УДК 532.529.3

К расчету течений газожидкостных смесей модифицированным узловым методом характеристик

В.С. Суров

Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454021

E-mail: surovvictor@gmail.com

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 4, Vol. 16, 2023.

Суров В.С. К расчету течений газожидкостных смесей модифицированным узловым методом характеристик // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 4. — С. 431–450.

Для расчета течений газожидкостных смесей предложен модифицированный обратный метод характеристик, в алгоритм которого введен дополнительный дробный временной шаг, что позволяет без потерь точности и устойчивости проводить вычисления с большим временным шагом. Обсуждается постановка граничных условий на криволинейных стенках применительно к многомерному узловому методу характеристик, который базируется на расщеплении вдоль координатных направлений исходной системы уравнений на ряд одномерных подсистем. Для граничных точек, расположенных на криволинейных непроницаемых поверхностях, предложен способ расчета, основанный на методике фиктивных узлов. При тестировании модифицированного метода характеристик рассчитано сверхзвуковое взаимодействие однородного дисперсного потока с преградой для режима течения с присоединенным ударным скачком. Решены задачи об установившихся течениях смеси около внешнего тупого угла, а также около конуса — аналогов течений Прандтля–Майера и Буземана в газовой динамике. Результаты вычислений сопоставлены с имеющимися автомодельными решениями и отмечено их удовлетворительное совпадение.

DOI: 10.15372/SJNM20230407
EDN: EKKKGD

Ключевые слова: *односкоростная газожидкостная смесь, многомерный узловой метод характеристик, модифицированный обратный метод характеристик, граничные условия.*

Surov V.S. To the calculation of flows of gas-liquid mixtures by a modified nodal characteristics // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 4. — P. 431–450.

To calculate flows of a gas-liquid mixture, a modified inverse method of characteristics is proposed, in whose algorithm an additional fractional time step is introduced, which makes it possible to carry out calculations with a large time step without loss of accuracy and stability. A formulation of boundary conditions on curvilinear walls is discussed in relation to the multidimensional nodal method of characteristics, which is based on splitting along the coordinate directions of the original system of equations into a number of one-dimensional subsystems. For the boundary points located on curvilinear impenetrable surfaces, a calculation method based on the method of fictitious nodes is proposed. When testing the modified method, the supersonic interaction of a homogeneous dispersed flow with a barrier is calculated for a flow regime with an attached shock wave. Problems of steady mixture flows near an external obtuse angle, as well as near a cone, which are analogues of the Prandtl–Meyer and Busemann flows in gas dynamics, are solved. The calculation results are compared with available self-similar solutions, and a satisfactory agreement is reached.

Keywords: *single-velocity gas-liquid mixture, multidimensional nodal method of characteristics, modified inverse method of characteristics, boundary conditions.*

Введение

Односкоростная модель гетерогенной среды [1] используется при моделировании волновых процессов в пузырьковых жидкостях, во вспененных жидкостях и полимерах, в запыленных газах, а также для локализации контактных поверхностей в многожидкостной гидродинамике [2–4]. При интегрировании уравнений модели в работе применен многомерный узловой метод характеристик (МУМХ) [5]. Методика МУМХ основана на расщеплении исходной системы уравнений по пространственным направлениям на ряд одномерных подсистем с их последующим интегрированием с помощью обратного метода характеристик (ОМХ) из [6]. Использованная в работе методика расщепления по направлениям применялась в работах [7, 8]. Заметим, что ОМХ также используется при конструировании алгоритмов сеточно-характеристического метода [9], который применяется для расчета параметров в отдельных узлах конечно-разностной сетки. В данной работе используется модифицированный обратный метод характеристик (МОМХ) с дополнительным дробным временным шагом, что позволяет без потерь точности и устойчивости проводить вычисления с большим временным шагом. Используемый в работе вариант многомерного метода характеристик, предназначенный для интегрирования эволюционных уравнений гиперболического типа, существенно проще в реализации по сравнению с описанными в литературе модификациями характеристического подхода из [10–13], базирующихся на общей теории характеристик.

Двумерные уравнения модели односкоростной бинарной смеси идеального газа с показателем адиабаты γ со второй несжимаемой фракцией (жидкостью), выражающие законы сохранения массы, импульса и энергии для каждой фракции смеси для плоских ($N = 0$) и с осевой симметрией ($N = 1$, $0x$ — ось симметрии) течений, имеют вид

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \alpha\rho^0_{liq}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha\rho^0_{liq}u}{\partial x} + \frac{\partial \alpha\rho^0_{liq}v}{\partial y} + \frac{\alpha\rho^0_{liq}vN}{y} = 0,\\
\frac{\partial \alpha\rho^0_{liq}u}{\partial t} + \frac{\partial \alpha\big(p + \rho^0_{liq}u^2\big)}{\partial x} + \frac{\partial \alpha\rho^0_{liq}uv}{\partial y} + \frac{\alpha\rho^0_{liq}uvN}{y} = f_x,\\
\frac{\partial \alpha\rho^0_{liq}v}{\partial t} + \frac{\partial \alpha\rho^0_{liq}vu}{\partial x} + \frac{\partial \alpha\big(p + \rho^0_{liq}v^2\big)}{\partial y} + \frac{\alpha\rho^0_{liq}v^2N}{y} = f_y,\\
\frac{\partial \alpha\rho^0_{liq}e_{liq}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha u\big(\rho^0_{liq}e_{liq} + p\big)}{\partial x} + \frac{\partial \alpha v\big(\rho^0_{liq}e_{liq} + p\big)}{\partial y} + \frac{\alpha v\big(\rho^0_{l}e_{liq} + p\big)N}{y} = f_xu + f_yv,\\
\frac{\partial (1-\alpha)\rho^0_g}{\partial t} + \frac{\partial (1-\alpha)\rho^0_g u}{\partial x} + \frac{\partial (1-\alpha)\rho^0_g v}{\partial y} + \frac{(1-\alpha)\rho^0_g vN}{y} = 0, \qquad (1)\\
\frac{\partial (1-\alpha)\rho^0_g u}{\partial t} + \frac{\partial (1-\alpha)\big(p + \rho^0_g u^2\big)}{\partial x} + \frac{\partial (1-\alpha)\rho^0_g uv}{\partial y} + \frac{(1-\alpha)\rho^0_g uvN}{y} = -f_x,\\
\frac{\partial (1-\alpha)\rho^0_g v}{\partial t} + \frac{\partial (1-\alpha)\rho^0_g vu}{\partial x} + \frac{\partial (1-\alpha)\big(p + \rho^0_g v^2\big)}{\partial y} + \frac{(1-\alpha)\rho^0_g v^2N}{y} = -f_y,\\
\frac{\partial (1-\alpha)\rho^0_g e_g}{\partial t} + \frac{\partial (1-\alpha)u\big(\rho^0_g e_g + p\big)}{\partial x} + \frac{\partial (1-\alpha)v\big(\rho^0_g e_g + p\big)}{\partial y} +\\
\frac{(1-\alpha)v\big(\rho^0_g e_g + p\big)N}{y} = -f_xu - f_yv,
\end{gathered}
$$

где p — давление; u и v — компоненты вектора скорости; f_x и f_y — проекции плотности сил межфракционного взаимодействия [1] на оси $0x$ и $0y$; α — объемная доля жидкой фракции; ρ_g^0 и ρ_{liq}^0 — физические плотности газа и жидкости; ε_k и $e_k = \varepsilon_k + \frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)$ — удельная внутренняя и полная энергии k-й фракции ($k = g{,}liq$). Отметим близкую к использованной в работе односкоростную гиперболическую модель (см. [2]), которая применяется при моделировании разнообразных задач.

