

Тот факт, что для всех трех исследованных металлов зависимости откольной прочности от времени действия нагрузки в исследованном диапазоне хорошо описываются в полулוגарифмических координатах прямыми, проведенными через значения теоретической прочности при $\tau = 10^{-12}$ — 10^{-13} с, позволяет предположить, что такая закономерность сохраняется и для других металлов. Это дает возможность прогнозировать их поведение в субмикросекундном диапазоне времен нагружения.

Поступила 26 IV 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Златин Н. А., Мочалов С. М. и др. Временные закономерности процесса разрушения металлов при интенсивных нагрузках.— ФТТ, 1974, т. 16, с. 1752.
2. Златин Н. А., Мочалов С. М. и др. Временная зависимость прочности металлов при долговечностях микросекундного диапазона.— ФТТ, 1975, т. 17, с. 2599.
3. Евсеенко Е. П., Зильбербранд Е. Л. и др. Динамическая ветвь временной зависимости прочности полиметилметакрилата.— Письма в ЖТФ, 1977, т. 3, вып. 14.
4. Воловец П. Д., Златин Н. А. и др. Влияние температуры на кинетику разрушения полиметилметакрилата при долговечности микросекундного диапазона.— Письма в ЖТФ, 1980, т. 6, вып. 11.
5. Глушак Б. Л., Новиков С. А. и др. Временная зависимость откольной прочности меди в субмикросекундном диапазоне.— ДАН СССР, 1981, т. 259, № 4.
6. Голубев В. К., Новиков С. А. и др. Влияние температуры на критические условия откольного разрушения металлов.— ПМТФ, 1980, № 4.
7. Тарасов Ю. И. Исследование зависимости времени разрушения от растягивающей нагрузки для стали и меди.— ДАН СССР, 1965, т. 165, № 2.
8. Фадеенко Ю. И. Временные критерии разрушения взрывом.— ПМТФ, 1977, № 6.
9. Журков С. Н. К вопросу о физической основе прочности.— ФТТ, 1980, т. 22, вып. 11.

УДК 539.3

О РАСКРЫТИИ РАЗРЕЗА В УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

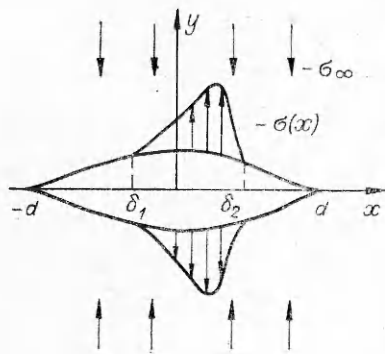
И. В. Симонов

(Москва)

Рассмотрена задача об установившемся движении щели конечной длины вдоль разреза в упругой плоскости (диапазон скоростей — дозвуковой). Она сводится к обобщенной задаче Гильберта, решение которой имеет разный набор особенностей в до- и сверхрэлееском режимах движения. Размер области отрыва и положение щели относительно нагрузки неизвестны заранее и определяются в ходе решения из дополнительных физических условий. Это, во-первых, обуславливает нелинейный характер задачи, во-вторых, существенно отличает данное рассмотрение от похожей по постановке задачи Иоффе [1] из теории трещин. С целью сопоставления приведено решение для трещины конечной длины.

1. В упругой плоскости с разрезом вдоль оси x_1 действуют однородное сжимающее напряжение $-\sigma_\infty$ ($\sigma_\infty > 0$) и динамическая нагрузка $-\sigma(x_1, t)$, симметрично приложенная по нормали к берегам разреза, стационарная в движущейся системе координат $x = x_1 - ct$, $y = x_2$ (t — время), вызывающая раскрытие разреза на участке $L = \{|x| < d\}$ (фиг. 1). Оправданию выбранной схемы стационарного движения односвязной и тонкой щели в разрезанном материале (в рамках линейной теории упругости) и связанными с этим вопросом ограничениями на класс допускаемых нагрузок уделено внимание ниже. Пока же постулируем, что $\sigma(x)$ — геллеровского класса [2] неотрицательная финитная функция с носителем $L_0 = \{\delta_1 < x < \delta_2\} \subset L$.

В силу принципа симметрии задачу рассмотрим только в верхней полуплоскости. Будем искать установившееся поле возмущенных скоростей $u_i(x, y)$ и поле возмущенных напряжений $c_{ij}(x, y)$ ($i, j = 1, 2$) в области $D = \{|x| < \infty, y > 0\}$, а также неизвестные заранее числовые параметры d и δ_1 , фиксирующие длину раскрытия и расположение нагрузки относи-



Ф и г. 1

$$f(x) = -\frac{1}{c} \int_x^d u_2(x', 0) dx' \quad (x \in L), \quad f(d) = f(-d) = 0.$$

