( k - \frac{\psi(t)r}{2} \right). \quad (3.4)$$

Согласно (1.1) диагональные компоненты обратимых  $e_{rr}$ ,  $e_{zz}$  и необратимых  $p_{rr}$ ,  $p_{zz}$  деформаций, являющиеся малыми величинами более высокого порядка, чем  $e_{rz}$ ,  $p_{rz}$ , в области течения находятся численно из кинематических зависимостей

$$\begin{aligned} d_{rr} &= e_{rr} + p_{rr} - e_{rz}^2/2 - 2e_{rz}p_{rz}, \\ d_{zz} &= e_{zz} + p_{zz} - e_{rz}^2/2 - 2e_{rz}p_{rz} = 0, \quad d_{rz} = e_{rz} + p_{rz}, \\ r_{zr} &= -r_{rz} = \frac{2\varepsilon_{rz}(1 - e_{zz})}{e_{rr} + e_{zz} - 2}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{v_{,r}}{2} = \varepsilon_{rz}^e + \varepsilon_{rz}^p = \frac{\partial e_{rz}}{\partial t} + \frac{\partial p_{rz}}{\partial t}, \\ \varepsilon_{rr}^p &= \dot{p}_{rr} + 2p_{rz}(r_{zr} + \varepsilon_{rz}^p), \quad \varepsilon_{zz}^p = \dot{p}_{zz} + 2p_{rz}(r_{rz} + \varepsilon_{rz}^p). \end{aligned} \quad (3.5)$$

В момент времени  $t_1 = 2f_0/(\alpha R)$  перепад давления становится таким, что неравенство (2.3) обращается в равенство  $|\sigma_{rz}|_{r=R} = f_0$  и материал начинает проскальзывать на стенках трубы, при этом выполняется условие Прандтля

$$|\sigma_{rz}|_{r=R} = f_s \quad (f_s < k). \quad (3.6)$$

**4. Волна разгрузки.** Скачкообразное изменение краевого условия на границе  $r = R$  приводит к формированию поверхности сильного разрыва. В данном случае возникающая поверхность сильного разрыва  $\Sigma_1(t)$  описывается уравнением  $r_{\Sigma_1} = R - G(t - t_1)$ , причем в силу предположения о малости необратимых деформаций величина  $G = \sqrt{\mu/\rho}$  является скоростью поперечных волн в линейно-упругой среде [3–5]. Поверхность  $\Sigma_1$  движется от границы  $r = R$ , догоняя упругопластическую границу  $r = m(t)$ , при этом течение за указанной поверхностью прекращается (волна разгрузки). Таким образом, начиная с момента времени  $t_1$  в среде одновременно присутствуют три области: упругое ядро  $V^E$ :  $0 \leq r \leq m(t)$ , область продолжающегося пластического течения  $V^P$ :  $m(t) \leq r \leq R - G(t - t_1)$  и область разгрузки  $V^{(1)}$ :  $R - G(t - t_1) \leq r \leq R$ .

Согласно уравнению переноса для тензора необратимых деформаций (1.1) в условиях разгрузки ( $\varepsilon_{ij}^p = 0$ ) компоненты тензора необратимых деформаций изменяются так же, как при жестком перемещении тела. Из кинематических зависимостей (3.5) следует, что компонента необратимых деформаций  $p_{rz}$  в области разгрузки является функцией только координаты. В каждой точке области  $V^P$  величина  $p_{rz}$  изменяется в соответствии с (3.2). В тот момент, когда через точку проходит поверхность  $\Sigma_1$ , величина  $p_{rz}$  в области  $V^{(1)}$  определяется зависимостью

$$p_{rz}^{(1)} = \frac{1}{\eta} \left( \frac{k}{G} (R - r + Gt_1) - \frac{\alpha r}{4G^2} (R - r + Gt_1)^2 \right) - \frac{k^2}{\alpha r \eta}.$$