Просуммировав соответствующие законы сохранения по составляющим смесь фракциям, получим законы сохранения массы, импульса и энергии для смеси в целом:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u}{\partial x} + \frac{\partial\rho v}{\partial y} + \frac{\rho vN}{y} &= 0,\\
\frac{\partial\rho u}{\partial t} + \frac{\partial\left(p+\rho u^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial\rho uv}{\partial y} + \frac{\rho uvN}{y} &= 0,\\
\frac{\partial\rho v}{\partial t} + \frac{\partial\rho vu}{\partial x} + \frac{\partial\left(p+\rho v^2\right)}{\partial y} + \frac{\rho v^2N}{y} &= 0,\\
\frac{\partial\rho e}{\partial t} + \frac{\partial u(\rho e+p)}{\partial x} + \frac{\partial v(\rho e+p)}{\partial y} + \frac{v(\rho e+p)N}{y} &= 0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $\rho = \alpha\rho_{liq}^0 + (1-\alpha)\rho_g^0$ — плотность смеси; $\varepsilon = \frac{1}{\rho}\left[\alpha\rho_{liq}^0\varepsilon_{liq} + (1-\alpha)\rho_g^0\varepsilon_g\right]$ и $e = \varepsilon + \frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)$ — внутренняя и полная энергии смеси на единицу объема. В частности, для рассматриваемой в работе газожидкостной смеси уравнение состояния имеет вид

$$
\varepsilon = \frac{1}{\rho}\left[\alpha\rho_{liq}^0\varepsilon_{liq} + \frac{(1-\alpha)p}{(\gamma-1)}\right],
\tag{3}
$$

где полагалось $\varepsilon_{liq} = \mathrm{const}$, поскольку в используемом варианте модели не учитывался межфракционный теплообмен. Отметим работу [14], в которой расчеты ряда задач проводились при наличии межфракционного теплообмена. Уравнения (2) в квазилинейной форме принимают вид

$$
\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{vN}{y} = 0, \qquad \frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{Dv}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{D\varepsilon}{Dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} = 0,
$$

где $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$. Учитывая (3), а также равенство $\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\alpha}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}$, закон сохранения энергии для смеси, в целом, может быть переписан как

$$
\frac{Dp}{Dt} - c^2\frac{D\rho}{Dt} = 0,
\tag{4}
$$

где $c^2 = \frac{\gamma p}{(1-\alpha)\rho}$ — квадрат скорости звука в смеси. Таким образом, система уравнений газожидкостной смеси в квазилинейной форме принимает вид

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{vN}{y}\right)=0,\\
\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0,\\
\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+\rho c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{vN}{y}\right)=0,\\
\frac{\partial\alpha}{\partial t}+u\frac{\partial\alpha}{\partial x}+v\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{vN}{y}\right)=0.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Отметим, что в системе (5) отсутствуют плотности сил межфракционного взаимодействия. В случае необходимости плотности сил межфракционного взаимодействия можно найти из соответствующих уравнений системы (1). Корни характеристического уравнения системы (5) — действительные числа, кроме того, собственные векторы, соответствующие собственным значениям системы, линейно независимы, поэтому система (5) относится к гиперболическому типу [15]. Заметим также, что используемая в работе модель среды построена исключительно на законах сохранения без привлечения, в отличие от модели [2], дополнительных предположений.

1. Многомерный узловой метод характеристик

Рассмотрим малый временной интервал, а именно шаг интегрирования по времени для системы (5). Изменения параметров, которые претерпевают за этот малый промежуток времени, можно найти, суммируя локальные изменения, которые происходят по отдельным координатным направлениям. Иными словами, для нахождения приближенного решения системы (5) за указанный промежуток времени сначала решается подсистема

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{vN}{y}\right)=0,\\
\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}=0,\\
\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+\rho c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{vN}{y}\right)=0,\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial t}+u\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{vN}{y}\right)=0,
\end{gathered}
\tag{6}
$$

получающаяся из (5), в которой оставлены слагаемые, изменяющие параметры течения только в направлении оси $0x$. Затем, после интегрирования (6), базируясь на новом распределении определяющих переменных, решается следующая подсистема

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\rho}{\partial t}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+\rho\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{vN}{y}\right)=0,\\
\frac{\partial u}{\partial t}+v\frac{\partial u}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0,\\
\frac{\partial p}{\partial t}+v\frac{\partial p}{\partial y}+\rho c^2\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{vN}{y}\right)=0,\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial t}+v\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\alpha\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{vN}{y}\right)=0,
\end{gathered}
\tag{7}
$$

в которой учитываются изменения только вдоль координатного направления $0y$.

Характеристическое уравнение подсистемы (6) имеет корни: $\xi_1 = u - c$, $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = u$, $\xi_5 = u + c$. Соотношения совместности вдоль характеристических направлений $dx/dt = u \pm c$ имеют вид

$$dp \pm \rho c du + \frac{\rho v c^2 N}{y(u \pm c)} dt = 0. \tag{8}$$

На траекторной характеристике $dx/dt = u$ выполняются равенства

$$dp - c^2 d\rho = 0, \qquad dv = 0, \qquad d\alpha - \frac{\alpha}{\rho} d\rho = 0, \tag{9}$$

которые непосредственно следуют из (6).

Характеристическое уравнение подсистемы (7) имеет корни: $\zeta_1 = v - c$, $\zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = v$, $\zeta_5 = v + c$. Соотношения совместности вдоль характеристических направлений $dy/dt = v \pm c$ имеют вид

$$dp \pm \rho c dv + \frac{\rho v c^2 N}{y(v \pm c)} dt = 0. \tag{10}$$

На траекторной характеристике $dy/dt = v$ выполняются равенства

$$dp - c^2 d\rho = 0, \qquad du = 0, \qquad d\alpha - \frac{\alpha}{\rho} d\rho = 0, \tag{11}$$

которые следуют из (7).

Для двумерного варианта МУМХ процесс вычислений при переходе с t^n временного шага на t^{n+1} состоит из двух тактов. На первом узлы расчетной области перебираются вдоль оси $0x$, и в них по процедуре МОМХ определяются промежуточные значения параметров $(\widetilde{p}, \widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{\rho}, \widetilde{\alpha})^{n+1}$. На втором на основе данных первого такта определяются окончательные величины $(p, u, v, \rho, \alpha)^{n+1}$ путем применения МОМХ в направлении оси $0y$.

2. Модифицированный обратный метод характеристик

Опишем процедуру МОМХ для первого промежуточного такта. Расчет параметров смеси на втором такте проводится аналогично. Для численного интегрирования системы (6) достаточно определить значения искомых величин $(\widetilde{p}, \widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{\rho}, \widetilde{\alpha})^{n+1}$ в узле A (рисунок 1) по их известным значениям в узлах, находящихся на n-м временном слое. В отличие от ранее использованного способа расчета [6], вводится дополнительный полуцелый временной слой. Для решения задачи применялась описанная ниже итерационная процедура. Предполагается, что на нулевой внешней итерации ($\sigma = 0$) искомые переменные в узле (x_k, t^{n+1}) совпадают с их значениями в узле (x_k, t^n). В этом случае прямые линии с характеристическими направлениями $dx/dt = u$, $dx/dt = u \pm c$ аппроксимируются выражениями:

$$x_k - x_B^{(\sigma)} = (u + c)^{(\sigma)} \Delta t/2, \qquad x_k - x_C^{(\sigma)} = u^{(\sigma)} \Delta t/2, \qquad x_k - x_D^{(\sigma)} = (u - c)^{(\sigma)} \Delta t/2.$$

Точки пересечения этих прямых с полуцелым временным слоем определяются равенствами:

$$\begin{aligned} x_B^{(\sigma)} &= x_k - (u+c)^{(\sigma)}\Delta t/2, \\ x_C^{(\sigma)} &= x_k - u^{(\sigma)}\Delta t/2, \\ x_D^{(\sigma)} &= x_k - (u-c)^{(\sigma)}\Delta t/2. \end{aligned} \tag{12}$$

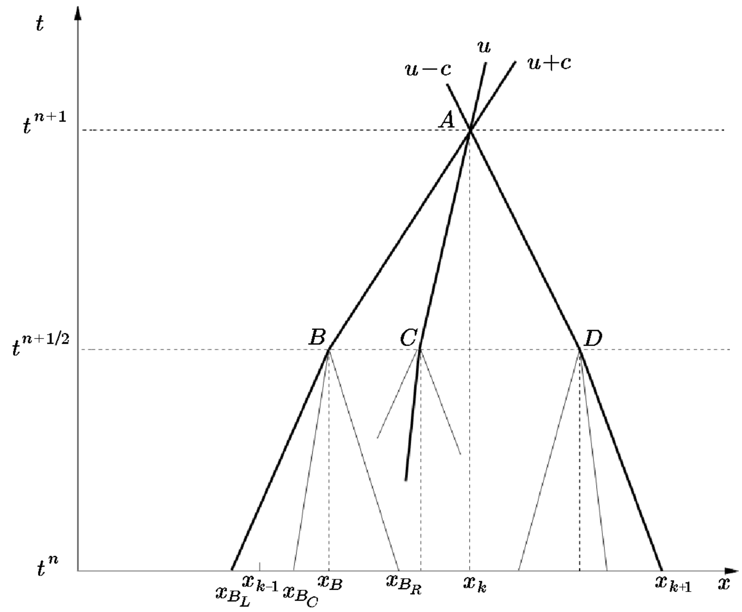

Рис. 1. Схема расчета параметров в точке (x_k, t^{n+1})

