УДК 532.59; 551.446

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОНОВЫХ ПАРАМЕТРОВ СЛОИСТОЙ СЛАБОДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

В. В. Новотрясов

Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева ДВО РАН,
690041 Владивосток, Россия
E-mail: vadimnov@poi.dvo.ru

В рамках теории волновых боров малой интенсивности в слабодиспергирующих средах сформулирована методика определения фоновых параметров таких сред. С использованием аналитической модели волнового (кноидального) бора на пикноклине слоистого мелкого моря получены выражения для расчета коэффициентов расширенного уравнения Кортевега — де Фриза: скорости линейных внутренних волн, высокочастотной дисперсии, квадратичной и кубической нелинейностей, т. е. параметров, характеризующих гидрофизический фон, по которому распространяются боры. Расчет этих параметров выполнен на основе данных прямых измерений характеристик боров: их волнограмм, нелинейной скорости, "массы" и амплитуды лидирующих солитонов, а также частот волн, замыкающих область, по которой распространяется бор. Эффективность предложенной методики подтверждена результатами численного моделирования.

Ключевые слова: слоистая мелкая вода, расширенное уравнение Кортевега — де Фриза, кубическая и квадратичная нелинейности, высокочастотная дисперсия, уединенные внутренние волны, внутренний волновой бор, полевые исследования.

DOI: 10.15372/PMTF20210110

Введение. Гидродинамическая модель слоистой (стратифицированной по плотности) мелкой воды со слабой дисперсией часто используется при численном моделировании нелинейных внутренних волн (НВВ). Наличие пакетов подобных волн является характерной особенностью мезомасштабных гидродинамических процессов в шельфовых зонах океана [1–3]. Обладая значительными амплитудами, НВВ оказывают существенное влияние на трансформацию поля скорости звука и его распространение, взмучивание придонных осадков и формирование придонного рельефа [4, 5].

Для изучения гидродинамики НВВ в рамках модели мелкой воды широкое распространение получил подход, основанный на решении уравнения Кортевега — де Фриза. Коэффициенты этого уравнения (μ — квадратичная нелинейность, β — дисперсия, c — скорость линейных волн) определяют гидрофизический фон, по которому распространяются НВВ. Длины этих волн значительно больше глубины шельфовой зоны [6, 7].

В настоящей работе приведена схема определения фоновых параметров μ, β, c, в которой в отличие от стандартной схемы, используются данные прямых измерений характеристик пакетов слабонелинейных волн, образовавшихся в результате распада низкоча-

Работа выполнена в рамках госбюджетной темы Тихоокеанского океанологического института ДВО РАН "Математическое моделирование и анализ динамических процессов в океане" (№ 0271-2019-0001).

стотных волн с малой, но конечной амплитудой (так называемые внутренние волновые боры (ВВБ)). Пакеты подобных волн достаточно регулярно наблюдаются над шельфом океана, в том числе над шельфом Японского моря [8–11].

Последовательная гидродинамическая интерпретация волновых боров проводится с использованием теории слабодиспергирующих ударных волн, основы которой сформулированы в работах [6, 12] и развиты в [13–15]. Эта теория используется также для интерпретации внутренних волновых боров [16].

В работе [15] сформулирована теория волновых боров для случая, когда становится значимым вклад в динамику ВВБ кубической нелинейности. В настоящей работе в рамках этой теории с использованием аналитической модели ВВБ для расширенного уравнения Кортевега — де Фриза (уравнения Гарднера) получены соотношения для расчета фоновых параметров μ, μ_1, β, c_0 с использованием данных натурных измерений характеристик ВВБ.

1. Основные соотношения теории модуляции волновых боров в слабодиспергирующей среде. ВВБ представляют собой расширяющиеся в пространстве нелинейные волновые пакеты, соединяющие два различных фоновых состояния гидродинамического потока и содержащие уединенные волны вблизи одной из его границ. Обычно ВВБ образуются при обрушении внутренней волны или распаде начального скачка скорости потока и (или) глубины залегания пикноклина на мористой границе шельфовой зоны океана [2, 8, 16].

