

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВЗРЫВНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ АТМОСФЕРЕ С УЧЕТОМ ПРОТИВОДАВЛЕНИЯ

B. A. Бронштэн

(Москва)

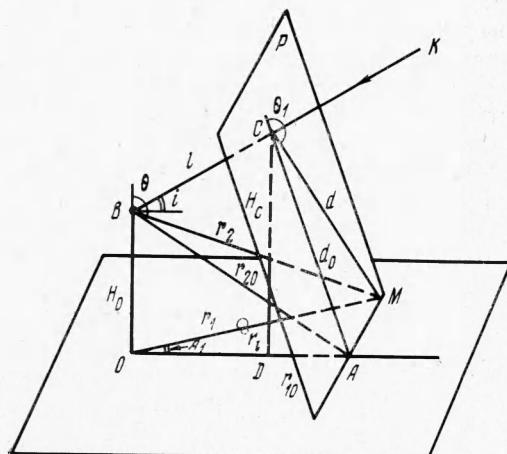
Предлагается приближенный метод расчета распространения слабой сферической или цилиндрической ударной волны (с учетом противодавления) в неоднородной экспоненциальной атмосфере. В случае цилиндрической волны с произвольной ориентированной оси цилиндра трехмерная задача приводится к двумерной введением принципа плоских сечений, т. е. движениями газа вдоль оси цилиндра пренебрегают. Путем параметризации по позиционному углу двумерная задача приводится к одномерной. Для решения одномерной задачи используется метод «параллельных слоев»: атмосфера разбивается на ряд параллельных слоев малой толщины, внутри которых считается однородной, а переход волны через границу слоев рассматривается как переход через границу двух сред.

Задача о распространении сильных цилиндрических и сферических взрывных волн в неоднородной атмосфере неоднократно рассматривалась многими авторами [1-5]. Однако на практике нередко приходится встречаться со случаями, когда уже нельзя пренебречь противодавлением, т. е. волна не может считаться сильной.

Классическим примером такого случая является полет и взрыв Тунгусского метеорита [6,7], результатом чего явились квазицилиндрическая баллистическая волна и взрывная сферическая волна, совместное действие которых привело к сплошному вывалу леса на площади 2 000 км². Большинство авторов оценивает высоту точки взрыва в 5-10 км, энергию взрыва порядка 10-40 Mt, или $(4 \div 10) \cdot 10^{23}$ эрг. При этих условиях взрывная волна дойдет до поверхности Земли сильно ослабевшей, так что избыточное давление $\Delta p / p_1 < 1$.

В такой постановке задача не является автомодельной. Для ее решения здесь предлагается приближенный метод, который будем называть «методом параллельных слоев».

Рассмотрим сначала распространение сферической волны. Обозначим высоту точки взрыва через H_0 , высоту однородной атмосферы — через H^* , угол направления распространения фронта волны с вертикалью — через θ , расстояние от точки взрыва — через r_2 (фиг. 1). Хотя задача является, строго говоря, двумерной, ее можно привести к одномерной пу-



Фиг. 1

тем параметризации по позиционному углу θ . Пока волну можно считать сильной, т. е. пока $p_2 / p_1 \geq 40$ [8], применяем одно из решений для сильных волн [1-4]. Дальше рассуждаем следующим образом.

Разобьем атмосферу на ряд параллельных слоев толщиной ΔH . Будем считать атмосферу внутри каждого слоя однородной и для распространения волн в нем будем применять одну из приближенных формул, выведенных для случая распространения слабой ударной волны в однородной атмосфере¹. Такие формулы приведены, например, в монографии [8] и дают хорошее согласие с точными результатами, полученными путем численного интегрирования дифференциальных уравнений [9].