Рассмотрим схему расчета параметров в точке m, где через m обозначены точки B, C и D. На нулевой внутренней итерации ($\omega_m = 0$) считаем, что искомые переменные в точке $(x_m, t^{n+1/2})$ совпадают с их значениями в точке (x_m, t^n). Значения переменных в этих точках определяются линейной интерполяцией по известным значениям из ближайших к ним узлов на t^n-м временном слое. Из точки m, выпустив из них характеристики, найдем точки их пересечения с t^n-м временным слоем, которые определяются равенствами:

$$\begin{aligned} x_{m_L}^{(\omega_m)} &= x_m - (u+c)_m^{(\omega_m)}\frac{\Delta t}{2}, \\ x_{m_C}^{(\omega_m)} &= x_m - u_m^{(\omega_m)}\frac{\Delta t}{2}, \\ x_{m_R}^{(\omega_m)} &= x_m - (u-c)_m^{(\omega_m)}\frac{\Delta t}{2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Значения переменных (p, u, v, ρ, α) в точках $(x_{mL}, x_{mC}, x_{mR})^{(0)}$ находятся линейной интерполяцией по известным значениям из ближайших к ним узлов на t^n-м временном слое. Перепишем дифференциальные соотношения (8) и (9) в конечно-разностном виде как

$$
\begin{gathered}
\widetilde{p}_m^{(\omega_m+1)} - p_{mL}^{(\omega_m)} + (\rho c)_{mL}^{(\omega_m)} \left(\widetilde{u}_m^{(\omega_m+1)} - u_{mL}^{(\omega_m)}\right) + \left(\frac{\rho v c^2}{y(u+c)}\right)_{mL}^{(\omega_m)} \frac{N dt}{2} = 0, \\
\widetilde{p}_m^{(\omega_m+1)} - p_{mR}^{(\omega_m)} - (\rho c)_{mR}^{(\omega_m)} \left(\widetilde{u}_m^{(\omega_m+1)} - u_{mR}^{(\omega_m)}\right) + \left(\frac{\rho v c^2}{y(u-c)}\right)_{mR}^{(\omega_m)} \frac{N dt}{2} = 0, \\
\widetilde{v}_m^{(\omega_m+1)} - v_{mC}^{(\omega_m)} = 0, \\
\widetilde{p}_m^{(\omega_m+1)} - p_{mC}^{(\omega_m)} + \left(c_{mC}^{(\omega_m)}\right)^2 \left(\widetilde{\rho}_m^{(\omega_m+1)} - \rho_{mC}^{(\omega_m)}\right) = 0, \\
\rho_{mC}^{(\omega_m)} \left(\widetilde{\alpha}_m^{(\omega_m+1)} - \alpha_{mC}^{(\omega_m)}\right) - \alpha_{mC}^{(\omega_m)} \left(\widetilde{\rho}_m^{(\omega_m+1)} - \rho_{mC}^{(\omega_m)}\right) = 0.
\end{gathered}
\tag{14}
$$

Решая подсистему (14) при $\omega_m = 0$ относительно переменных $(\widetilde{p}, \widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{\rho}, \widetilde{\alpha})_m^{(1)}$, найдем уточненные значения искомых функций в точках B, C и D. Затем по этим данным из выражений (13) вычисляются новые координаты $(x_{mL}, x_{mC}, x_{mR})^{(0)}$, которые в свою очередь используются для определения переменных $(\widetilde{p}, \widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{\rho}, \widetilde{\alpha})_m^{(2)}$ из (14), где необходимо положить $\omega_m = 1$. Описанные итерационные процессы для расчета значений параметров в точках B, C и D продолжаются до сходимости. При невязке 10^{-7} требуется, как правило, 5–7 итераций. Затем на основе данных, полученных для этих точек из подсистемы

$$
\begin{gathered}
\widetilde{p}_A^{(\sigma+1)} - p_B^{(\sigma)} + (\rho c)_B^{(\sigma)} \left(\widetilde{u}_A^{(\sigma+1)} - u_B^{(\sigma)}\right) + \left(\frac{\rho v c^2}{y(u+c)}\right)_B^{(\sigma)} \frac{N dt}{2} = 0, \\
\widetilde{p}_A^{(\sigma+1)} - p_D^{(\sigma)} - (\rho c)_D^{(\sigma)} \left(\widetilde{u}_A^{(\sigma+1)} - u_D^{(\sigma)}\right) + \left(\frac{\rho v c^2}{y(u-c)}\right)_D^{(\sigma)} \frac{N dt}{2} = 0, \\
\widetilde{v}_A^{(\sigma+1)} - v_C^{(\sigma)} = 0, \\
\widetilde{p}_A^{(\sigma+1)} - p_C^{(\sigma)} + \left(c_C^{(\sigma)}\right)^2 \left(\widetilde{\rho}_A^{(\sigma+1)} - \rho_C^{(\sigma)}\right) = 0, \\
\rho_C^{(\sigma)} \left(\widetilde{\alpha}_A^{(\sigma+1)} - \alpha_C^{(\sigma)}\right) - \alpha_C^{(\sigma)} \left(\widetilde{\rho}_A^{(\sigma+1)} - \rho_C^{(\sigma)}\right) = 0
\end{gathered}
\tag{15}
$$

находим уточненные значения $(\widetilde{p}, \widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{\rho}, \widetilde{\alpha})^{(1)}$ в точке A. Далее вычисления повторяются. Из точки A на основе новых данных в этом узле выпускаются характеристики до их пересечения с прямой $t = t^{n+1/2}$, что дает возможность определить новые положения точек B, C и D. Затем из подсистемы (14) находятся уточненные значения параметров в этих точках, а по ним из (15) определяются новые значения определяющих величин смеси $(\widetilde{p}, \widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{\rho}, \widetilde{\alpha})^{(2)}$ в точке A. И так далее. Итерации продолжаются до сходимости.

Аналогичные формулы используются и на втором такте в направлении координатной оси $0y$, позволяющие определить окончательные значения искомых параметров $(\rho, u, v, p, \alpha)^{n+1}$ в узлах расчетной области, которые имеют вид

$$
\begin{gathered}
y_{sL}^{(\mu_s)} = y_s - (\widetilde{v}+\widetilde{c})_s^{(\mu_s)}\frac{\Delta t}{2}, \quad y_{sC}^{(\mu_s)} = y_s - \widetilde{v}_s^{(\mu_s)}\frac{\Delta t}{2}, \quad y_{sR}^{(\mu_s)} = y_s - (\widetilde{v}-\widetilde{c})_s^{(\mu_s)}\frac{\Delta t}{2}, \\
\widetilde{p}_s^{(\mu_s+1)} - p_{sL}^{(\mu_s)} + (\rho c)_{sL}^{(\mu_s)}\left(\widetilde{v}_s^{(\mu_s+1)} - v_{sL}^{(\mu_s)}\right) + \left(\frac{\rho v c^2}{y(v+c)}\right)_{sL}^{(\mu_s)}\frac{N dt}{2} = 0, \\
\widetilde{p}_s^{(\mu_s+1)} - p_{sR}^{(\mu_s)} - (\rho c)_{sR}^{(\mu_s)}\left(\widetilde{v}_s^{(\mu_s+1)} - v_{sR}^{(\mu_s)}\right) + \left(\frac{\rho v c^2}{y(v-c)}\right)_{sR}^{(\mu_s)}\frac{N dt}{2} = 0, \\
\widetilde{u}_s^{(\mu_s+1)} - u_{sC}^{(\mu_s)} = 0, \\
\widetilde{p}_s^{(\mu_s+1)} - p_{sC}^{(\mu_s)} + \left(c_{sC}^{(\mu_s)}\right)^2\left(\widetilde{\rho}_s^{(\mu_s+1)} - \rho_{sC}^{(\mu_s)}\right) = 0, \\
\rho_{sC}^{(\mu_s)}\left(\widetilde{p}_s^{(\mu_s+1)} - p_{sC}^{(\mu_s)}\right) - \alpha_{sC}^{(\mu_s)}\left(\widetilde{\rho}_s^{(\mu_s+1)} - \rho_{sC}^{(\mu_s)}\right) = 0
\end{gathered}
\tag{16}
$$