Аналитическое описание ВВБ проводится в рамках теории модуляции Уизема [6], в которой асимптотическое решение для ВВБ ищется в виде медленно меняющегося периодического решения основного уравнения движения с учетом дисперсии, например уравнения Кортевега — де Фриза. Медленное изменение параметров модуляции (таких как среднее значение смещения пикноклина, амплитуда, волновое число и т. д.) определяется системой осредненных уравнений (уравнений Уизема). Для аналитического решения системы уравнений Уизема необходимо представить ее в форме инвариантов Римана. Модуляционное описание ВВБ при решении уравнения Кортевега — де Фриза впервые в такой форме приведено в работе [6].

В шельфовой зоне океана нередко реализуется ситуация, когда влияние нелинейности, имеющей более высокий порядок, чем квадратичная нелинейность, становится определяющим. В этом случае для описания НВВ используется уравнение Гарднера в канонической форме [2, 4, 17]

$$\eta_t + 6\eta\eta_x - 6\alpha\eta^2\eta_x + \eta_{xxx} = 0, \tag{1}$$

где коэффициент α зависит от стратификации воды в шельфовой зоне и может быть как положительным, так и отрицательным [12]. Далее рассматривается только положительное значение этого коэффициента.

Общая теория модуляции волновых боров для уравнения Гарднера представлена в работе [15], в которой с использованием сокращенной версии метода конечно-зонного интегрирования получена модуляционная система Гарднера — Уизема и показано, что ее можно преобразовать в известную модуляционную систему Кортевега — де Фриза. Для уравнения (1) в рамках рассматриваемой задачи, следуя [15], ограничимся кратким изложением теории модуляции стандартных волновых боров Кортевега — де Фриза.

Рассмотрим систему уравнений модуляции для уравнения (1) в форме инвариантов Римана и асимптотически точное ($t \gg 1$) решение этого уравнения с начальными условиями в виде ступеньки:

$$\eta(x,0) = \begin{cases} \eta^+, & x < 0, \\ \eta^-, & x > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Вид нелинейного члена в уравнении (1) определяет структуру решений задачи Коши (1), (2), зависящую от положения начальных параметров ступеньки η^+, η^- относительно точки поворота $\eta_* = 1/(2\alpha)$, которая является бездисперсионной характеристикой смещения $-6\eta(1-\alpha\eta)$. В дальнейшем рассматривается следующий диапазон значений параметров ступеньки:

$$\eta^+ \leqslant \eta^- \leqslant 1/(2\alpha). \tag{3}$$

Оба значения η^- и η^+ принадлежат области, где функция $w(\eta) = \eta(1-\alpha\eta)$ монотонно возрастает, поэтому существует взаимно однозначное соответствие предела уравнения Гарднера в отсутствие дисперсии и предела уравнений Кортевега — де Фриза. Это означает, что начальный разрыв в области (3) может быть описан единственным стандартным "мелководным" волновым бором Кортевега — де Фриза с солитоном возвышения на его передней границе и линейным волновым пакетом на задней границе.

Общее выражение для решения уравнения (1) в виде периодической бегущей волны приведено в [17]. Представленное через эллиптические функции Якоби это решение имеет вид

$$\eta = \eta_2 + \frac{(\eta_3-\eta_2)\,\mathrm{cn}^2\,(\theta,m)}{1-((\eta_3-\eta_2)/(\eta_4-\eta_2))\,\mathrm{sn}^2\,(\theta,m)}, \tag{4}$$

где

$$\theta = \sqrt{\alpha(\eta_3-\eta_1)(\eta_4-\eta_2)}\,(x-Vt)/2, \quad m = (\eta_3-\eta_2)(\eta_4-\eta_2)^{-1}(\eta_4-\eta_1)(\eta_3-\eta_1)^{-1}.$$

Длина волны в периодическом решении (4) задается формулой

$$L = 4K(m)\big/\sqrt{\alpha(\eta_3-\eta_1)(\eta_4-\eta_2)}\,,$$

где $K(m)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Солитонный предел $m \to 1$ достигается в двух случаях: $\eta_1 \to \eta_2$ или $\eta_3 \to \eta_4$. Рассмотрим случай $\eta_2 \to \eta_1$, т. е. солитон возвышения, направление скорости которого противоположно направлению скорости постоянного фона, задаваемого соотношением $\eta = \eta_2$:

$$\eta(\xi) = \eta_1 + \frac{\eta_3-\eta_1}{\mathrm{ch}^2(\theta) - ((\eta_3-\eta_1)/(\eta_4-\eta_1))\,\mathrm{sh}^2(\theta)}.$$