В работе [25] показано, что уравнения динамики упруговязкопластических сред при больших деформациях могут быть записаны для областей разгрузки в перемещениях. Перемещения в областях  $V^P$  и  $V^E$  будем описывать зависимостями (3.2), (3.3), полученными в квазистатической задаче в предположении, что решение в этих областях не успевает существенно измениться за время прохождения волны. В [21, 26] получены точные решения краевых задач теории больших деформаций о взаимодействии волны разгрузки с упругопластической границей, движущейся в плоском тяжелом слое, находящемся на наклонной плоскости и подвергнутом нагружению на свободной поверхности. В первом случае разгрузка вызвана срывом слоя с жесткой шероховатой поверхности при преодолении силы сухого трения, волна разгрузки движется от упругопластической границы, при этом прекращается увеличение пластической области при продолжающемся нагружении. Во втором случае разгрузка обусловлена мгновенным снятием нагрузки на границах слоя, волна разгрузки догоняет упругопластическую границу, при этом происходит разгрузка среды и прекращается ее течение. Поскольку в рассматриваемом случае цилиндрической симметрии точное решение волнового уравнения не может быть получено, построим приближенное решение за фронтом волны разгрузки  $\Sigma_1$  для напряжений  $\sigma_{ij}$ , скоростей  $v_i$  и перемещений  $u_i$  в виде лучевого ряда [10, 11, 17–20]:

$$\begin{aligned} f^- &= f^-|_{t_{\Sigma_1}} + \dot{f}^-|_{t_{\Sigma_1}}(t - t_{\Sigma_1}) + \frac{1}{2} \ddot{f}^-|_{t_{\Sigma_1}}(t - t_{\Sigma_1})^2 + \dots = \\ &= (f^+ - [f])|_{t_{\Sigma_1}} + (\dot{f}^+ - [\dot{f}])|_{t_{\Sigma_1}}(t - t_{\Sigma_1}) + \frac{1}{2} (\ddot{f}^+ - [\ddot{f}])|_{t_{\Sigma_1}}(t - t_{\Sigma_1})^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь  $\dot{f}$ ,  $\ddot{f}$  — первая и вторая частные производные по времени;  $t_{\Sigma_1}$  — время прихода волны в данную точку пространства; индекс “+” соответствует значению функции перед

фронтом волны, индекс “–” — значению функции за фронтом волны. Ряд (4.1) можно продолжить с требуемой степенью точности. В данной работе ограничимся линейными по времени величинами для напряжений и квадратичными для перемещений. Достаточно найти  $[v]$  и  $[\dot{v}]$ , остальные искомые величины выражаются через скачки скорости и ее производных на волне  $\Sigma_1$ , которые определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{\delta [v]}{\delta t} &= \frac{G[v]}{2r_{\Sigma_1}} - G[\varepsilon_{rz}^p], \\ \frac{\delta [\dot{v}]}{\delta t} &= \frac{1}{2} \frac{\delta^2 [v]}{\delta t^2} + \frac{G[\dot{v}]}{2r_{\Sigma_1}} - \frac{G}{2r_{\Sigma_1}} \frac{\delta [v]}{\delta t} - G[\dot{\varepsilon}_{rz}^p] + G \frac{\delta [\varepsilon_{rz}^p]}{\delta t} - \frac{G^2[\varepsilon_{rz}^p]}{r_{\Sigma_1}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Так как за волной разгрузки  $\varepsilon_{rz}^p = 0$ , то согласно (3.4) для произвольного момента времени  $[\varepsilon_{rz}^p] = k/\eta - \psi(t)r_{\Sigma_1}/(2\eta)$ . Неизвестные константы, возникающие при интегрировании (4.2), определяются из условия (3.6) на стенке трубы  $r = R$ . В результате в области за волной  $\Sigma_1$  имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(r, t) &= h(r, t_{\Sigma_1}) + \frac{2}{\eta} \left( \frac{k^2}{\alpha} \ln \frac{R}{r} + kt_{\Sigma_1}(r - R) + \frac{\alpha}{8} t_{\Sigma_1}^2 (R^2 - r^2) \right) + \\ &+ \left( \frac{\alpha}{4\mu} (R^2 - r^2) + g(r, t_{\Sigma_1}) - [v^{(1)}]_{t_{\Sigma_1}} \right) (t - t_{\Sigma_1}) + \\ &+ \left( \frac{\alpha}{2\eta} (R^2 - r^2) - [\dot{v}^{(1)}]_{t_{\Sigma_1}} \right) (t - t_{\Sigma_1})^2 + \dots, \\ \sigma_{rz}^{(1)}(r, t) &= -\frac{\alpha r t_{\Sigma_1}}{2} - \frac{\mu}{G} [v^{(1)}]_{t_{\Sigma_1}} + \\ &+ \left( -\frac{\alpha r}{2} - \frac{\mu C_1}{Gr^{1/2}} + \frac{3\mu C}{8r^{3/2}} - \frac{\alpha \mu r t_{\Sigma_1}}{5\eta} + \frac{8\alpha \mu r^2}{35\eta G} \right) (t - t_{\Sigma_1}) + \dots, \\ [v^{(1)}] &= \frac{A^{(1)}}{r_{\Sigma_1}^{1/2}} + \frac{2kr_{\Sigma_1}}{3\eta} - \frac{\alpha r_{\Sigma_1}^2}{5\eta} \left( t + \frac{2r_{\Sigma_1}}{7G} \right), \\ [\dot{v}^{(1)}] &= \frac{B^{(1)}}{r_{\Sigma_1}^{1/2}} + \frac{A^{(1)}G}{8r_{\Sigma_1}^{3/2}} + \frac{4kG}{3\eta} - \frac{2\alpha t Gr_{\Sigma_1}}{5\eta} - \frac{9\alpha r_{\Sigma_1}^2}{35\eta}, \\ A^{(1)} &= \frac{G(f_s - f_0)R^{1/2}}{\mu} - \frac{2kR^{3/2}}{3\eta} + \frac{\alpha R^{5/2}}{5\eta} \left( t_1 + \frac{2R}{7G} \right), \\ B^{(1)} &= -\frac{\alpha GR^{3/2}}{2\mu} + \frac{3A^{(1)}G}{8R} - \frac{\alpha G t_1 R^{3/2}}{5\eta} + \frac{8\alpha R^{5/2}}{35\eta}, \\ t_{\Sigma_1} &= t_1 + (R - r)/G. \end{aligned}$$