и

$$
\begin{gathered}
y_B^{(\omega)} = y_k - (\widetilde{v}+\widetilde{c})^{(\omega)}\Delta t/2, \quad y_C^{(\omega)} = y_k - \widetilde{v}^{(\omega)}\Delta t/2, \quad y_D^{(\omega)} = y_k - (\widetilde{v}-\widetilde{c})^{(\omega)}\Delta t/2, \\
p_A^{(\omega+1)} - \widetilde{p}_B^{(\omega)} + (\widetilde{\rho c})_B^{(\omega)}\left(v_A^{(\omega+1)} - \widetilde{v}_B^{(\omega)}\right) + \left(\frac{\widetilde{\rho}\widetilde{v}\widetilde{c}^2}{y(\widetilde{v}+\widetilde{c})}\right)_B^{(\omega)}\frac{N dt}{2} = 0, \\
p_A^{(\omega+1)} - \widetilde{p}_D^{(\omega)} - (\widetilde{\rho c})_D^{(\omega)}\left(v_A^{(\omega+1)} - \widetilde{v}_D^{(\omega)}\right) + \left(\frac{\widetilde{\rho}\widetilde{v}\widetilde{c}^2}{y(\widetilde{v}-\widetilde{c})}\right)_D^{(\omega)}\frac{N dt}{2} = 0, \\
u_A^{(\omega+1)} - \widetilde{u}_C^{(\omega)} = 0, \\
p_A^{(\omega+1)} - \widetilde{p}_C^{(\omega)} - \left(\widetilde{c}_C^{(\omega)}\right)^2\left(\rho_A^{(\omega+1)} - \widetilde{\rho}_C^{(\omega)}\right) = 0, \\
\widetilde{\rho}_C^{(\omega)}\left(\alpha_A^{(\omega+1)} - \widetilde{\alpha}_C^{(\omega)}\right) - \alpha_C^{(\omega)}\left(\rho_A^{(\omega+1)} - \widetilde{\rho}_C^{(\omega)}\right) = 0,
\end{gathered}
\tag{17}
$$

где μ_s и ω — внутренние и внешние номера итераций, а индекс s принимает значения B, C и D (см. рис. 1, в котором необходимо заменить ось $0x$ на $0y$). Выписанные выше соотношения (16), (17) — конечно-разностные представления формул (10), (11).

Отметим, что для нелинейных задач характеристики имеют криволинейный вид. Повышение точности вычислений при использовании МОМХ обусловлено тем, что интегрирование соотношений совместности проводится не по прямым линиям, как в оригинальном ОМХ, а вдоль ломаных линий, более точно аппроксимирующие характеристики.

3. Алгоритм для расчета параметров в граничных узлах

В [5] с использованием МУМХ рассчитывались различные течения гетерогенных сред, в которых граничные условия ставились на вертикальных и горизонтальных поверхностях. В ряде случаев, например при обтекании тел сложной формы потоком гетерогенной среды, необходимо использовать граничные условия на криволинейных непроницаемых стенках. Отметим работы [16–19], в которых описаны различные способы постановки граничных условий на криволинейных поверхностях, но применительно к конечно-разностным или конечно-объемным схемам вычислений.

Рассмотрим методику расчета параметров смеси в граничных узлах, расположенных на неподвижных криволинейных твердых стенках для МУМХ. В данной работе полагается, что точки пересечения вертикальных и горизонтальных линий, вдоль которых проводится интегрирование уравнений системы, с твердой стенкой не связаны друг с другом, в отличие от [20], где полагалось, что из каждой граничной точки обязательно исходит как горизонтальная, так и вертикальная линии, с расположенными на них расчетными узлами. Используемый в работе способ постановки граничных условий более удобен в случаях, когда в расчетной области имеются подвижные или деформируемые границы [21].

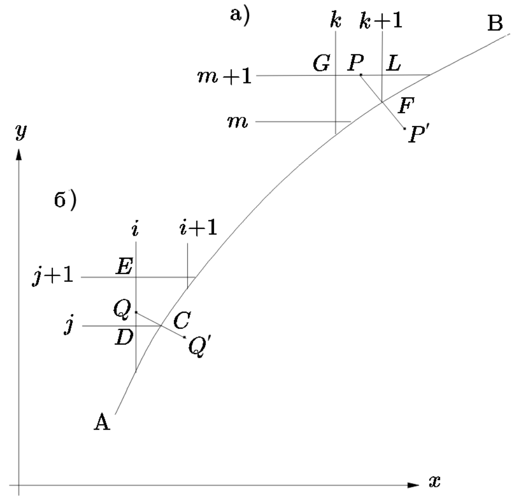

Рис. 2. Схемы расчета параметров в граничных точках на преграде: вдоль горизонтального (а) и вертикального (б) направлений. AB — криволинейная стенка

Рассмотрим алгоритм расчета параметров смеси в граничном узле C для первого шага (в направлении оси $0x$). Для решения поставленной задачи сначала с использованием линейной интерполяции по узловым точкам $(i,\ j)$ и $(i,\ j{+}1)$ определим значения параметров смеси в узле Q — точке пересечения прямой, соединяющей узлы D и E, с нормалью к стенке, проведенной из граничного узла C (рис. 2 а). Далее найденный таким способом вектор скорости $\mathbf{u}_Q$ в точке Q разложим на нормальную и касательную составляющие к поверхности преграды:

$$(\mathbf{u}_Q)_n = u_Q \sin\delta - v_Q \cos\delta, \qquad (\mathbf{u}_Q)_\tau = u_Q \cos\delta - v_Q \sin\delta,$$

где δ — угол между касательной к граничной кривой и осью $0x$. Полагаем, что в зеркально расположенном за стенкой фиктивном узле Q', симметричном узлу Q, значения параметров смеси те же, что и в точке Q, за исключением нормальной к преграде составляющей скорости, которая задается равной по модулю, но ориентированной в противоположном направлении. То есть полагаем, что справедливо соотношение $\left(\mathbf{u}_{Q'}\right)_n = -\left(\mathbf{u}_Q\right)_n$. И наконец, для нахождения искомых параметров среды $(\widetilde{p}, \widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{\rho}, \widetilde{\alpha})^{(n+1)}$ в точке C на стенке решается задача Римана со значениями параметров смеси в точках Q и Q', при этом условие непроницаемости в рассматриваемом узле на стенке выполняется автоматически. В данной работе при решении задачи распада произвольного разрыва использовался характеристический римановский решатель из [22]. Вместо него могут быть применены и другие решатели, например линеаризованный решатель Римана из [23], который дает совпадающие результаты. Найденные таким способом значения $(\widetilde{p}, \widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{\rho}, \widetilde{\alpha})^{(n+1)}$ в граничных узлах в дальнейшем используются для вычисления промежуточных величин во внутренних узлах расчетной области.

На втором шаге на линиях, параллельных координатной оси $0y$, параметры смеси $(p, u, v, \rho, \alpha)^{(n+1)}$, например, в граничном узле F, расположенном на твердой стенке, находятся из задачи Римана по значениям параметров в точках P и P' (рис. 2 б). Переменные в узле P определяются с использованием линейной интерполяции по данным из узловых точек G и L. В фиктивном узле P' переменные такие же, как в узле P, за исключением нормальной к границе составляющей скорости, которая равняется $(\mathbf{u}_{P'})_n = -(\mathbf{u}_P)_n$.

4. Результаты численного моделирования

Для тестирования использованного метода интегрирования сопоставим результаты численных расчетов, полученные с использованием МУМХ, с данными ряда автомодельных задач. В качестве первой задачи рассчитаем сверхзвуковое течение однородного дисперсного потока около клина с углом раствора φ_k для режима течения с присоединенной ударной волной (УВ) (рис. 3). На входном, выходном и верхнем участках расчетной области ставились мягкие граничные условия, через которые смесь может свободно втекать или вытекать.

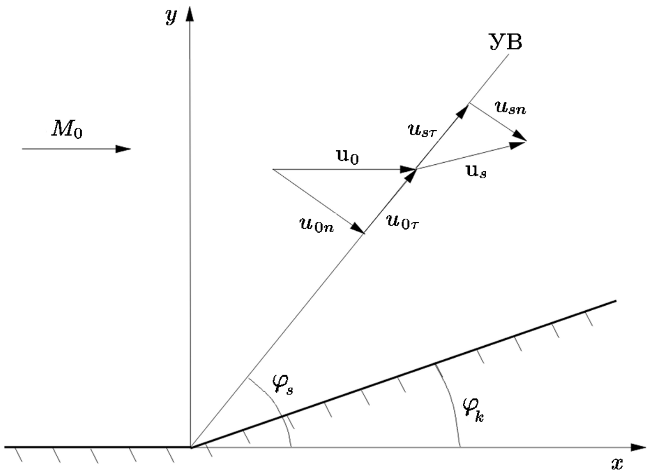

Рис. 3. Схема течения смеси около клина для режима с присоединенной УВ

На рис. 4 представлено типичное установившееся распределение относительного давления при $M_0 = 1.8$, $p_0 = 0.1$ МПа, $\alpha_0 = 0.02$, $\varphi_k = 10^\circ$ для водно-воздушной смеси ($\gamma = 1.4$; $\rho^0_{g0} = 1.16$ кг/м^3; $\rho^0_{liq} = 1000$ кг/м^3), полученное к моменту времени $t = 0.28$ с (по достижению установившегося течения) на сетке из 200×400 узлов. Здесь $M_0 = u_0/c_0$ — число Маха в набегающем потоке, $c_0 = \sqrt{\dfrac{\gamma p_0}{(1-\alpha_0)\rho_0}}$ — скорость звука в невозмущенной среде. Начальные данные во всей расчетной области имели значения: $p = p_0$, $u = c_0 M_0$, v=0, $\alpha = \alpha_0$. Для рассмотренных данных результаты численного моделирования при угле отраженной ударной волны $\varphi_s = 44.4^\circ$ следующие: $p_s = 1.68$ МПа; $\rho_s = 30.2$ кг/м^3; $\alpha_s = 0.029$, которые совпадают с аналитическим решением, рассмотренным ниже.