Перейдем к безразмерным переменным, выразив расстояния от точки (оси) взрыва в долях динамической длины r_0

$$r_0 = (E / p_{10})^{1/v}, \quad \xi = r / r_0 \quad (1)$$

где E — энергия взрыва (энергия на единицу длины в случае цилиндрической волны), p_{10} — давление невозмущенного воздуха на высоте взрыва, $v = 2$ и 3 для цилиндрической и сферической волн соответственно. Обозначим также через q относительное избыточное давление на скачке

$$q = (p_2 - p_1) / p_1 \quad (2)$$

Предположим, что в однородной атмосфере между q и ξ существует связь вида $q = q(\xi)$, которую будем считать известной. Рассмотрим переход волны через границу двух слоев как переход через границу двух сред. При этом как давление на фронте волны p_2 , так и давление невозмущенного газа p_1 возрастают скачком. Обозначив через p_{21} , p_{11} значения p_2 , p_1 после перехода ударной волной границы раздела и обозначив $h = \Delta H / H^*$, для p_{11} получим

$$p_{11} = p_1 e^h \quad (3)$$

Давление на фронте волны p_{21} и соответствующую величину $q_1 = (p_{21} - p_{11})/p_{11}$ можно найти, решив задачу о распаде произвольного разрыва, возникающего в результате взаимодействия ударной волны с границей раздела слоев, которую можно рассматривать как контактный разрыв. Эта задача была решена Л. В. Овсянниковым [10]. На основании его решения

$$q_1 = q + \psi(q) (e^h - 1) \quad (4)$$

где введено обозначение

$$\psi(q) = p_1 \frac{\partial}{\partial p_{11}} \left(\frac{p_{21}}{p_{11}} \right)_{p_{11}=p_1} \quad (5)$$

Для $\psi(q)$ Л. В. Овсянниковым получено выражение

$$\psi(q) = - \frac{2(1 + \mu q) \sqrt{1+q} + \sqrt{1+(1-\mu)q} \sqrt{1+q} + (1-\mu)q}{2(1 + \mu q) \sqrt{1+(1-\mu)q} + (2 + \mu q) \sqrt{1+q}} \quad (6)$$

где $\mu = (\gamma + 1) / 2\gamma$. Для $q < 1$ с ошибкой, не превышающей 1%

$$\psi(q) = - \frac{1}{2} [1 + (2 - \mu)q] \quad (7)$$

Введем эффективное относительное расстояние ξ_* , которое определим как такое значение ξ , на котором избыточное давление q_* в случае распро-

¹ Точных решений пока и для этого случая не найдено, так как при учете противодавления задача становится неавтомодельной.

странения некоторой эталонной ударной волны в однородной атмосфере с давлением и плотностью невозмущенного газа p_{10} , ρ_{10} было бы равно избыточному давлению q в реальной ударной волне, распространяющейся в неоднородной экспоненциальной атмосфере ($q_* = q(\xi_*)$), причем вид функции $q(\xi_*)$ тот же, что и вид функции $q(\xi)$ в эталонной волне.

Выведем выражение, связывающее ξ_* с ξ . Для этого образуем разность $(\xi_1 - \xi)_n$, накапливающуюся в результате неоднородности атмосферы при прохождении волной n -го слоя атмосферы толщиной h . Учтем при этом, что $h \ll 1$ и можно положить $e^h = 1 + h$

$$(\xi_1 - \xi)_n = (q - q_1) \frac{d\xi_*}{dq} = -\psi(q) h \frac{d\xi_*}{dq} \quad (8)$$

Разделим обе части (8) на h и обозначим предел полученного выражения при $h \rightarrow 0$ через $f(\xi_*)$

$$f(\xi_*) = -\psi(q) \frac{d\xi_*}{dq} \quad (9)$$

Разность $\xi_* - \xi$ получится в результате суммирования (8) по слоям с учетом (9). Переходя к пределу при $h \rightarrow 0$ и помня, что

$$d\xi = \frac{dr}{r_0} = \frac{dH}{r_0 |\cos \theta|} \quad (10)$$

заменяем суммирование интегрированием

$$\xi_* - \xi = \int_{H_0}^{H_n} \frac{f(\xi_*)}{H^*} dH = \frac{r_0 |\cos \theta|}{H^*} \int_{\xi_0}^{\xi_n} f(\xi_*) d\xi \quad (11)$$