**5. Отражение волны разгрузки от упругопластической границы.** Полученное решение справедливо до момента времени  $t = t_2$ , в который волна разгрузки сталкивается с упругопластической границей  $r = m(t)$ . С этого момента область  $V^P$  с накопленными необратимыми деформациями не увеличивается и ограничена поверхностями  $r = m(t_2) = m_*$  и  $r = R$ , а от поверхности  $r = m_*$  к стенке и оси трубы движутся две поверхности разрывов с противоположно направленными скоростями: поверхность  $\Sigma_2$ :  $r_{\Sigma_2} = m_* + G(t - t_2)$  и поверхность  $\Sigma_3$ :  $r_{\Sigma_3} = m_* - G(t - t_2)$  соответственно (рис. 1).

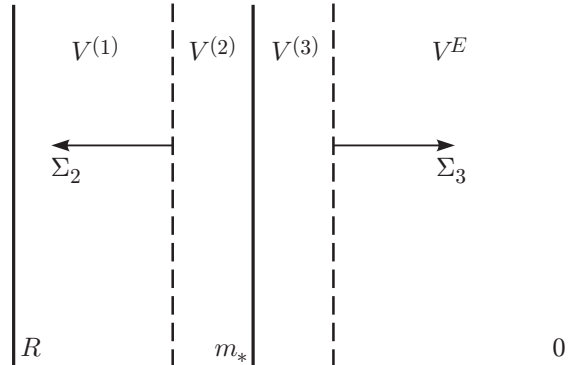


Рис. 1. Волновая картина после отражения волны разгрузки от упругопластической границы

Решение для искомой функции  $f(r, t)$  за волнами  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_3$  представим в виде лучевых рядов:

$$f^{(2)} = (f^{(1)} - [f^{(2)}])|_{t_{\Sigma_2}} + (\dot{f}^{(1)} - [\dot{f}^{(2)}])|_{t_{\Sigma_2}} (t - t_{\Sigma_2}) + \frac{1}{2} (\ddot{f}^{(1)} - [\ddot{f}^{(2)}])|_{t_{\Sigma_2}} (t - t_{\Sigma_2})^2 + \dots,$$

$$f^{(3)} = (f^E - [f^{(3)}])|_{t_{\Sigma_3}} + (\dot{f}^E - [\dot{f}^{(3)}])|_{t_{\Sigma_3}} (t - t_{\Sigma_3}) + \frac{1}{2} (\ddot{f}^E - [\ddot{f}^{(3)}])|_{t_{\Sigma_3}} (t - t_{\Sigma_3})^2 + \dots,$$

$$t_{\Sigma_2} = t_2 + (r - m_*)/G, \quad t_{\Sigma_3} = t_2 + (m_* - r)/G.$$

Уравнения лучевого метода для каждой волны выводятся в соответствии с алгоритмом, описанным в п. 4. Решениями этих уравнений являются зависимости

$$[v^{(n)}] = \frac{A^{(n)}}{r_{\Sigma_n}^{1/2}}, \quad [\dot{v}^{(n)}] = \frac{B^{(n)}}{r_{\Sigma_n}^{1/2}} + (-1)^{n-1} \frac{GA^{(n)}}{8r_{\Sigma_n}^{3/2}},$$