тельно выбранной системы координат, при следующих условиях на границе $y = 0$:

$$(1.1) \quad \sigma_{12} = 0 \quad (|x| < \infty), \quad u_2 = 0$$

$$(x \in L_1 = \{|x| > d\}),$$

$$\sigma_{22} = \sigma_\infty - \sigma(x) \quad (x \in L_0),$$

$$\sigma_{22} = \sigma_\infty \quad (x \in L - L_0);$$

$$(1.2) \quad \sigma_{22}^0 = \sigma_{22} - \sigma_\infty \leq 0 \quad (x \in L_1),$$

$$f(x) \geq 0 \quad (x \in L),$$

На бесконечности потребуем регулярного исчезновения напряжений

$$(1.3) \quad \sigma_{ij} < \text{const}/|x| \quad (|x| \rightarrow \infty, \quad i, j = 1, 2),$$

а в особых точках такого поведения функций, чтобы

$$(1.4) \quad 0 \leq w_k < \infty \quad (k = 1, 2),$$

где через w_k обозначена мощность, выделяющаяся в точках $x_i = (-d, 0)$ и $x_2 = (d, 0)$ соответственно.

Условия (1.2)–(1.4) являются дополнительными к (1.1) физическими требованиями, служащими для выделения единственного решения. При этом неравенства (1.2) выражают собой соответственно условие смыкания берегов разреза вне щели (σ_{22}^0 — полное напряжение) и непересечение берегов разреза в зоне раскрытия ($y = f(x)$ — вертикальное смещение верхнего берега). Энергетические требования (1.4) ограничивают математически возможные особенности решения в точках смены краевых условий и, кроме того, позволяют механической энергии исчезать, но не появляться в этих точках. Последнее эквивалентно отсутствию сосредоточенных сил в особых точках, производящих положительную работу. Требование неотрицательности потока энергии играет существенную роль при доказательстве теоремы единственности [3], а пример [4] показывает, как иначе возникает неединственность.

В стационарной задаче динамической теории упругости (плоская деформация) можно ввести следующие представления искомых функций через две функции комплексного переменного, с точностью до множителя совпадающие с представлениями [5]:

$$(1.5) \quad \sigma_{11} = R^{-1} \text{Re} \{ -\alpha \beta_2 \chi_1(z_1) + \beta \beta_2 \chi_1(z_2) + \alpha \beta \chi_2(z_1) - \beta_1 \beta_2 \chi_2(z_2) \},$$

$$\sigma_{12} = R^{-1} \text{Im} \{ \beta_1 \beta_2 \chi_1(z_1) - \beta^2 \chi_1(z_2) - \beta \beta_1 [\chi_2(z_1) - \chi_2(z_2)] \},$$

$$\sigma_{22} = R^{-1} \text{Re} \{ \beta \beta_2 [\chi_1(z_1) - \chi_1(z_2)] - \beta^2 \chi_2(z_1) + \beta_1 \beta_2 \chi_2(z_2) \},$$

$$u_1 = \frac{c}{2\mu R} \text{Re} \{ \beta_2 \chi_1(z_1) - \beta \beta_2 \chi_1(z_2) - \beta \chi_2(z_1) + \beta_1 \beta_2 \chi_2(z_2) \},$$

$$u_2 = \frac{c}{2\mu R} \text{Im} \{ -\beta_1 \beta_2 \chi_1(z_1) + \beta \chi_1(z_2) + \beta \beta_1 \chi_2(z_1) - \beta_1 \chi_2(z_2) \},$$

где $R = R(c) = \beta_1 \beta_2 - \beta^2$ — функция, пропорциональная функции Рэлея (c_R — единственный положительный корень $R(c) = 0$); $\beta_j = \sqrt{1 - c^2/c_j^2}$; $z_j = x + i\beta_j y$ ($j = 1, 2$); c_1 и c_2 — скорости волн расширения и сдвига соответственно; μ — модуль сдвига; $\beta = \frac{1}{2}(1 + \beta_2^2)$; $\alpha = 1 + \beta_1^2 - \beta$.

Для справки приведем соотношения, связывающие вторые производные обычных комплексных волн расширения и сдвига (комплексных по-

тенциалов смещений) $\Phi_j(z_j)$ с функциями χ_j :

$$2\mu R\Phi_1''(z_1) = -\beta_2\chi_1(z_1) + \beta\chi_2(z_1), \quad 2\mu R\Phi_2''(z_2) = -i\beta\chi_1(z_2) + i\beta_1\chi_2(z_2).$$

На разрезе $z_1 = z_2 = x$ и из (1.5) следуют выражения

$$(1.6) \quad \sigma_{12}(x, 0) = \text{Im}\{\chi_1(x)\}, \quad \sigma_{22}(x, 0) = \text{Re}\{\chi_2(x)\}.$$

Подстановка (1.6) в (1.1) при учете (1.3), (1.5) приводит к краевой задаче Гильберта: найти две аналитические в верхней полуплоскости комплексного переменного z функции $\chi_1(z)$ и $\chi_2(z)$, удовлетворяющие на действительной оси условиям

$$(1.7) \quad \text{Im}\chi_1 = 0 \quad (|x| < \infty), \quad \text{Im}\chi_2 = 0 \quad (x \in L_1), \\ \text{Re}\chi_2 = \sigma_\infty \quad (x \in L - L_0), \quad \text{Re}\chi_2 = \sigma_\infty - \sigma(x) \quad (x \in L_0),$$

а в особых точках и на бесконечности — оценкам ($j = 1, 2$)

$$(1.8) \quad |\chi_j(z)| < \frac{\text{const}}{|z \mp d|^{1/2}} \quad (z \rightarrow \pm d + 0i), \quad |\chi_j(z)| < \frac{\text{const}}{|z|} \quad (|z| \rightarrow \infty).$$

Кроме того, функции $\chi_j(z)$ должны быть такими, чтобы вычисленные через них посредством (1.5), (1.6) напряжения и скорости не противоречили неравенствам (1.2).