Гармонический предел $m \to 0$ достигается при $\eta_3 \to \eta_2$. В этом случае кноидальная волна (4) асимптотически трансформируется в линейную гармоническую волну

$$\eta \simeq \eta_2 + (1/2)(\eta_3-\eta_2)\cos\,(k_0(x-Vt)), \quad k_0 = \sqrt{\alpha(u_2-u_1)(u_4-u_2)}\,. \tag{5}$$

Локальная структура волнового бора Кортевега — де Фриза определяется периодическим решением (4). Соответствующие модуляции выражаются через инварианты Римана r_1, r_2, r_3 и удовлетворяют системе уравнений Уизема. Классическое автомодельное решение модуляционной системы Уизема для этого случая имеет вид [12, 18]

$$r_1 = r^+, \qquad r_3 = r^-, \tag{6}$$

где r^+, r^- — некоторые константы; зависимость $r_2(x,t)$ задается неявно выражением

$$f_2(r^+, r_2, r^-) = x/t. \tag{7}$$

Волновой бор, представляющий собой модуляционное решение (6), (7), охватывает расширяющуюся область $x^- < x < x^+$, границы которой $x^\pm = v^\pm t$ распространяются с постоянными скоростями $v^\pm$. Задняя (гармоническая) граница определяется условием $m = 0$ ($r_2 = r_1 = r^+$), передняя (солитонная) граница — условием $m = 1$ ($r_2 = r_3 = r^-$). При этом скорости $v^\pm$ соответствующих границ определяются следующим образом:

$$v^- = f_2\big|_{r_2=r_1} = 12r_1 - 6r_3 = 12r^+ - 6r^-, \qquad v^+ = f_2\big|_{r_2=r_3} = 2r_1 + 4r_3 = 2r^+ + 4r^-. \tag{8}$$

Решение (6), (7) совпадает с модуляциями, возникающими в волновом боре, порожденном начальным разрывом: $r(x,0) = r^+$, $x > 0$ и $r(x,0) = r^-$, $x < 0$ для уравнения Кортевега — де Фриза $r_t + 6rr_x + r_{xxx} = 0$ [12].

Модуляционные решения (6), (7) однозначно характеризуют асимптотическое решение для волнового бора Кортевега — де Фриза вследствие взаимно однозначного соответствия инвариантов Римана $\{r_j\}$ и физических параметров $\{\eta_j\}$ решения в форме кноидальной волны [6].

Для малоамплитудного предела (5) из решения (8) следует, что задняя граница бора ($m = 0$) распространяется на фоне $\eta = \eta_2 = \eta_3$. По аналогии для солитонной границы $m \to 1$ солитон на передней границе распространяется на фоне $\eta = \eta_1 = \eta_2$. Таким образом, если эволюция ступеньки разрешается единственным волновым бором, необходимо, чтобы на замыкающей границе выполнялось условие

$$\eta_2 = \eta_3 = \eta^-, \tag{9}$$

а на лидирующей границе — условие

$$\eta_2 = \eta_1 = \eta^+. \tag{10}$$

Согласно [15] инварианты Римана $\{r_k\}$ и физические параметры $\{\eta_i\}$ связаны соотношениями

$$\eta_2\big|_{m=0} = \eta_3\big|_{m=0} = (1 - \sqrt{1 - 4\alpha r_3}\,)/(2\alpha); \tag{11}$$

$$\eta_1\big|_{m=1} = \eta_2\big|_{m=1} = (1 - \sqrt{1 - 4\alpha r_1}\,)/(2\alpha). \tag{12}$$

С учетом того, что $r_3 = r^-$, $r_1 = r^+$, из соотношений (9)–(12) следует

$$r^- = (1 - \alpha\eta^-)\eta^-, \qquad r^+ = \eta^+(1 - \alpha\eta^+).$$

Волновой бор занимает область $v^- t < x < v^+ t$, граничные скорости $v^\pm$ равны

$$v^- = 12\eta^+(1 - \alpha\eta^+) - 6\eta^-(1 - \alpha\eta^-), \qquad v^+ = 2\eta^+(1 - \alpha\eta^+) + 4\eta^-(1 - \alpha\eta^-).$$