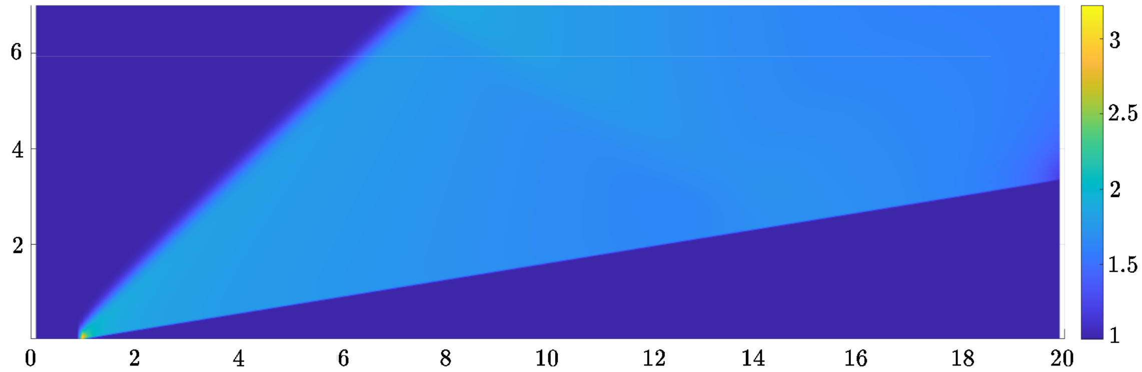

Рис. 4. Распределение относительного давления к моменту времени $t = 0.21$ с

Решение рассматриваемой задачи также может быть получено аналитически. Для этого разложим векторы скорости до и после скачка на нормальные и касательные составляющие к фронту присоединенного ударного скачка (рис. 3):

$$|\mathbf{u}_0|_n = |\mathbf{u}_0| \sin\varphi_s, \quad |\mathbf{u}_0|_\tau = |\mathbf{u}_0| \cos\varphi_s, \quad |\mathbf{u}_s|_n = |\mathbf{u}_s| \sin(\varphi_s - \varphi_k), \quad |\mathbf{u}_s|_\tau = |\mathbf{u}_s| \cos(\varphi_s - \varphi_k).$$

Поскольку тангенциальные составляющие скорости одинаковы для обоих векторов $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u}_s$, то имеем

$$|\mathbf{u}_s| = |\mathbf{u}_0| \frac{\cos\varphi_s}{\cos(\varphi_s - \varphi_k)}. \tag{18}$$

Соотношения Ренкина–Гюгонио в направлении ортогональном к фронту ударного скачка имеют вид

$$\begin{gathered} \rho_0 |\mathbf{u}_0| \sin\varphi_s = \rho_s |\mathbf{u}_s| \sin(\varphi_s - \varphi_k), \\ p_0 + \rho_0 |\mathbf{u}_0|^2 \sin^2\varphi_s = p_s + \rho_s |\mathbf{u}_s|^2 \sin^2(\varphi_s - \varphi_k). \end{gathered} \tag{19}$$

Уравнения (18), (19) рассматриваются совместно с выражением для ударной адиабаты смеси (см. [24])

$$\frac{\rho_0}{\rho_s} = 1 - \frac{2(1-\alpha_0)(p_s - p_0)}{p_0(\gamma - 1) + p_s(\gamma + 1)}. \tag{20}$$

Угол наклона присоединенной УВ при заданном числе Маха может быть найден из нелинейного уравнения

$$\frac{\tan(\varphi_s - \varphi_k)}{\tan\varphi_s} = 1 - \frac{\sin^2\varphi_s - \dfrac{1}{2}\sin(2\varphi_s)\tan(\varphi_s - \varphi_k)}{\dfrac{1}{M_0^2} + \dfrac{\gamma+1}{2(1-\alpha_0)}\left(\sin^2\varphi_s - \dfrac{1}{2}\sin(2\varphi_s)\tan(\varphi_s - \varphi_k)\right)}, \tag{21}$$

которое следует из соотношений (18)–(20).

На рис. 5 представлена зависимость угла наклона присоединенной УВ от числа Маха в набегающем потоке для клина с углом $\varphi_k = 3^\circ$, полученного из уравнения (21). Точками отмечены данные численных расчетов.

В качестве следующей задачи рассчитаем установившееся течение смеси около внешнего тупого угла (рис. 6). Эта задача является аналогом течения Прандтля–Майера в газовой динамике с центрированной волной разрежения (ВР). Рассматриваемая задача — автомодельная.

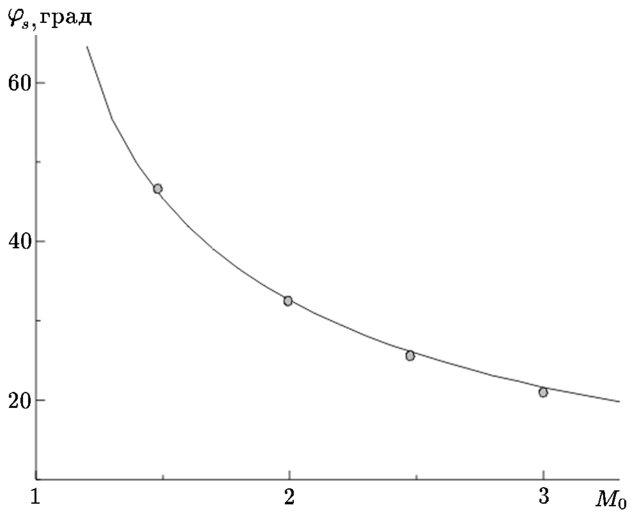

Рис. 5. Зависимость угла наклона присоединенной УВ от числа Маха в набегающем потоке. Точки — данные численных расчетов

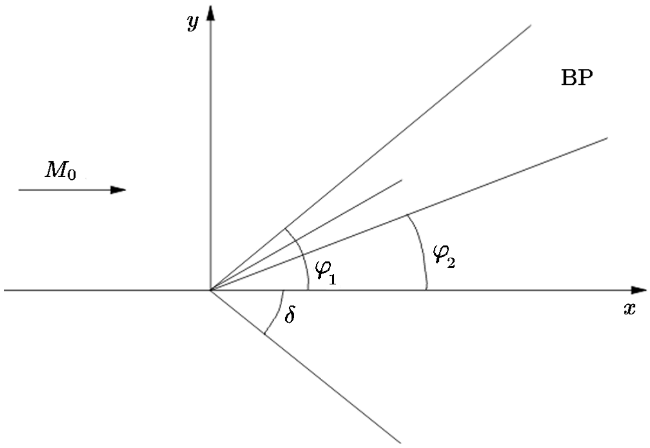

Рис. 6. Схема течения смеси около клина для режима с центрированной волной разрежения

При введении переменной $\xi = y/x$ уравнения (5) при $N = 0$, в которых также опущены производные по времени от параметров смеси, приводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [25])

$$\frac{d\rho}{d\xi} = -\frac{\rho\left[u(v-u\xi)+c^2\xi\right]}{(v-u\xi)^2 + \dfrac{c^2(1+\xi^2)}{2}\left(\dfrac{\alpha}{1-\alpha}+\dfrac{\rho c^2}{p}-1\right)} \equiv \Omega,$$

$$\frac{dp}{d\xi} = c^2\Omega, \qquad \frac{du}{d\xi} = \frac{\xi(v-u\xi)}{\rho(1+\xi^2)}\Omega,$$

$$\frac{dv}{d\xi} = -\frac{\xi(v-u\xi)}{\rho(1+\xi^2)}\Omega, \qquad \frac{d\alpha}{d\xi} = \frac{\alpha}{\rho}\Omega.$$

Поскольку угол φ связан с переменной ξ соотношением $\xi = \tan\varphi$, предыдущая система уравнений перепишется как

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{\rho\left[u(v - u\tan\varphi) + c^2\tan\varphi\right]\left(1+\tan^2\varphi\right)}{(v-u\tan\varphi)^2 + \dfrac{c^2(1+\tan^2\varphi)}{2}\left(\dfrac{\alpha}{1-\alpha} + \dfrac{\rho c^2}{p} - 1\right)} \equiv \Omega,$$

$$\frac{dp}{d\varphi} = c^2\left(1+\tan^2\varphi\right)\Omega, \qquad \frac{du}{d\varphi} = \frac{\tan\varphi(v-u\tan\varphi)}{\rho(1+\xi^2)}\Omega, \tag{22}$$

$$\frac{dv}{d\varphi} = -\frac{v-u\tan\varphi}{\rho}\Omega, \qquad \frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{\alpha\left(1+\tan^2\varphi\right)}{\rho}\Omega.$$

Система (22) интегрировалась от $\varphi_0 = \arctan\left(1/\sqrt{M_0^2-1}\right)$ до такого значения угла φ, при котором выполнено соотношение $\delta = \arctan(|v|/u)$. В этом случае достигается условие непротекания смеси через поверхность преграды.