2. Единственное решение задачи Гильберта с разрывными коэффициентами (1.7), (1.8) (параметры d и δ_1 считаем пока известными) построим методом [2]. В дорэлеевском режиме движения нагрузки ($c < c_R$) требования (1.2), (1.4) диктуют отсутствие сингулярностей в точках $z = \pm d$. В противном случае справа от щели появились бы неограниченные растягивающие напряжения, как в теории трещин (если допустить особенность в точке $z = d$ и удовлетворить требованию $f(x) \geq 0$), или же поток энергии w_1 был бы отрицательным (особенность в точке $z = -d$).

Для определения знака w_k можно воспользоваться выражением этой величины через коэффициенты интенсивности напряжений, скорость c (с учетом направления раскрытия разреза) и постоянные параметры среды, приведенным, например, в [6], из которого следует, что $\text{sgn } w_k = (-1)^k \times \text{sgn } R$ ($k = 1, 2$).

Общее решение задачи (1.7), (1.8) можно записать в виде

$$\chi_1(z) = 0, \quad \chi_2(z) = \frac{i}{\pi} \int_{\delta_2}^{\delta_1} \left(\frac{d^2 - z^2}{d^2 - t^2} \right)^{1/2} \frac{\sigma(t) dt}{i - z} - \frac{i\sigma_\infty}{\pi} \int_{-d}^d \left(\frac{d^2 - z^2}{d^2 - t^2} \right)^{1/2} \times \\ \times \frac{dt}{t - z} + \frac{B}{(d^2 - z^2)^{1/2}},$$

а константу B в силу сказанного выше полагаем равной нулю. Разрез для униформизации радикала соединяет точки ветвления $z = \pm d$ по действительной оси; на верхнем берегу разреза радикал принимает положительные значения.

Второй интеграл в выражении для $\chi_2(z)$ сводится к интегралу [7]

$$(2.1) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}(t - z)} = - \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} \Big|_{z=x \in L_1} = - \frac{\text{sgn } x}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

поэтому решение принимает более простой вид

$$(2.2) \quad \chi_1(z) = 0, \quad \chi_2(z) = \frac{i}{\pi} \int_{\delta_2}^{\delta_1} \left(\frac{d^2 - z^2}{d^2 - t^2} \right)^{1/2} \frac{\sigma(t) dt}{t - z} + \sigma_\infty \quad (z \in D).$$

Сужение (2.2) на действительную ось с применением формул Сохоцкого — Племеля [2] приводит к выражениям

$$(2.3) \quad \chi_1(x) = 0, \quad \chi_2(x) = \begin{cases} (\sigma_\infty - \sigma(x) + ig(x)) & (x \in L, \sigma(x) \equiv 0 \text{ при } x \in L - L_0), \\ \sigma_\infty + g(x) \operatorname{sgn} x & (x \in L_1), \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left| \frac{d^2 - x^2}{a^2 - t^2} \right|^{1/2} \frac{\sigma(t) dt}{t - x} \quad (x \in L + L_1).$$

Здесь и далее интегралы понимаются в смысле главного значения, если они не существуют в римановом смысле.

Подстановка (2.2), (2.3) в формулы (1.5) даст решение поставленной задачи в D и на $L_1 + L$ только после того, как будут определены неизвестные количества d и δ_1 (координата δ_2 тогда станет известна, так как размер зоны нагружения, равный $\delta_2 - \delta_1$, естественно, задан). Кроме того, следует проверить условия (1.2). С этими целями, а также с целью изучения особенностей решения выпишем формулы для полного напряжения $\sigma_{22}^0(x, 0)$ вне щели, скорости $u_2(x, 0)$ и величины раскрытия $f(x)$, полученные при использовании (1.4), (1.5), (2.3), и представим асимптотическое поведение этих функций в односторонних окрестностях особой точки $x = d$ (аналогичное поведение будет иметь место и при $x \rightarrow -d$):

$$(2.4) \quad \sigma_{22}^0 = g(x) \operatorname{sgn} x < 0 \quad (x \in L_1), \quad \sigma_{22}^0 = -C \sqrt{x-d} + O((x-d)^{3/2})$$

$$(x \rightarrow d + 0),$$

$$u_2 = -cbg(x) = -c(df/dx) \quad (x \in L), \quad u_2 = cbC \sqrt{d-x} + O((d-x)^{3/2})$$

$$(x \rightarrow d - 0),$$

$$f(x) = b \int_x^d g(t) dt, \quad f(x) \sim \frac{2}{3} cbC (d-x)^{3/2} \quad (x \rightarrow d - 0),$$

$$C = \frac{\sqrt{2d}}{\pi} \int_{\delta_2}^{\delta_1} \frac{\sigma(t) dt}{(d-t)^{3/2} (d+t)^{1/2}} > 0, \quad b = \frac{\beta_1(1-\beta)}{2\mu R} \quad (b > 0 \text{ при } 0 < c < c_R).$$