При этом скорость расширения области, по которой распространяется бор, составляет

$$V_{br} = 10(\eta^- - \eta^+)(1 + \alpha(\eta^- + \eta^+)). \tag{13}$$

Из (13) следует, что скорость расширения волнового бора Гарднера больше аналогичной скорости бора Кортевега — де Фриза $(V_{br})_{\mathrm{KdV}} = 10(\eta^- - \eta^+)$ при тех же начальных условиях. Фактически этот результат для бора Кортевега — де Фриза воспроизводится при $\alpha = 0$. Амплитуда солитона в волновом боре Гарднера равна

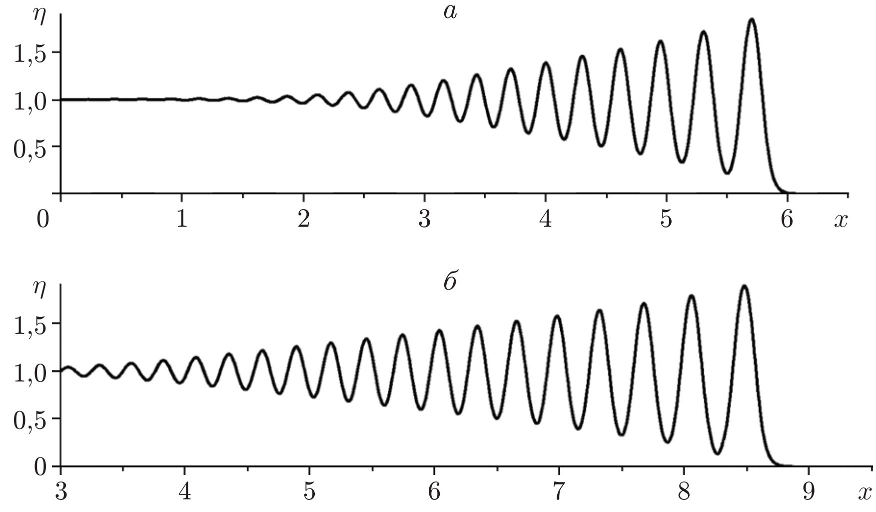
$$a^+ = (\eta_3 - \eta_1)\big|_{m=1} = 2(\eta^- - \eta^+). \tag{14}$$

Заметим, что формула (14) совпадает с классической формулой для амплитуды солитона, лидирующего в волновом боре Кортевега — де Фриза.

На рисунке представлены пространственные волнограммы ВВБ, рассчитанные для моментов времени $t_1 = 5$, $t_2 = 7$ с использованием теории для волнового бора Кортевега — де Фриза. (Все величины на рисунке и в табл. 1, 2 являются безразмерными.) Расчет волнограмм выполнялся в рамках модели мелкой воды при следующих значениях фоновых параметров: $\mu = 1{,}00$, $\mu_1 = 0{,}40$, $\alpha = 0{,}40$, $\beta = 6{,}00 \cdot 10^{-3}$, $c_0 = 1{,}00$.

На рисунке видно, что волнограммы волновых пакетов состоят из ранжированных по амплитуде уединенных пульсаций. При этом форма пульсаций вблизи фронта не является косинусоидальной, а форма колебаний в тылу волнового пакета косинусоидальная. В табл. 1 приведены значения характеристик лидирующей уединенной пульсации (солитона): амплитуды a_s, скорости V_s и эффективной ширины L_s, полученные путем прямых измерений и рассчитанные по формуле (14) и формулам

$$a_s = a^+, \qquad L_s^2 = 12\beta/(\mu a_*)/(1 - b^2); \tag{15}$$



Волнограммы ВВБ, рассчитанные для различных моментов времени:
а — $t_1 = 5$, *б* — $t_2 = 7$

Таблица 1

Значения характеристик лидирующего солитона

Способ получения характеристик	a_s	V_s	L_s
Прямое измерение	1,95	1,39	0,245
Расчет по формулам (15), (16)	2,00	1,40	0,231

$$V_s = c_0 + a_s\mu(1 - a_s/a_*)/3, \qquad V_{br} \equiv V_s - c_0 = 4\beta L_s^{-2} \tag{16}$$

($a_* \equiv \mu/(2\mu_1)$ — предельная амплитуда солитонов Гарднера; $b = 1 - a_s/a_*$).