На рис. 7 представлено типичное распределение относительного давления, полученное описанным выше методом МУМХ к моменту времени $t = 0.36$ с на сетке из 200×600 узлов при $\delta = 10^0$ по достижении установившегося течения. Параметры смеси те же, что и в предыдущей задаче, т. е. $p_0 = 0.1$ МПа, $\rho^0_{liq} = 1000$ кг/м^3, $\rho^0_{g0} = 1.16$ кг/м^3, $\alpha_0 = 0.02$. Число Маха в набегающем потоке $M_0 = 1.9$. Начальные данные во всей расчетной области: $p = p_0$, $u = c_0M_0$, $v = 0$, $\alpha = \alpha_0$. Для рассматриваемых данных система (20) дает следующие значения на поверхности преграды: $p/p_0 = 0.55$ МПа; $\rho/\rho_0 = 0.66$; $\alpha = 0.013$. Отметим совпадение расчетных данных, полученных численным методом, с автомодельным решением.

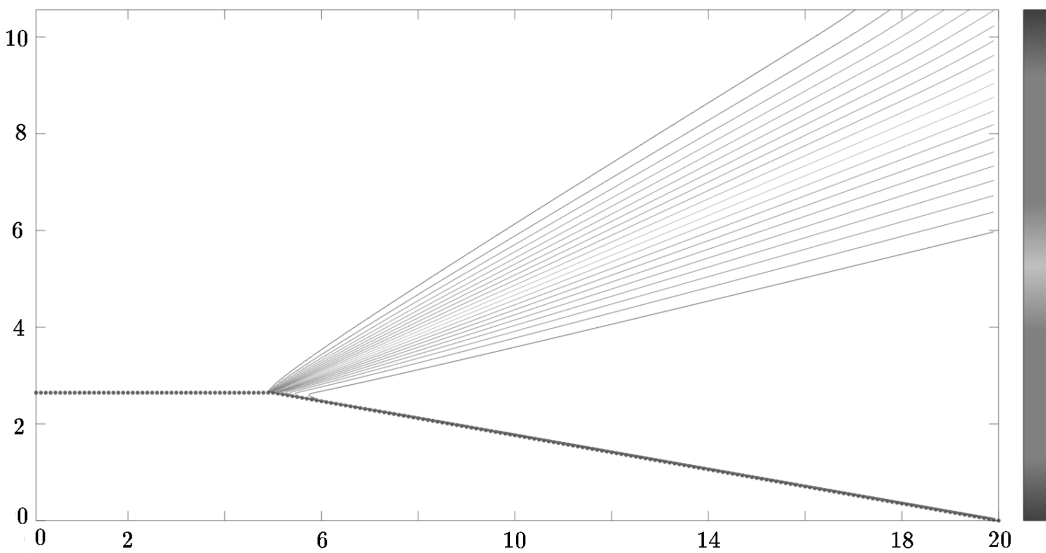

Рис. 7. Распределение относительного давления к моменту времени $t = 0.36$ с

В качестве следующей задачи рассмотрим стационарное обтекание под нулевым углом атаки конуса с углом полураствора φ_c потоком газожидкостной смеси для режима течения с присоединенным коническим скачком уплотнения [26] (рис. 8).

Рассматриваемая задача — автомодельная. Раскладывая векторы скорости до и после скачка на нормальные и касательные к фронту присоединенной ударной волны (УВ), получим

$$u_{0n} = |\mathbf{u}_0|\sin\varphi_s, \qquad u_{0\tau} = |\mathbf{u}_0|\cos\varphi_s, \qquad u_{sn} = |\mathbf{u}_s|\sin\delta, \qquad u_{s\tau} = |\mathbf{u}_s|\cos\delta.$$

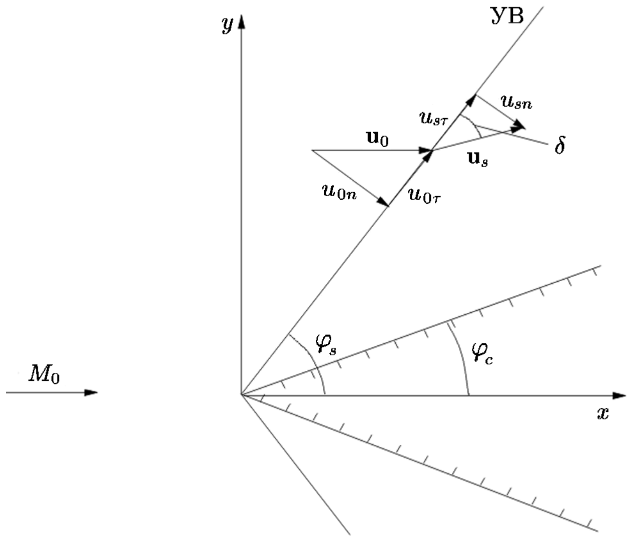

Рис. 8. Схема течения смеси около конуса для режима с присоединенной ударной волной

Поскольку тангенциальные составляющие скорости одинаковы для обоих векторов $|\mathbf{u}_0|$ и $|\mathbf{u}_s|$, то имеем

$$|\mathbf{u}_0|\cos\varphi_s = |\mathbf{u}_s|\cos\delta. \tag{23}$$

Вектор скорости $\mathbf{u}_s$, в отличие от плоского случая (обтекания клина), неколлинеарен образующей поверхности конуса. При переходе через присоединенную УВ в соотношениях Ренкина–Гюгонио для прямого скачка следует использовать нормальные компоненты скорости. Таким образом, имеем

$$\rho_0|\mathbf{u}_0|\sin\varphi_s = \rho_s|\mathbf{u}_s|\sin\delta, \qquad p_0 + \rho_0|\mathbf{u}_0|^2\sin^2\varphi_s = p_s + \rho_s|\mathbf{u}_s|^2\sin^2\delta. \tag{24}$$

Соотношения (23), (24) рассматриваются совместно с ударной адиабатой смеси (20).

Для того чтобы найти распределение параметров между присоединенной УВ и поверхностью конуса необходимо проинтегрировать систему дифференциальных уравнений модели (5), в которых следует опустить производные по времени от параметров смеси. Будем искать автомодельное решение задачи, т. е. такое решение, когда все зависимые переменные являются функциями только одного независимого переменного $\xi = y/x$. С учетом соотношений $\dfrac{\partial}{\partial x} = -\dfrac{\xi}{x}\dfrac{d}{d\xi}$ и $\dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{1}{x}\dfrac{d}{d\xi}$ система в частных производных приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\rho}{d\xi} = -\frac{\rho v(v-u\xi)}{(v-u\xi)^2 + \dfrac{c^2(1+\xi^2)}{2}\left(\dfrac{\alpha}{1-\alpha} + \dfrac{\rho c^2}{p} - 1\right)} \equiv \Omega,$$

$$\frac{dp}{d\xi} = c^2\Omega, \qquad \frac{du}{d\xi} = \frac{\xi c^2}{\rho(v-\xi u)}\Omega,$$

$$\frac{dv}{d\xi} = -\frac{c^2}{\rho(v-\xi u)}\Omega, \qquad \frac{d\alpha}{d\xi} = \frac{\alpha}{\rho}\Omega.$$

Поскольку угол φ связан с переменной ξ соотношением $\xi = \tan\varphi$, предыдущая система уравнений перепишется как