где  $n = 2$  для волны  $\Sigma_2$  и  $n = 3$  для волны  $\Sigma_3$ . Для определения констант  $A^{(n)}$  и  $B^{(n)}$  используются краевые условия на упругопластической границе  $m_*$ , а именно условия равенства перемещений  $u^{(2)}|_{m_*} = u^{(3)}|_{m_*}$  и их производных  $u_{,r}^{(2)}|_{m_*} = u_{,r}^{(3)}|_{m_*}$ , что в рассматриваемом случае равносильно равенству  $\sigma_{rz}^{(2)}|_{m_*} = \sigma_{rz}^{(3)}|_{m_*}$ , поскольку в каждый момент времени, следующий за  $t_2$ , решение в области между  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_3$  должно быть гладким. Таким образом, получаем

$$u^{(2)}(r, t) = u^{(1)}|_{t_{\Sigma_2}} + (\dot{u}^{(1)} - [v^{(2)}])|_{t_{\Sigma_2}} (t - t_{\Sigma_2}) + \frac{1}{2} (\ddot{u}^{(1)} - [\dot{v}^{(2)}])|_{t_{\Sigma_2}} (t - t_{\Sigma_2})^2 + \dots, \quad (5.1)$$

$$\sigma_{rz}^{(2)}(r, t) = \sigma_{rz}^{(1)}(r, t_{\Sigma_2}) + \left( \dot{\sigma}_{rz}^{(1)}|_{t_{\Sigma_2}} + \frac{\mu B^{(2)}}{Gr^{1/2}} \right) (t - t_{\Sigma_2}) + \dots;$$

$$u^{(3)}(r, t) = u^E|_{t_{\Sigma_3}} + (\dot{u}^E - [v^{(3)}])|_{t_{\Sigma_3}} (t - t_{\Sigma_3}) + \frac{1}{2} (\ddot{u}^E - [\dot{v}^{(3)}])|_{t_{\Sigma_3}} (t - t_{\Sigma_3})^2 + \dots, \quad (5.2)$$

$$\sigma_{rz}^{(3)}(r, t) = -\frac{\alpha r t_{\Sigma_3}}{2} - \frac{\mu A^{(3)}}{Gr^{1/2}} + \left( -\frac{\alpha r}{2} - \frac{\mu B^{(3)}}{Gr^{1/2}} + \frac{3\mu A^{(3)}}{8r^{3/2}} \right) (t - t_{\Sigma_3}) + \dots,$$

где

$$A^{(2)} = 0, \quad A^{(3)} = A^{(1)} + \frac{2k}{3\eta} m_*^{3/2} - \frac{\alpha m_*^{5/2}}{5\eta} \left( t_2 + \frac{2m_*}{7G} \right),$$

$$B^{(2)} = \frac{Gm_*^{1/2}}{2\eta} \left( \frac{\alpha t_2 m_*}{2} - k \right), \quad B^{(3)} = B^{(1)} + \frac{3kGm_*^{1/2}}{4\eta} - \frac{\alpha t_2 Gm_*^{3/2}}{8\eta} - \frac{\alpha m_*^{5/2}}{4\eta}.$$



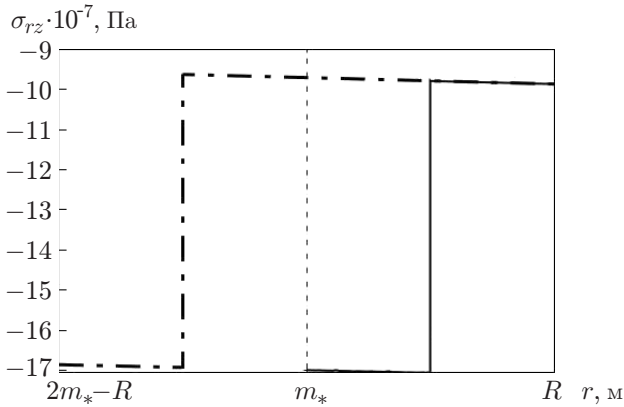


Рис. 2

Рис. 2. Распределение напряжения  $\sigma_{rz}(r, t)$  вдоль луча в моменты времени  $t' = t_1 + (t_2 - t_1)/2$  (сплошная линия) и  $t'' = t_2 + (t_3 - t_2)/2$  (штрихпунктирная линия) при  $2m_* - R \leq r \leq R$