Результаты анализа данных, приведенных в табл. 1, показывают, что амплитуда лидирующей пульсации a_s и удвоенная высота начального скачка пикноклина $2\eta_0$ имеют близкие значения, как это следует из соотношения (14). Скорость V_s лидирующей пульсации и эффективный пространственный масштаб L_s незначительно отличаются от тех же характеристик, рассчитанных по теоретическим формулам (16).

Амплитуда колебаний a в тылу волнового пакета (см. рисунок) на порядок меньше a_s, а пространственный период этих колебаний равен $\lambda \approx 0{,}235$. Сравнение двух волнограмм позволяет оценить на заданном интервале времени среднюю скорость V_s солитона и фазовую скорость c колебаний в тылу бора. Значения этих скоростей равны 1,39 и 1,005 соответственно. С использованием этих значений нетрудно определить среднюю скорость расширения области, по которой распространяется ВВБ, за счет появления новых колебаний ($V_{br} \approx 0{,}385$).

Таким образом, прямые измерения пространственно-временных характеристик ВВБ (a_s, L_s, V_s, λ, c_0, V_{br}) и использование аналитических зависимостей для их расчета позволяют определить параметры слоистой мелкой воды (скорость линейных внутренних волн, дисперсию, квадратичную и кубическую нелинейности), характеризующие гидрофизический фон в модели для исследования внутренних волн большой амплитуды в шельфовых зонах океана.

2. Расчетные соотношения для определения фоновых параметров слоистой слабодиспергирующей мелкой воды. Для того чтобы получить расчетные соотношения для параметров гидрофизического фона μ, μ_1, β, c_0, запишем уравнение Гарднера (1) в физическом пространстве, выполнив следующую замену переменных:

$$x' = \frac{x - c_0 t}{\sqrt{\beta}}, \quad t' = \frac{c_0 t}{\sqrt{\beta}}, \quad \zeta' = \mu\Big(1 - \frac{\mu}{2\mu_1}\Big)\zeta, \quad \zeta_0' = \mu\Big(1 - \frac{\mu}{2\mu_1}\Big)\zeta_0.$$

В новых переменных уравнение Гарднера (1) принимает вид [5]

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (c_0 + \mu\zeta - \mu_1\zeta^2)\,\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \beta\,\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0, \tag{17}$$

где ζ — смещение изопикны, расположенной в невозмущенном состоянии на глубине, соответствующей максимальному значению частоты плавучести; c_0 — скорость распространения линейных внутренних волн. Уравнение (17) имеет стационарные решения в форме уединенных внутренних волн (УВВ) [9]. Укажем некоторые свойства УВВ. В случае слоистой мелкой воды постоянной глубины коэффициенты уравнения (17) являются постоянными и определяются неизменной по времени и горизонтальным координатам стратификацией жидкости по плотности. В рамках предлагаемой методики будем полагать, что значение коэффициента кубической нелинейности μ_1 является отрицательным, значения квадратичной нелинейности μ и дисперсии β — положительными. В этом случае солитонное решение в виде УВВ возвышения записывается следующим образом:

$$\zeta(x,t) = \frac{d}{1 + b\,\mathrm{ch}\,[(x - x_0)/L_s]}, \qquad t = t_0. \tag{18}$$

Здесь $b = \sqrt{1 - (\mu_1/\mu)d}$, $d = 24(\beta/\mu)/L_s^2$ — параметры, зависящие от произвольного параметра L_s, характеризующего эффективную ширину УВВ. Другим свободным параметром является фаза УВВ, т. е. ее положение в момент регистрации. Далее при выводе необходимых соотношений фаза полагается равной нулю.

Рассмотрим характеристики солитонного решения (18), которое можно получить путем прямых измерений, и связь этих характеристик с параметрами гидрофизического фона. К этим характеристикам относятся характеристики лидирующей УВВ: амплитуда a_s, первый момент M_1, или "масса", ее пространственный масштаб, или эффективная ширина L_s, а также скорость распространения в покоящейся воде V_s и скорость распространения УВВ в сопутствующей системе координат V_{br}, движущейся со скоростью линейной волны c_l. Указанные характеристики связаны с параметрами гидрофизического фона аналитическими выражениями (15), (16). К доступным для измерений характеристикам относятся также длина λ_w малоамплитудных волн, замыкающих ВВБ. Учитывая равенство λ_w и L_s, предпочтительнее проводить оценку L_s путем прямого измерения длины волны.