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{\rho v\,(v - u\tan\varphi)\left(1+\tan^2\varphi\right)}{\tan\varphi\left[(v-u\tan\varphi)^2 - c^2(1+\tan^2\varphi)\right]} \equiv \Omega,$$

$$\frac{dp}{d\varphi} = \left(1+\tan^2\varphi\right)c^2\Omega, \qquad \frac{du}{d\varphi} = \frac{\tan\varphi(1+\tan^2\varphi)c^2}{\rho(v-u\tan\varphi)}\Omega, \tag{25}$$

$$\frac{dv}{d\varphi} = -\frac{(1+\tan^2\varphi)c^2}{\rho(v-u\tan\varphi)}\Omega, \qquad \frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{\alpha\left(1+\tan^2\varphi\right)}{\rho}\Omega.$$

Решение системы уравнений (25) должно, во-первых, удовлетворять граничному условию непротекания через поверхность конуса при $\varphi = \varphi_c$. Во-вторых, на фронте УВ должны выполняться соотношения (20), (23), (24), в которые входит угол наклона присоединенной УВ φ_s. Следует иметь в виду, что этот угол заранее неизвестен, поэтому заменим краевую задачу со сложными нелинейными условиями на границах расчетной области на задачу Коши, что существенно упростит вычисления. Для этого произвольно зададим значение φ_s, тогда из соотношений (20), (23), (24) определим параметры потока на фронте УВ. В частности, угол δ определяется из уравнения

$$\frac{\tan\delta}{\tan\varphi_s} = 1 - \frac{\sin^2\varphi_s - \dfrac{1}{2}\sin 2\varphi_s\tan\delta}{\dfrac{1}{M_0^2} + \dfrac{\gamma+1}{2(1-\alpha_0)}\left(\sin^2\varphi_s - \dfrac{1}{2}\sin 2\varphi_s\tan\delta\right)}.$$

Остальные параметры смеси на фронте ударного скачка находятся из выражений

$$\rho_s = \rho_0\frac{\tan\varphi_s}{\tan\delta},$$
$$|\mathbf{u}_s| = |\mathbf{u}_0|\frac{\cos\varphi_s}{\cos\delta},$$
$$\alpha_s = \alpha_0\frac{\rho_s}{\rho_0},$$
$$p_s = p_0 + \rho_0|\mathbf{u}_0|^2\left(\sin^2\varphi_s - \frac{1}{2}\sin 2\varphi_s\tan\delta\right).$$

Затем проинтегрируем систему (23) численно от φ_s до такого значения φ, при котором выполнено соотношение

$$\delta = \arctan\left(v(\varphi)/u(\varphi)\right). \tag{26}$$

При выполнении равенства (26) направление движения потока вблизи поверхности конуса параллельно его образующей, тем самым будет определен угол полураствора обтекаемого конуса φ_c. Варьируя φ_s, найдем зависимость $\varphi_c(\varphi_s)$, обращая которую определим зависимость угла наклона присоединенной УВ φ_s от угла полураствора конуса φ_c при заданном числе Маха в набегающем потоке.

На рис. 9 представлена зависимость угла наклона присоединенной УВ от угла полураствора конуса с числом Маха $M_0 = 3$ в набегающем потоке, полученная по описанному выше алгоритму из системы (25). Точками на этом рисунке отмечены данные численных расчетов, полученные с использованием модифицированного МУМХ.

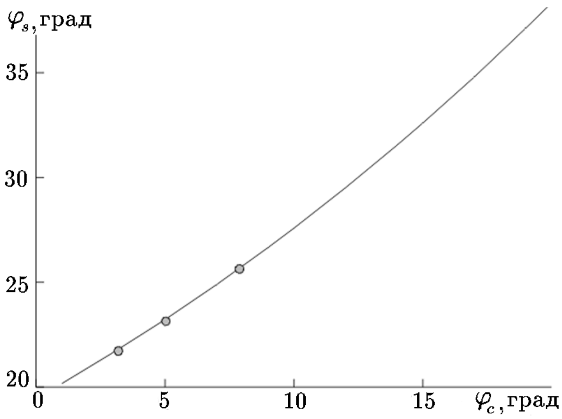

Рис. 9. Зависимость угла наклона присоединенной УВ от угла полураствора конуса. Точки — данные численных расчетов

Заключение

Для расчета течений односкоростных газожидкостных смесей предложен модифицированный обратный метод характеристик, в алгоритм которого введен дополнительный дробный временной шаг, что позволяет без потерь точности и устойчивости проводить вычисления с большим временным шагом. Описывается способ расчета параметров смеси в граничных точках, основанный на методике фиктивных узлов, применительно к многомерному узловому методу характеристик, который базируется на расщеплении вдоль координатных направлений исходной системы уравнений на ряд одномерных подсистем. Для ряда двумерных задач результаты расчетов, полученные с помощью модифицированного МУМХ, сопоставлены с автомодельными решениями и отмечено их удовлетворительное совпадение.

Рассмотренные в работе модификации базового узлового метода характеристик из [5], связанные с введением в алгоритм расчета дробного временного шага, а также со снятием ограничений при постановке граничных условий на расположение линий, вдоль которых производится интегрирование соответствующих подсистем уравнений [20], могут быть эффективно использованы и в других гиперболических моделях механики сплошной среды, в частности, в расчетах течений многоскоростных гетерогенных сред [27], при вычислении деформации твердых тел в рамках модели Прандтля–Рейса [28] и других задачах.

Литература

1. **Суров В.С.** Односкоростная модель гетерогенной среды с гиперболичным адиабатическим ядром // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2008. — Т. 48, № 6. — С. 1111–1125. Перевод: Surov V.S. One-velocity model of a heterogeneous medium with a hyperbolic adiabatic kernel // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2008. — Vol. 48, № 6. — P. 1048–1062. — https://doi.org/10.1134/S0965542508060146.

2. **Kapila A., Menikoff R., Bdzil J., Son S., Stewart D.** Two-phase modeling of deflagration-to-detonation transition in granular materials: reduced equations // Phys. Fluids. — 2001. — Vol. 13. — P. 3002–3024.

3. **Murrone A., Guillard H.** A five equation reduced model for compressible two phase flow problems // J. Comput. Phys. — 2005. — Vol. 202. — P. 664–698.

4. **Ma Z.H., Causon D.M., Qian L., Gu H., Mingham C.G., Ferrera P.M.** A GPU based compressible multiphase hydrocode for modeling violent hydrodynamic impact problems // Computers and Fluids. — 2015. — Vol. 120. — P. 1–23.
5. **Суров В.С.** Многомерный узловой метод характеристик для гиперболических систем // Компьютерные исследования и моделирование. — 2021. — Т. 13. № 1. — С. 19–32. — https://doi.org/10.20537/2076-7633-2021-13-1-19-32.
6. **Суров В.С.** Узловой метод характеристик в многожидкостной гидродинамике // ИФЖ. — 2013. — Т. 86, № 5. — С. 1080–1087. Перевод: Surov V.S. Nodal method of characteristics in multifluid hydrodynamics // J. Eng. Phys. Thermophys. — 2013. — Vol. 86, № 5. — P. 1151–1159. — https://doi.org/10.1007/s10891-013-0937-5.
7. **Nakamura T., Tanaka R., Yabec T., Takizawa K.** Exactly conservative semi-Lagrangian scheme for multi-dimensional hyperbolic equations with directional splitting technique // J. of Computational Physics. — 2001. — Vol. 174, № 1. — P. 171–207.
8. **Бирюков В.А., Миряха В.А., Петров И.Б., Хохлов Н.И.** Моделирование распространения упругих волн в геологической среде: сравнение результатов трех численных методов // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2016. — Т. 56, № 6. — С. 1104–1095. Перевод: Biryukov V.A., Miryakha V.A., Petrov I.B., Khokhlov N.I. Simulation of elastic wave propagation in geological media: intercomparison of three numerical methods // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 56, № 6. — P. 1086–1062.
9. **Магомедов К.М., Холодов А.С.** Сеточно-характеристические численные методы: учебное пособие для вузов. 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Юрайт, 2020.
10. **Sauerwein H.** Numerical calculations of multidimensional and unsteady flows by the method of characteristics // J. of Computational Physics. — 1967. — Vol. 1. — P. 406–432.
11. **Зауэр Р.** Нестационарные задачи газодинамики. — Москва: Мир, 1969. Перевод: Sauer R. Nichtstationare Probleme der Gasdynamik. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1966.
12. **Parpia I.H., Kentzer C.P., Williams M.H.** Multidimensional time dependent method of characteristics // AIAA J. — 1985. — Vol. 23, № 10. — P. 1497–1505.
13. **Marcum D.L., Hoffman J.D.** Calculation of three-dimensional flowfields by the unsteady method of characteristics // Computers and Fluids. — 1988. — Vol. 16, № 1. — P. 105–117.
14. **Суров В.С.** К расчету течений теплопроводной парогазокапельной смеси // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — 2020. — Т. 23, № 2. — С. 201–217. Перевод: Surov V.S. Calculation of heat-conducting vapor-gas-drop mixture flows // Numerical Analysis and Applications. — 2020. — Vol. 13, № 2. — P. 165–179. — https://doi.org/10.1134/S199542392002007X.
15. **Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.** Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — Москва: Физматлит, 2012.
16. **Роуч П.** Вычислительная гидродинамика. — Москва: Мир, 1980.
17. **Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.** Вычислительная гидромеханика и теплообмен. — Москва: Мир, 1990. Перевод: Anderson D.A., Tannehill J.C., Pletcher R.H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. — Taylor & Francis, 1984.
18. **Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.** Численное решение многомерных задач газовой динамики. — Москва: Наука, 1976.
19. **Гришин Ю.А., Зенкин В.А., Хмелев Р.Н.** Граничные условия для численного расчета газообмена в поршневых двигателях // ИФЖ. — 2017. — Т. 90, № 4. — С. 1012–1017. Перевод: Grishin Yu.A., Zenkin V.A., Khmelev R.N. Boundary conditions for numerical calculation of gas exchange in piston engines // J. Eng. Phys. Thermophysics. — 2017. — Vol. 90, № 4. — P. 965–970.
20. **Суров В.С.** К вопросу граничных условий в многомерном узловом методе характеристик // ИФЖ. — 2021. — Т. 94, № 3. — С. 715–721. Перевод: Surov V.S. On the problem of