В формуле (11) интегрирование производится по ξ , а не по ξ_* . Чтобы перейти к переменной ξ_* , дифференцируем (11), разделяем переменные и вновь интегрируем. Получим

$$\xi = \int_{\xi_0}^{\xi_n} \frac{d\xi_*}{1 + \beta f(\xi_*)} \quad (12)$$

где введено обозначение

$$\beta = (r_0 |\cos \theta|) / H^* \quad (13)$$

Формула (12) может быть также легко получена из дифференциального уравнения, выведенного в [10]

$$\frac{d\xi_*}{d\xi} = 1 + \psi(q) \left[\frac{dq}{d\xi_*} \right]^{-1} \frac{d}{d\xi} \ln p_1(\xi) \quad (14)$$

поскольку для экспоненциальной атмосферы

$$\frac{d}{d\xi} \ln p_1(\xi) = -\beta$$

а первый множитель в правой части (14) равен $-f(\xi_*)$.

В случае произвольно ориентированной цилиндрической волны, когда ось цилиндра наклонена к горизонтальной плоскости на угол i , задача становится уже трехмерной. Чтобы привести ее к двумерной, используем, как это сделано в полученном ранее решении для сильной волны [5], закон плоских сечений, т. е. будем рассматривать распространение волны, порожденной точкой B на оси цилиндра, в плоскости P , проходящей через

B и перпендикулярной к оси цилиндра (фиг. 1). В этой плоскости роль эффективной шкалы высот будет играть величина $\Delta = H^* \sec i$, которую и следует подставлять во все формулы вместо H^* . Соответственно

$$\beta = \frac{r_0}{H^*} \cos i |\cos \theta_1| \quad (15)$$

где θ_1 — позиционный угол, отсчитываемый в плоскости *P* от ее пересечения с вертикальной плоскостью, проходящей через ось взрыва. Параметризацией по углу θ_1 приводим задачу к одномерной. Смысл и значение параметра β будут разъяснены ниже.

Приближенная формула, выражающая связь $q(\xi)$, а в данном случае $q(\xi_*)$, выведена в монографии [8] и имеет вид

$$q = \frac{m}{x_k - 1} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (16)$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{1 + n \xi_*^\nu} & (\xi_* \leq 2) \\ x_2 &= \sqrt{1 + n \sqrt{2} \xi_*^{3/2}} & (\xi_* > 2, \nu = 2) \\ x_3 &= \sqrt{1 + 2n \xi_*^2 [\ln \xi_* / 2 + 1]} & (\xi_* > 2, \nu = 3) \end{aligned} \quad (17)$$

$$m = 4\gamma / (\gamma + 1), n = (\nu + 2)^2 \gamma a_\nu, a_2 = 0.983, a_3 = 0.85$$

Обратное соотношение $\xi_*(q)$ для $k = 1, 2$ выражается в явном виде

$$\begin{aligned} \xi_* &= n^{-1/\nu} \left[\frac{m}{q} \left(\frac{m}{q} + 2 \right) \right]^{1/\nu} & (k = 1) \\ \xi_* &= (2n^2)^{-1/3} \left[\frac{m}{q} \left(\frac{m}{q} + 2 \right) \right]^{2/3} & (k = 2) \end{aligned} \quad (18)$$

Для $k = 3$ ($\xi_* > 2, \nu = 3$) это соотношение трансцендентно и ξ_* находится методом последовательных приближений.

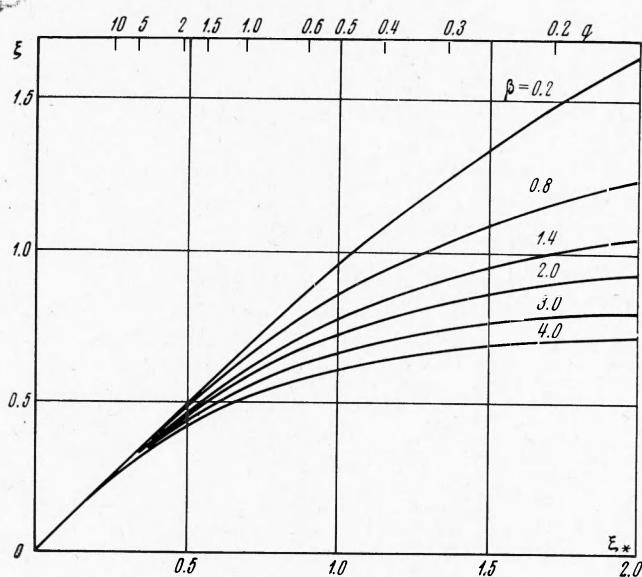
На основании (9), (16) и (17) находим следующие выражения для функции $f(\xi_*)$ во всех трех случаях:

$$\begin{aligned} f_1(\xi_*) &= \frac{2\psi(q)}{mn} \xi_*^{1-\nu} x_1 (x_1 - 1)^2 \\ f_2(\xi_*) &= \frac{4\psi(q)}{3\sqrt{2}mn} \xi_*^{-1/2} x_2 (x_2 - 1)^2 \\ f_3(\xi_*) &= \frac{\psi(q)}{2mn} \xi_*^{-1} \left[\ln \frac{\xi_*}{2} + \frac{3}{2} \right]^{-1} x_3 (x_3 - 1)^2 \end{aligned} \quad (19)$$

Вид функций $f_k(\xi_*)$ показывает, что интеграл (12) не может быть выражен в элементарных функциях и его надо находить численным путем. С его помощью для любого сочетания параметров γ, ν и β можно по ξ_* определить соответствующее ему ξ , а затем, выразив зависимость $\xi(\xi_*)$ графически, осуществить обратный переход. Зная ξ_* в рассматриваемой точке, можно применить приближенные формулы, выведенные для распространения ударной волны в однородной атмосфере с учетом противодавления [8, 11], или соответствующие таблицы [12, 13] и получить все характеристики ударной волны и газа за ударной волной.

Параметр β является мерой влияния неоднородности атмосферы на распространение ударной волны, поэтому будем называть его параметром не-

однородности. В самом деле, при $\beta = 0$, как следует из (11) и (12), $\xi_* = \xi$, т. е. имеем случай однородной атмосферы. Связь ξ с ξ_* при разных значениях β для сферических и цилиндрических волн соответственно показана на фиг. 2 и фиг. 3 (для $\xi_* \leq 2$). Поскольку ξ_* однозначно связано с q , на верхней шкале фиг. 2, 3 нанесены значения q . Зависимость q от ξ_* для сферической (кривая 1) и цилиндрической (кривая 2) волн при больших ξ_* и малых q представлена на фиг. 4.



Фиг. 2

Безразмерная скорость распространения ударной волны v при $\xi_* \leq 2$ определяется выражением

$$v \equiv \frac{D}{c} = \frac{\xi_*^{-1/2}}{\sqrt{n}} (1 + x_1) \quad (20)$$

где D — размерная скорость, c — скорость звука, $x_1 = \sqrt{1 + n\xi_*^2}$. Формула (20) справедлива для $\xi_* \leq 2$, при $\xi_* > 2$ будем иметь вместо нее для сферической волны