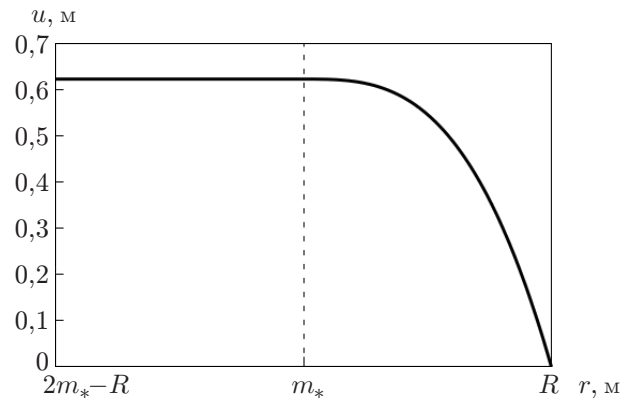


Рис. 3

Рис. 3. Распределение перемещения вдоль луча в момент времени  $t_3$  при  $2m_* - R \leq r \leq R$

Из (5.1) следует, что, так же как в случае плоских волн [26],  $\Sigma_3$  является поверхностью разрывов скоростей (ударная волна), тогда как  $\Sigma_2$  является поверхностью разрывов ускорений (слабая волна). Заметим, что для параметров задачи, близких к параметрам реальных процессов, область вязкопластического течения оказывается существенно меньше упругого ядра (пристенное течение). Следовательно, выражения (5.1), (5.2) справедливы до момента времени  $t_3 = t_2 + (R - m_*)/G$ , в который волна  $\Sigma_2$  достигает стенки трубы и отражается от нее в виде слабой волны  $\Sigma_4$ :  $r_{\Sigma_4} = R - G(t - t_3)$ . С учетом краевого условия на  $R$  (3.6) для области  $V^{(4)}$  за волной  $\Sigma_4$  получаем

$$u^{(4)}(r, t) = u^{(2)}|_{\Sigma_4} + \dot{u}^{(2)}|_{\Sigma_4}(t - t_{\Sigma_4}) + \frac{1}{2} \left( \ddot{u}^{(2)}|_{\Sigma_4} - \frac{B^{(2)}}{r^{1/2}} \right) (t - t_{\Sigma_4})^2 + \dots, \quad (5.3)$$

$$\sigma_{rz}^{(4)}(r, t) = \sigma_{rz}^{(2)}|_{\Sigma_4} + \left( \dot{\sigma}_{rz}^{(2)}|_{\Sigma_4} - \frac{\mu B^{(2)}}{Gr^{1/2}} \right) (t - t_{\Sigma_4}) + \dots$$

Решения (5.2), (5.3) справедливы до момента времени  $t_4 = t_3 + (R - m_*)/G$ , в который поверхность  $\Sigma_4$  совпадает с поверхностью  $r = m_*$ . Начиная с этого момента от упругопластической границы в направлении оси цилиндра движется поверхность разрывов ускорений  $\Sigma_5$ :  $r_{\Sigma_5} = m_* - G(t - t_4)$ , в то время как в области  $V^{(4)}$  скорость и ускорение остаются непрерывными и, следовательно, решение описывается зависимостями (5.3). Можно предположить, что в этой области испытывает разрыв вторая производная по времени от скорости  $[\dot{v}]$ .

На рис. 2, 3 представлены распределения касательного напряжения и перемещения вдоль луча на отрезке  $2m_* - R \leq r \leq R$ . Расчет проводился для алюминиевого сплава АМг6 при значениях постоянных материала [27]  $\rho_0 = 2,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu = 27,7 \cdot 10^9$  Па,  $k = 1,7 \cdot 10^8$  Па,  $\eta = 7,5 \cdot 10^3$  Па·с и параметрах задачи  $f_0 = 1,008k$ ,  $f_S = 0,58k$ ,  $R = 1,5 \cdot 10^{-2}$  м,  $\alpha = 2,099 \cdot 10^6$  Па/(м·с).