Формулы (2.4) показывают, что напряжения и скорости непрерывны в точках $x_{1,2}$. В (2.4) использовано краевое условие, следующее из непрерывности смещений $f(+d) = 0$; другое аналогичное краевое условие $f(-d) = 0$ порождает одно уравнение для нахождения констант d и δ_1 :

$$(2.5) \quad \int_{-d}^d g(t) dt = 0.$$

Другое уравнение получим, удовлетворяя условию исчезновения на бесконечности. Из (2.2) следует

$$(2.6) \quad \chi_2(z) = \sigma_\infty - C_1 + O(1/z) \quad (|z| \rightarrow \infty)$$

и должно быть

$$(2.7) \quad C_1 \equiv \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\sigma(x) dx}{(d^2 - x^2)^{1/2}} = \sigma_\infty.$$

Решения нелинейных уравнений (2.5), (2.7) должны удовлетворять принятым условиям $\delta_1, \delta_2 \in L$, что накладывает ограничения на допускаемые функции $\sigma(x)$.

Ниже для иллюстрации рассмотрим частный вид нагрузки, имеющий точку симметрии на оси x . Естественно тогда искать симметричное относительно оси y решение ($\delta_1 = -\delta_2$). Уравнение (2.5) автоматически удовлетворяется, так как $g(x)$ становится антисимметричной функцией, а урав-

нение (2.6) имеет единственный корень $d > \delta_2$ при выполнении следующего ограничения на $\sigma(x)$ и δ_2 :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\delta_2}^{\delta_2} \frac{\sigma(x) dx}{(\delta_2^2 - x^2)^{1/2}} > \sigma_\infty,$$

которое одновременно является условием применимости рассматриваемой схемы в случае симметричных нагрузок.

Отметим, что для таких нагрузок $O(1/z)$ в (2.6) следует заменить на $O(1/z^2)$. Это связано с тем, что момент сил, приложенных к упругой полуплоскости, обращается в нуль [2].

Для прямоугольной нагрузки ($\sigma(x) = \sigma_0 = \text{const} > \sigma_\infty$, $|x| < \delta_2$) из (2.7) получим

$$(2.8) \quad d = \delta_2 / \sin(\pi \sigma_\infty / 2\sigma_0).$$

Полагая в (2.8) $\sigma_0 = P_0 / (2\delta_2)$ и устремляя δ_2 к нулю, получим результат для полудлины щели в случае сосредоточенной силы $d = P_0 / (\pi \sigma_\infty)$.

При $\delta_2 \rightarrow d$ из (2.8) вытекает $\sigma_0 \rightarrow \sigma_\infty$, тогда из (2.3), (2.4) следует $g(x) \rightarrow 0$, $f(x) \rightarrow 0$, $u_2(x) \rightarrow 0$. Этот результат можно применить к такой физической ситуации. Если рассмотреть при $t \rightarrow \infty$ предел расширения определенной порции баротропного газа из точки $x = (0, 0)$ (взрыв) на разрезе в упругой полуплоскости, то вырождение параметров расширяющейся щели и давление будут, по-видимому, такими:

$$d(t) \rightarrow \infty, \quad \sigma(x, t) \rightarrow \sigma_\infty, \quad f(x, t) \rightarrow 0, \quad \int_{-d(t)}^{d(t)} f(x, t) dx \rightarrow \text{const}.$$

Обратим теперь внимание на то, что параметры d и δ_1 как решения (2.5), (2.7) не зависят от скорости c (факт, что напряжения σ_{12} и σ_{22} на разрезе не зависят от c , известен [5]). Поэтому полученные результаты, относящиеся к разрезу, просто переносятся на статику. Только форма щели $f(x)$ через коэффициент b зависит от c ($b(c) \rightarrow \infty$, $c \rightarrow c_R$ — проявление резонансных свойств упругого тела).

Для перехода к статике внутри области найдем предел

$$(2.9) \quad \lim_{c \rightarrow 0} \frac{z_2 - z_1}{R} = \lim_{c \rightarrow 0} iy \frac{R_2 - R_1}{R} = -iy$$

и представим $\chi_2(z_2)$ в виде ряда

$$\chi_2(z_2) = \chi_2(z_1) + (z_2 - z_1) \chi_2'(z_1) + \dots$$

Подставим последнее разложение в (1.5) с учетом $\chi_1(z_j) \equiv 0$, $j = 1, 2$ и перейдем к пределу $c \rightarrow 0$, имея в виду (2.9). Получим формулы для напряжений в статическом варианте задачи

$$\sigma_{11} = \text{Re} \{ \chi_2(z) + iy \chi_2'(z) \}, \quad \sigma_{12} = -\text{Re} \{ y \chi_2'(z) \},$$

$$\sigma_{22} = \text{Re} \{ \chi_2(z) - iy \chi_2'(z) \}.$$

Отметим, что $y \chi_2'(z) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$, $x = \text{const}$ и при $|z| \rightarrow \infty$, а функция $\chi_2(z)$ по-прежнему определена равенством в (2.2).