Характерной особенностью солитонных решений (15) является существование решений, ограниченных по амплитуде и не ограниченных по ширине (длительности), так называемых столообразных УВВ, амплитуда которых равна a_*. Заметим, что данная характеристика УВВ является критическим параметром в теории ВВБ. Численная оценка характеристики имеет большое значение, например, при анализе влияния НВВ на различные гидрофизические процессы на шельфе.

В работе [19] предложен алгоритм для определения амплитуды a_* по данным натурных измерений характеристик лишь солитонного решения (15). Уточним этот алгоритм, используя равенство $L_s = \lambda_w$. Введем переменную τ согласно выражению $\tau^2 = (1-b)/(1+b)$ и константу $q = M_1/(2a_sL_s)$. В новых обозначениях выражение для M_1 преобразуем к виду

$$\tau = \mathrm{th}\,(q\tau). \tag{19}$$

Соотношение (19) при заданном значении q представляет собой трансцендентное уравнение для определения переменной τ. Определив корень этого уравнения $\tau = \tau_*$, можно

Таблица 2

Значения параметров гидрофизического фона

Способ получения характеристик	μ	μ_1	β, 10^{-3}	c_0
Прямое измерение	1,00	0,40	6,00	1,00
Расчет по формулам (21)–(23)	1,07	0,45	6,09	1,01

определить параметр $b_* = (1-\tau_*^2)/(1+\tau_*^2)$ и с учетом соотношения $a_s/a_* = 1-b_*$ получить выражение для расчета предельного значения амплитуды солитонов Гарднера

$$a_* = a_s(1 + \tau_*^{-2})/2. \qquad (20)$$

Таким образом, рассчитав константу q по данным прямых измерений амплитуды a_s лидирующей солитоноподобной пульсации, ее первого момента M_1, длины волны λ_w, замыкающей ВВБ, и решив уравнение (19), находим его корень τ_*. Далее, используя соотношение (20), для предельной амплитуды солитонов Гарднера получаем значение a_*.

Схема определения параметров, описывающих фон слоистой, слабодиспергирующей мелкой воды (μ, μ_1, β, c_l), следующая. Полагая, что предельная амплитуда солитонов Гарднера a_* определена, измеряем скорость V_s и амплитуду a_s. Тогда с учетом (16) для коэффициента μ получаем

$$\mu = 3(V_{br}/a_s)(1 - a_s/a_*)^{-1}. \qquad (21)$$

Отсюда находим выражение для расчета параметра кубической нелинейности

$$\mu_1 = \mu/(2a_*). \qquad (22)$$

Для определения параметра дисперсии вновь используем соотношение (16), которое определяет зависимость β от измеряемых параметров: скорости расширения ВВБ $V_{br} = V_s - c_l$ и длины волны в тылу бора λ_w. В результате получаем

$$\beta = (V_s - c_0)\lambda_w^2/4. \qquad (23)$$

Таким образом, с использованием результатов численного моделирования распада скачка единичной амплитуды в среде с фоновыми параметрами $\mu = 1{,}00$, $\mu_1 = 0{,}40$, $\alpha = \mu/\mu_1$, $\beta = 6{,}00\cdot 10^{-3}$, $c_0 = 1{,}00$ выполнена проверка полученных соотношений (21)–(23). Результаты моделирования представлены на рисунке и в табл. 2, в которой для каждого фонового параметра указаны его фоновое значение и значение, рассчитанное по формулам (21)–(23). Результаты сравнения значений параметров показывают, что относительная погрешность не превышает 10 % и достаточна для оценки влияния НВВ на гидрофизические процессы в шельфовой зоне океана.

Заключение. В работе представлена оригинальная методика определения фоновых параметров слоистой, слабодиспергирующей мелкой воды, основанная на данных прямых измерений пространственно-временных характеристик внутренних волновых боров.

В рамках теории волновых боров Кортевега — де Фриза для уравнения Гарднера показано существование у солитонов этого уравнения предельной амплитуды, получено трансцендентное уравнение для определения этого параметра, предложен алгоритм его оценки по данным измерений характеристик ВВБ. Также установлено, что параметры квадратичной и кубической нелинейностей линейно зависят от скорости расширения волновой зоны бора, параметр высокочастотной дисперсии пропорционален квадрату длины волны, замыкающей ВВБ, а ее фазовая скорость равна разности скорости лидирующего солитона и скорости расширения ВВБ.