$$v = (2n)^{-1/2} \xi_*^{-1} [\ln \xi_* / 2 + 1]^{-1/2} (1 + x_3) \quad (21)$$

для цилиндрической волны

$$v = (n \sqrt{2})^{-1/2} \xi_*^{-3/4} (1 + x_2) \quad (22)$$

Безразмерное время прохождения волны равно

$$\tau = \tau_0 + \gamma^{-1/2} \int_{\xi_1}^{\xi_n} \frac{d\xi}{v} \quad (23)$$

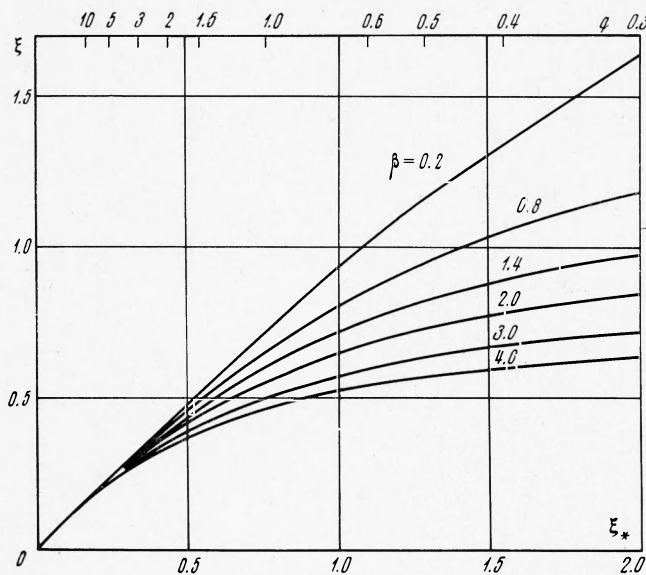
где τ_0 связано с ξ_0 соотношением

$$\tau_0 = \xi_0^{(v+2)/2} \alpha^{1/2} \quad (24)$$

Переход от τ к размерному времени t производится по формуле

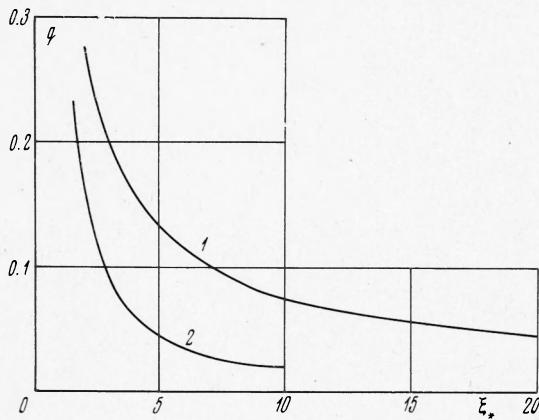
$$t = \tau r_0 \left(\frac{\rho_1}{p_1} \right)^{1/2} \quad (25)$$

Предлагаемый метод позволяет быстро делать оценки избыточного давления на фронте слабой сферической или цилиндрической ударной волны,



Фиг. 3

распространяющейся сверху вниз в неоднородной экспоненциальной изотермической атмосфере с небольшой высоты, а также скорости ее распро-



Фиг. 4

странения. Учет неизотермичности атмосферы может быть сделан без труда, если выразить шкалу высот H^* в функции самой высоты.

Автор благодарит Л. В. Овсянникова, В. П. Коробейникова, Л. А. Чудова и Х. С. Кестенбайма за полезное обсуждение вопроса.

Поступила 10 XI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Компанеец А. С. Сильный взрыв в неоднородной атмосфере. Докл. АН СССР, 1960, т. 130, № 5.
 2. Андрианкин Э. И., Коган А. М., Компанеец А. С., Крайнов В. П. Распространение сильного взрыва в неоднородной атмосфере. ПМТФ, 1962, № 6.
 3. Lautembach D. D., Grobstein R. F. A point explosion in a cold exponential atmosphere. J. Fluid Mech., 1969, vol. 35, pt 1.
 4. Кестенбойм Х. С., Турецкая Ф. Д., Чудов Л. А. Точечный взрыв в неоднородной атмосфере. ПМТФ, 1969, № 5.
 5. Бронштэн В. А. Распространение сильной цилиндрической волны в неоднородной атмосфере. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 6.
 6. Бронштэн В. А. Воздушные волны Тунгусского метеорита. Астрон. вестник, 1969, т. 3, № 4.
 7. Бронштэн В. А. Распространение воздушных волн Тунгусского метеорита с учетом неоднородности атмосферы. Астрон. вестник, 1972, т. 6, № 1.
 8. Коробейников В. П., Мельникова И. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М., Физматгиз, 1961.
 9. Охочимский Д. Е., Кондрашева И. Л., Власова З. П., Казакова Р. К. Расчет точечного взрыва с учетом противодавления. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1957, т. 50.
 10. Овсянников Л. В. Приближенный метод пересчета закона распространения одномерных ударных волн. ПМТФ, 1972, № 1.
 11. Цикулин М. А. Ударные волны при движении в атмосфере крупных метеоритных тел. М., «Наука», 1969.
 12. Коробейников В. П., Чушкин П. И., Шароватова К. В. Таблицы газодинамических функций начальной стадии точечного взрыва. М., ВЦ АН СССР, 1963.
 13. Коробейников В. П., Чушкин П. И., Шароватова К. В. Газодинамические функции точечного взрыва. М., ВЦ АН СССР, 1969.
-