Следует отметить, что по мере приближения волнового фронта к оси цилиндра интенсивность волны  $\Sigma_3$  может неограниченно возрастать. Это приводит к появлению новой пластической области. Полученные в данной работе лучевые аппроксимации решения могут служить для контроля расчетов при использовании численных схем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Рахматуллин Х. А., Шапиро Г. С.** Распространение возмущений в нелинейно-упругой и неупругой среде // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1955. № 2. С. 68–79.
2. **Быковцев Г. И., Кретьова Л. Д.** О распространении ударных волн в упругопластических средах // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, вып. 1. С. 106–116.
3. **Безгласный П. А., Вerveйко Н. Д.** О распространении ударных волн в упруго-вязко-пластической среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1971. № 5. С. 71–76.
4. **Буренин А. А., Быковцев Г. И., Рычков В. А.** Поверхности разрывов скоростей в динамике необратимо сжимаемых сред // Проблемы механики сплошных сред (к 60-летию акад. В. П. Мясникова). Владивосток: Ин-т автоматизации и процессов управления ДВО РАН, 1996. С. 116–127.
5. **Садовский В. М.** Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Физматлит, 1997.
6. **Кукуджанов В. Н., Кондауров В. И.** Численное решение неодномерных задач динамики твердого деформированного тела // Проблемы динамики упругопластических сред. М.: Мир, 1975. С. 38–84.
7. **Иванов Г. В.** Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел / Г. В. Иванов, Ю. М. Волчков, И. О. Богульский, С. А. Анисимов, В. Д. Кургузов. Новосибирск: Сиб. ун-т, 2002.
8. **Афанасьев С. Б., Баженов В. Г.** О численном решении одномерных нестационарных задач упругопластического деформирования сплошных сред методом Годунова // Прикл. пробл. прочности и пластичности. 1986. № 33. С. 21–29.
9. **Кондауров В. И., Петров И. Б., Холодов А. С.** Численное моделирование процесса внедрения жесткого тела вращения в упругопластическую преграду // ПМТФ. 1984. № 4. С. 132–139.
10. **Achenbach I. D., Reddy D. R.** Note of wave propagation in lineary viscoelastic media // Z. angew. Math. Phys. 1967. Bd 18. S. 141–144.
11. **Бабичева Л. А., Быковцев Г. И., Вerveйко Н. Д.** Лучевой метод решения динамических задач в упруговязкопластических средах // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 1. С. 145–155.
12. **Hadamard J.** Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. P.: Herman, 1903.
13. **Томас Т.** Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964.
14. **Быковцев Г. И.** Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. Владивосток: Дальнаука, 1998.
15. **Герасименко Е. А., Рагозина В. Е.** Геометрические и кинематические ограничения на разрывы функций на движущихся поверхностях // Дальневост. мат. журн. 2004. Т. 5, № 1. С. 100–109.
16. **Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V.** Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // Appl. Mech. Rev. 1995. V. 48, N 1. P. 1–39.
17. **Буренин А. А., Россихин Ю. А.** Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями сильных разрывов // Прикладные задачи механики деформируемых сред. Владивосток: Дальнаука, 1991. С. 129–137.

18. **Burenin A. A., Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V.** A ray method for solving boundary value problems connected with the propagation of finite amplitude shock waves // Proc. of the Intern. symp. on nonlinear theory and its applications, Hawaii, Dec. 5–10, 1993. Tokyo: Inst. electron., inform. and comm. engns, 1993. V. 3. P. 1085–1088.
19. **Буренин А. А., Зиновьев П. В.** К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред // Проблемы механики: Сб. ст. к 90-летию А. Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 146–155.
20. **Герасименко Е. А., Завертан А. А.** Лучевые прифронтные разложения решений в качестве средства выделения разрывов в численных расчетах динамики деформирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 4. С. 722–733.
21. **Ковтанюк Л. В., Русанов М. М.** О столкновении волны разгрузки с продвигающейся упругопластической границей в плоском тяжелом слое // Сиб. журн. индустр. математики. 2015. Т. 18, № 3. С. 40–48.
22. **Буренин А. А.** Большие необратимые деформации и упругое последствие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. Владивосток: Дальнаука, 2013.
23. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
24. **Знаменский В. А., Ивлев Д. Д.** Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение. 1963. № 6. С. 114–118.
25. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Лушпей А. В.** Переходный процесс торможения прямолинейного вязкопластического течения при мгновенном снятии нагружающих усилий // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 3. С. 494–500.
26. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Кулаева Д. В.** О взаимодействии одномерной волны разгрузки с упругопластической границей при ее распространении в упруговязкопластической среде // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 1. С. 105–113.
27. **Савенков Г. Г.** Динамическая вязкость и время релаксации материалов при ударно-волновом нагружении // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 2. С. 7–15.

*Поступила в редакцию 30/III 2017 г.*