Предложенная методика определения значений параметров гидрофизического фона в модели мелкой слабодиспергирующей слоистой воды по данным прямых измерений характеристик нелинейных внутренних волн во многих отношениях (финансовом, техническом, методическом) является менее затратной по сравнению с традиционной методикой определения этих параметров в морских условиях. Экспресс-оценка возможных значений фоновых параметров по предложенной схеме может быть использована при исследовании геофизических процессов в шельфовой зоне океана. Поэтому предполагается продолжить развитие данной методики.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Jackson Ch. R.** An atlas of internal solitary-like waves and their properties. Alexandria: Global Ocean Associates, 2004. [Electron resourse]. Режим доступа: https://www.internal_wave_atlas.com.
2. **Helfrich K. R., Melville W. K.** Long nonlinear internal waves // Annual Rev. Fluid Mech. 2006. V. 38. P. 395–425.
3. **Grimshaw R., Helfrich K., Scotti A.** Large amplitude internal waves in the coastal ocean // Nonlinear Process. Geophys. 2011. V. 18. P. 653–665.
4. **Apel J. R., Ostrovsky L. A., Stepanyants Y. A., Lynch J. F.** Internal solitons in the ocean and their effect on underwater sound // J. Acoust. Soc. Amer. 2007. V. 121, N 2. P. 695–722.
5. **Wang B., Bogucki D., Redekopp L.** Internal solitary waves in a structured thermocline with implications for resuspension and the formation of thin particle laden layers // J. Geophys. Res. 2001. V. 106, N C5. P. 9565–9585.
6. **Уизем Д.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
7. **Миропольский Ю. З.** Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
8. **Smyth N. F., Holloway P. E.** Hydraulic jump and undular bore formation on a shelf break // J. Phys. Ocean. 1988. V. 18, N 7. P. 947–962.
9. **Grimshaw R.** Environmental stratified flows. Boston: Kluwer, 2001.
10. **Novotryasov V. V., Stepanov D. V., Yaroshchuk I. O.** Observations of internal undular bores on the Japan/East Sea shelf-coastal region // Ocean Dynamics. 2016. V. 66, iss. 1. P. 19–25.
11. **Ляпидевский В. Ю., Новотрясов В. В., Храпченков Ф. Ф., Ярощук И. О.** Внутренний волновой бор в шельфовой зоне моря // ПМТФ. 2017. Т. 58, № 5. С. 60–71.
12. **Гуревич А. В., Питаевский Л. В.** Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1973. Т. 65. С. 590–604.
13. **Гуревич А. В., Крылов А. Л., Эль Г. А.** Нелинейные модулированные волны в дисперсионной гидродинамике // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1990. Т. 98. С. 1605–1626.
14. **Гуревич А. В., Крылов А. Л., Мазур Н. Г., Эль Г. А.** Эволюция локализованных возмущений в гидродинамике Кортевега — де Вриза // Докл. сов. физики. 1992. Т. 37. С. 198–201.
15. **Kamchatnov A. M., Kuo Y.-H., Liu T.-C., et al.** Undular bore theory for the Gardner equation // Phys. Rev. E. 2012. V. 86, iss. 3. 036605.
16. **Apel J. R.** A new analytical model for internal solitons in the ocean // J. Phys. Ocean. 2003. V. 33. P. 2247–2269.
17. **Vassilev V. M., Djondjorov P. A., Hadzhilazova M. Ts., Mladenov I. M.** Explicit parametrization on Willmore surfaces // AIP Conf. Proc. 2011. V. 1404, N 86. P. 201–206.

18. **Захаров В. Е.** Теория солитонов / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. М.: Наука, 1980.
19. **Новотрясов В. В., Пермяков М. С.** Экспериментально-теоретическое определение предельной амплитуды и минимальной длительности уединенных волн в слабодиспергирующем мелком море // ПМТФ. 2019. Т. 60, № 3. С. 67–72.

Поступила в редакцию 29/IX 2020 г.,
после доработки — 29/IX 2020 г.
Принята к публикации 26/X 2020 г.