В рассматриваемом диапазоне скоростей c нагрузка не производит работы (что довольно очевидно для симметричного случая); отсутствует и сток энергии: нет излучения в бесконечность (для этого порядок напряжений при $|x| \rightarrow \infty$ должен быть равен $O(|x|^{-1/2})$), равны нулю и потоки w_k .

Замечание. Задачу в диапазоне скоростей $0 < c < c_R$ безусловно можно поставить при более простых, но и более жестких ограничениях, требуя, например, непрерывности напряжений в концах щели, как в задачах о штампах без угловых точек [2, 5]. Однако при этом возникает вопрос о единственности решения в более широком, но все еще физически приемлемом классе функций (условия (1.4) вместо условий непрерывности).

Здесь дается положительный ответ на него. Он сохраняет силу и применительно к упомянутым задачам о штампах, если в них поставить дополнительно условие непересечения поверхности упругой среды с поверхностью штампа вне зоны контакта.

Для сопоставления рассмотрим задачу о движении трещины в условиях (1.1)–(1.4). Теперь следует только отказаться от первого условия (1.2) и допустить растягивающие напряжения при $x > d, y = 0$. Выпишем окончательный вид решения ($\chi_1(z) = 0$):

$$(2.10) \quad \chi_2(z) = \frac{i}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{A_0(z)}{A_0(t)} \frac{\sigma(t) dt}{t-z} + [1 + iA_0(z)] \sigma_\infty,$$

$$\chi_2(x) = \begin{cases} \sigma_\infty - \sigma(x) + ig(x), & x \in L, \\ -g(x) + \sigma_\infty, & x \in L_1, \end{cases} \quad \bar{g}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left| \frac{A_0(x)}{A_0(t)} \right| \frac{\sigma(t) dt}{t-x} + |A_0(x)| \sigma_\infty,$$

где в качестве однородного канонического решения задачи Гильберта (1.7), (1.8) [2] выбран радикал $A_0(z) = (d+z)^{1/2}(d-z)^{-1/2}$ с прежним правилом униформизации.

Поведение решения в малой окрестности точки x_1 аналогично случаю щели, а напряжение $\sigma_{22}^0(x, 0)$ при $x > 0$ принимает обычный для теории трещин асимптотический вид

$$\sigma_{22}^0 \sim N \left(\frac{x}{d} - 1 \right)^{-1/2}, \quad x \rightarrow d + 0, \quad N = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\sigma(t) dt}{(d^2 - t^2)^{1/2}} - \sqrt{2} \sigma_\infty.$$

Из условия непересечения (1.2) вытекает $N \geq 0$. При $N > 0$ параметр δ_1 либо просто задается, либо можно попытаться его определить из критерия разрушения при фиксированных c и $\sigma(x)$ (здесь не конкретизируем). В любом случае уравнение (2.6) определяет полудлину трещины d , меньшую соответствующей полудлины щели. Нагрузка при $N \neq 0$ производит мощность, выделяющуюся в вершине трещины.

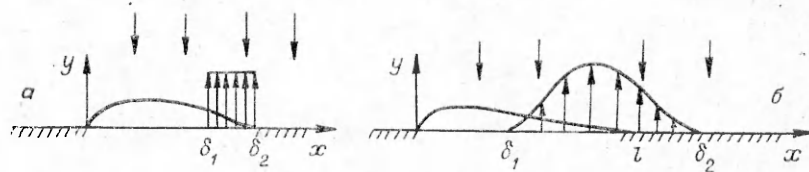
Полагая $N = 0$, снова приходим к уравнению (2.7) и решению (2.2). Преобразование (2.10) в (2.2) при условии $N = 0$ совершается аналогично [2].

3. Построим решение задачи в сверхрэлеевском дозвуковом диапазоне скоростей движения нагрузки ($c_R < c < c_2$). Предварительный анализ возможных ситуаций, основанный на учете условий (1.2)–(1.4), показывает, что теперь нагрузку следует расположить существенно несимметричным образом (фиг. 2, а, б). Поместим начало координат в конец щели, буквой l обозначим полную длину щели и получим

$$L = \{0 < x < l\}, \quad L_0 = \{\delta_1 < x < \delta_2\}, \quad L_1 = \{x \notin L, x \neq 0, l\}.$$

В качестве канонического однородного решения, используемого при построении задачи Гильберта (1.7) [2], выберем $A(z) = [(l-z)/z]^{1/2}$ с прежним правилом униформизации радикала.

Единственное решение задачи (1.7), не противоречащее условиям (1.2), (1.4) и оценкам, подобным (1.8), в результате вычисления одного интеграла,



Ф и г. 2

аналогичного (2.1), запишется в виде

$$(3.1) \quad \chi_1(z) = 0, \quad \chi_2(z) = \frac{i}{\pi} \int_{\delta_1}^l \frac{A(z) \sigma(t) dt}{A(t) t - z} + [1 - iA(z)] \sigma_\infty \quad (z \in D),$$

$$\chi_2(x + i0) = \begin{cases} \sigma_\infty - \sigma(x) + ig(x) & (x \in L), \sigma(x) \equiv 0 \quad (x \notin L_0), \\ g(x) + \sigma_\infty & (x \in L_1), \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{a(x)}{\pi} \int_{\delta_1}^l \frac{\sigma(t) dt}{a(t)(t-x)} - B(x), \quad a(x) = \left| \frac{l-x}{x} \right|^{1/2},$$

$$B(x) = \sigma_\infty a(x) \quad (x \in L + L_1).$$

Выражения $u_2(x)$ и $f(x)$ через $g(x)$ останутся прежними. Изменится только знак $b(c)$, поскольку при переходе через рэлеевскую скорость $R(c)$ изменяет свой знак на отрицательный.

Рассмотрим сначала нагрузку со скачком на переднем фронте. Тогда координату фронта следует совместить с координатой вершины щели $x = l$ из соображения необходимости удовлетворения условиям (1.1), (1.2) и в задаче останется только один неопределенный параметр l . Для фиксации длины раскрытия имеется уравнение, аналогичное (2.5):

$$(3.2) \quad \int_0^l g(x) dx = 0.$$

Проведем вычисление интегралов в решении задачи (3.1) для ступенчатой нагрузки $\sigma(x) = \sigma_0 = \text{const}$, $x \in L_0$. Интеграл в выражении для $g(x)$ вычисляется при помощи подстановки. Приведем окончательный результат, принимая временно размер зоны нагружения за единицу длины, а амплитуду динамической нагрузки за единицу напряжения ($\sigma_\infty < 1$, $\delta_1 = l - 1$):

$$(3.3) \quad g(x) = ka(x) + \begin{cases} \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{a(x) + a(l-1)}{a(x) - a(l-1)} \right|, & x \in L, \\ -1 + \frac{2}{\pi} \text{arctg} [a(x)/a(l-1)], & x \in L_1, \end{cases}$$

$$k = 1 - \frac{2}{\pi} \text{arctg} (l-1)^{1/2} - \sigma_\infty.$$

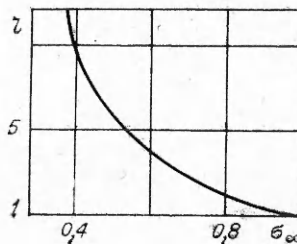
Выскажемся по поводу существования корня уравнения (3.2) для функции $g(x)$, заданной формулой (3.3). Легко установить, что при $l \rightarrow 1$ и $l \rightarrow \infty$ функция $g(x)$ соответственно положительно и отрицательно определена почти всюду на L . Поэтому в промежутке $1 < l < \infty$ должен существовать корень, по-видимому, единственный, что подтверждается расчетом. На фиг. 3 приведен график $l = l(\sigma_\infty)$ на основе (3.2), (3.3). Отметим одно неравенство, которому обязан удовлетворять корень (3.2) в случае (3.3):

$$(3.4) \quad k(l, \sigma_\infty) < 0 \Rightarrow l > 1 + \text{ctg}[(\pi/2)\sigma_\infty] \rightarrow \infty, \quad \sigma_\infty \rightarrow 0.$$

Продолжая аналитически $g(x)$ из (3.3) с $x \in L_1$ в область D , установим конечный вид решения для нагрузки прямоугольной формы:

$$\chi_2(z) = ikA(z) + \sigma_\infty - 1 + \frac{2}{\pi} \text{arctg} \left[\frac{iA(z)}{a(l-1)} \right]_{|z| \rightarrow \infty} = O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Выясним поведение основных функций на разрезе и проверим выполнение условий (1.2). Предварительно получим асимптотические следствия (3.3):



Ф и г. 3

$$(3.5) \quad g(x)_{x \rightarrow \pm 0} = k|x/l|^{1/2} + O(|x/l|^{1/2})_{x \rightarrow l-0} = M\sqrt{1 - (x/l)} + O(((x/l) - 1)^{3/2}),$$

$$g(x) = -1 + M\sqrt{(x/l) - 1} + O(((x/l) - 1)^{3/2}) \quad (x \rightarrow l + 0),$$

$$M = k + \frac{2}{\pi}(l-1)^{1/2} > 0.$$

Исходя из (1.5), (1.6), (3.3), (3.5), имеем при $y = 0$

$$(3.6) \quad \sigma_{22}^0 = g(x) < 0 \quad (x \in L_1),$$

$$f(x) = b \int_0^x g(t) dt_{x \rightarrow l+0} \sim 2bk(x/l)_{x \rightarrow l-0}^{1/2} \sim -\frac{2}{3} lbM \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{3/2}.$$

Можно установить, учитывая (3.2), что и условие $f(x) \geq 0$ на L выполнено. Таким образом, все ранее сделанные предположения оправданы.

Как следует из (3.5), (3.6), напряжение σ_{22} (и σ_{11}) не ограничено вблизи и слева от точки $x = 0$. Напряженное состояние здесь можно сравнить с состоянием около кончика трещины при ее дорэлеевском движении или в статике и аналогично напряженному состоянию в окрестности точки контакта при соударении упругих полос в сверхрэлеевском дозвуковом режиме [4]. Старшим членом асимптотики при $x \rightarrow l + 0$ для функции $\sigma_{22}^0(x)$ является константа, порожденная ненулевыми краевыми условиями в кончике щели и представляющая собой вклад неоднородного решения в асимптотическое разложение этой функции в окрестности особой точки. Интересно отметить, что в данном случае эта локально определенная асимптотика доминирует над вкладом, даваемым однородными и нелокально определенными решениями в окрестности этой же точки (второе слагаемое в разложении $\sigma_{22}^0(x)$ при $x \rightarrow l + 0$ (3.5), (3.6)). Что касается кинематических характеристик щели при $x \rightarrow l - 0$, то они те же, что и в дорэлеевском режиме.

Локальный анализ показывает, что если сдвинуть нагрузку (со скачком) влево или вправо от точки $x = l$, то не выполнится одно из условий (1.1), (1.2). Это доказывает единственность выбора схемы расположения такой нагрузки относительно щели.

Пусть теперь $\sigma(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая неотрицательная на L_0 и обращающаяся в нуль на концах L_0 функция. Тогда становится необходимым определять два числовых параметра: l и δ_1 . Дальнейший анализ проведем, полагая для определенности, что нагрузка $\sigma(x)$ происходит от внешнего поля (естественно считать, что разрывная нагрузка образовалась изнутри, например, от плоского взрыва, а гладкая — от падающих на разрез извне полей; это влияет на подсчет $\sigma_{22}^0(x, y)$ при проверке условия безотрывности). Правильней полагать в этом случае, что $\sigma(x)$ простирается до бесконечности в обе стороны, не допуская существования слабых разрывов, распространяющихся с волновыми скоростями. Но, простоты ради, будем считать, что заданная $\sigma(x)$ является достаточно хорошей аппроксимацией реального нагружения.

Выделяя особенность подынтегральной функции в выражении для $g(x)$ из (3.2), приведем его к виду

$$(3.7) \quad g(x) = \frac{a(x)}{\pi} \int_{\delta_1}^l \frac{\sigma(t) - \sigma(x)}{a(t)(t-x)} dt + \sigma_*(x) a(x) + \frac{\sigma(x)}{\pi} \ln \left| \frac{a(x) + a(\delta_1)}{a(x) - a(\delta_1)} \right| \quad (x \in L),$$

$$g(x) = M(x; l, \delta_1) a(x) - \sigma(x) \quad (x \in L_1), \quad \sigma(x) \equiv 0 \quad (x \notin L_0),$$

$$M = \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^l \frac{\sigma(t) - \sigma(x)}{a(t)(t-x)} dt + \sigma_*(x) + \frac{2\sigma(x)}{\pi a(x)} \operatorname{arctg} \frac{a(x)}{a(\delta_1)},$$

$$\sigma_*(x) = \sigma(x) \left[1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} a^{-1}(\delta_1) \right] - \sigma_\infty.$$

Запишем формулу для $\sigma_{22}^0(x, 0)$ с учетом того, что теперь полное поле напряжений представляет собой суперпозицию трех составляющих: однородного статического, внешнего переменного поля (которое существовало бы при отсутствии разреза) и возмущенного наличием щели:

$$\sigma_{22}^0 = -\sigma_\infty + \sigma(x) + \sigma_{22}(x, 0) = a(x) M(x; l, \delta_1) \quad (x \in L_1).$$

Должно выполняться неравенство

$$(3.8) \quad M(x; l, \delta_1) \leq 0$$

и, в частности,

$$(3.9) \quad M(l; l, \delta_1) \leq 0,$$

чтобы требование смыкания выполнялось локально.

В то же время, если вычислить асимптотику $g(x)$ слева от точки $x = l$, из требования локального удовлетворения условию непересечения берегов

$$df/dx = bg(x) = b[M(l; l, \delta_1)a(x) + O(a^2(x))] \leq 0 \quad (b < 0)$$

вытекает неравенство

$$(3.10) \quad M(l; l, \delta_1) \geq 0.$$

Решением системы неравенств (3.9), (3.10) является равенство

$$(3.11) \quad M(l; l, \delta_1) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^l \frac{[\sigma(t) - \sigma_\infty] t^{1/2}}{(l-t)^{3/2}} dt + \sigma_*(l) + \frac{2}{\pi} \frac{\sigma(l)}{a(\delta_1)} = 0,$$

замыкающее систему нелинейных уравнений (3.2), (3.11) для нахождения параметров l и δ_1 . Качественное исследование этой системы при условии $\max_{x \in L_0} \sigma(x) > \sigma_\infty$ и единственности экстремума $\sigma(x)$ на L_0 показывает, что

она должна иметь решение и при этом со значением l , лежащим справа от точки, в которой $\sigma(x)$ имеет максимум (см. фиг. 2, б).

Следует отметить, что (3.11) является условием обращения старшего члена асимптотики поля напряжений и скоростей в малой окрестности особой точки $x = l, y = 0$. Таким образом, решение имеет более слабую особенность в этой точке, чем в рассмотренных ранее вариантах задачи. На разрезе поведение функций вблизи $x = l$ имеет вид

$$(3.12) \quad \sigma_{22}^0(x) \sim \text{const} (x-l)^{3/2} \quad (x \rightarrow l+0), \\ df/dx \sim -b \text{const} (l-x)^{3/2}, \quad f(x) \sim b \text{const} (l-x)^{5/2} \quad (x \rightarrow l-0).$$

При выводе (3.12) для оценки разности интегралов, возникающей при оценке выражения $M(x; l, \delta_1) - M(l; l, \delta_1)$, доказана дифференцируемость подынтегральной функции по x при $x \geq l$ в (3.7) и использована формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано [8], а также сформулированное выше условие гладкости $\sigma(x)$.

Асимптотическое поведение в окрестности другого края щели будет таким же, как и в случае скачкообразной нагрузки. Ему отвечает положительный поток энергии в точку $x = 0$ [6]:

$$w_1 = -\frac{c^3 \beta_1 K_I^2}{8\mu c_2^2 R}, \quad K_I = \lim_{x \rightarrow -0} [\sigma_{22}(x, 0) \sqrt{2\pi x}], \quad R < 0.$$

Он равен мощности, развиваемой нагрузкой (вследствие несимметрии ее приложения эта мощность уже отлична от нуля). Таков баланс энергии в системе при $c_R < c < c_2$.

Можно установить, что $\sigma_{22}^0(x, 0) < 0$ при $x < 0$. Если корень (l, δ_1) системы (3.2), (3.11) единственный или, осторожности ради, выбрано наименьшее положительное l среди корней (3.2), (3.11), то и условие непересечения является выполненным. Хуже обстоит дело с проверкой условия

смыкания справа от щели (3.8). Его можно проверить асимптотически:

$$M(x) = -\sigma_{\infty} + O(1/x), \quad x \rightarrow \infty,$$

а для функций $\sigma(x)$, выпуклых кверху ($\sigma''(x) \leq 0, x \in L_0$), можно показать, что $M'_x|_{x=l} < 0$. Вместе с (3.12) это неравенство показывает, что сразу за вершиной щели на ее продолжении напряжения $\sigma_{12}^0(x, 0)$ сжимающие. Для глобальной проверки этого условия необходимы конкретные вычисления, легко осуществимые при помощи ЭВМ. При его невыполнении следует, естественно, изменить схему отрыва.

Из рассмотренного видно, что волновые эффекты заметно сказываются при околорэлеевских скоростях движения нагрузки (как, впрочем, и в других подобных задачах). При переходе через скорость волны Рэлея изменился характер особенностей решения в вершинах щели, причем для гладких нагрузок в одной из них особенность сменилась на более сильную, а в другой — на более слабую.

Одновременно решена задача об отрыве упругой среды, прижатой к жесткому плоскому основанию.

Решение стационарной задачи оправдано, если оно является пределом соответствующей нестационарной задачи, а это будет так, если скорость нагрузок не совпадает ни с одной из скоростей собственных резонансных волн упругой системы (волн, у которых фазовая скорость равна групповой) [9]. Такие случаи заранее исключены в данном рассмотрении ($c \neq c_R, c_1, c_2$).

Вопрос об отрыве упругой полосы от основания под действием силы, движущейся с постоянной дорэлеевской скоростью, рассмотрен в работе [10] (см. также библиографию к ней).

Поступила 13 V 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Yoffe E. H. The moving Griffith crack. — Philos. Mag., 1951, ser. VII, vol. 42, N 330.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
3. Freund L. B., Clifton R. J. On the uniqueness of plane elasto-dynamic solutions for running cracks. — J. Elasticity, 1974, vol. 4, N 4.
4. Симонов И. В. Стационарное дозвуковое движение разреза в упругой полосе. — Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 6.
5. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953.
6. Костров Б. В., Никитин Л. В., Флитман Л. М. Механика хрупкого разрушения. — Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3.
7. Пыхтеев Г. Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши. Новосибирск: Наука, 1980.
8. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. М.: Высшая школа, 1970, т. 1.
9. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972.
10. Adams G. G. Steady solutions for a moving load on an elastic strip resting on an elastic half plane. — Int. J. Solids Struct., 1979, vol. 15, N 11.

УДК 539.375

ВЛИЯНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ НА РОСТ ТРЕЩИНЫ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

В. И. Астафьев

(Куйбышев)

Исследованиям закономерностей роста трещин в металлах в условиях высокотемпературной ползучести за последнее время уделяется все большее внимание. Это и экспериментальные работы по выявлению параметров, определяющих скорость роста трещин в образцах (см. [1—3] и др.), и теоретические работы, рассматривающие задачу о росте трещины при различных исходных предположениях о распределении напряжений вблизи вершины трещины и критериях распространения трещин (см. [4—10] и др.).