boundary conditions in the multidimensional nodal method of characteristics // J. Eng. Phys. Thermophysics. — 2021. — Vol. 94, № 3. — P. 695–701. — https://doi.org/10.1007/s10891-021-02346-1.

21. **Суров В.С.** Латентные волны в гетерогенных средах // ИФЖ. — 2014. — Т. 87, № 6. — С. 1404–1408. Перевод: Surov V.S. Latent waves in heterogeneous media // J. Eng. Phys. Thermophysics. — 2014. — Vol. 87, № 6. — P. 1463–1468. — https://doi.org/10.1007/S10891-014-1151-9.

22. **Суров В.С.** Метод Годунова для расчета многомерных течений односкоростной многокомпонентной смеси // ИФЖ. — 2016. — Т. 89, № 5. — С. 1237–1249. Перевод: Surov V.S. The Godunov method for calculating multidimensional flows of a one-velocity multicomponent mixture // J. Eng. Phys. Thermophysics. — 2016. — Vol. 89, № 5. — P. 1227–1240. — https://doi.org/10.1007/s10891-016-1486-5.

23. **Toro E.F.** Riemann solvers with evolved initial condition // Int. J. for Numerical Methods in Fluids. — 2006. — Vol. 52. — P. 433–453.

24. **Суров В.С.** Ударная адиабата односкоростной гетерогенной среды // ИФЖ. — 2006. — Т. 79, № 5. — С. 46–52. Перевод: Surov V.S. Shock adiabat of a one-velocity heterogeneous medium // J. Eng. Phys. Thermophysics. — 2006. — Vol. 79, № 5. — P. 886–892. — https://doi.org/10.1007/s10891-006-0179-x.

25. **Суров В.С.** О некоторых автомодельных задачах течения односкоростной гетерогенной среды // ИФЖ. — 2007. — Т. 80, № 6. — С. 164–172. Перевод: Surov V.S. Certain self-similar problems of flow of a one-velocity heterogeneous medium // J. Eng. Phys. Thermophysics. — 2007. — Vol. 80, № 6. — P. 1237–1246. — https://doi.org/10.1007/s10891-007-0160-3.

26. **Суров В.С.** Течение Буземана для односкоростной модели гетерогенной среды // ИФЖ. — 2007. — Т. 80, № 4. — С. 45–51. Перевод: Surov V.S. The Busemann flow for a one-velocity model of a heterogeneous medium // J. Eng. Phys. Thermophysics. — 2007. — Vol. 80, № 4. — P. 681–688. — https://doi.org/10.1007/s10891-007-0092-y.

27. **Суров В.С.** Гиперболические модели в механике гетерогенных сред // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2014. — Т. 54, № 1. — С. 139–148. Перевод: Surov V.S. Hyperbolic models in the mechanics of heterogeneous media // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2014. — Vol. 54, № 1. — P. 148–157. — https://doi.org/10.1134/S096554251401014X.

28. **Суров В.С.** К расчету упругопластической деформации твердого тела многомерным узловым методом характеристик // Вычислительные технологии. — 2021. — Т. 26, № 4. — С. 39–52. — https://doi.org/10.25743/ICT.2021.26.4.005.

Поступила в редакцию 03 марта 2023 г.
После исправления 22 июня 2023 г.
Принята к печати 05 сентября 2023 г.

Литература в транслитерации

1. **Surov V.S.** Odnoskorostnaya model' geterogennoi sredy s giperbolichnym adiabaticheskim yadrom // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2008. — T. 48, № 6. — S. 1111–1125. Perevod: Surov V.S. One-velocity model of a heterogeneous medium with a hyperbolic adiabatic kernel // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2008. — Vol. 48, № 6. — P. 1048–1062. — https://doi.org/10.1134/S0965542508060146.

2. **Kapila A., Menikoff R., Bdzil J., Son S., Stewart D.** Two-phase modeling of deflagration-to-detonation transition in granular materials: reduced equations // Phys. Fluids. — 2001. — Vol. 13. — P. 3002–3024.

3. **Murrone A., Guillard H.** A five equation reduced model for compressible two phase flow problems // J. Comput. Phys. — 2005. — Vol. 202. — P. 664–698.
4. **Ma Z.H., Causon D.M., Qian L., Gu H., Mingham C.G., Ferrera P.M.** A GPU based compressible multiphase hydrocode for modeling violent hydrodynamic impact problems // Computers and Fluids. — 2015. — Vol. 120. — P. 1–23.
5. **Surov V.S.** Mnogomernyi uzlovoi metod kharakteristik dlya giperbolicheskikh sistem // Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie. — 2021. — T. 13. № 1. — S. 19–32. — https://doi.org/10.20537/2076-7633-2021-13-1-19-32.
6. **Surov V.S.** Uzlovoi metod kharakteristik v mnogozhidkostnoi gidrodinamike // IFZh. — 2013. — T. 86, № 5. — S. 1080–1087. Perevod: Surov V.S. Nodal method of characteristics in multifluid hydrodynamics // J. Eng. Phys. Thermophys. — 2013. — Vol. 86, № 5. — P. 1151–1159. — https://doi.org/10.1007/s10891-013-0937-5.
7. **Nakamura T., Tanaka R., Yabec T., Takizawa K.** Exactly conservative semi-Lagrangian scheme for multi-dimensional hyperbolic equations with directional splitting technique // J. of Computational Physics. — 2001. — Vol. 174, № 1. — P. 171–207.
8. **Biryukov V.A., Miryakha V.A., Petrov I.B., Khokhlov N.I.** Modelirovanie rasprostraneniya uprugikh voln v geologicheskoi srede: sravnenie rezul'tatov trekh chislennykh metodov // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2016. — T. 56, № 6. — S. 1104–1095. Perevod: Biryukov V.A., Miryakha V.A., Petrov I.B., Khokhlov N.I. Simulation of elastic wave propagation in geological media: intercomparison of three numerical methods // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 56, № 6. — P. 1086–1062.
9. **Magomedov K.M., Kholodov A.S.** Setochno-kharakteristicheskie chislennye metody: uchebnoe posobie dlya vuzov. 2-e izd., ispr. i dop. — Moskva: Yurait, 2020.
10. **Sauerwein H.** Numerical calculations of multidimensional and unsteady flows by the method of characteristics // J. of Computational Physics. — 1967. — Vol. 1. — P. 406–432.
11. **Zauer R.** Nestatsionarnye zadachi gazodinamiki. — Moskva: Mir, 1969. Perevod: Sauer R. Nichtstationare Probleme der Gasdynamik. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1966.
12. **Parpia I.H., Kentzer C.P., Williams M.H.** Multidimensional time dependent method of characteristics // AIAA J. — 1985. — Vol. 23, № 10. — P. 1497–1505.
13. **Marcum D.L., Hoffman J.D.** Calculation of three-dimensional flowfields by the unsteady method of characteristics // Computers and Fluids. — 1988. — Vol. 16, № 1. — P. 105–117.
14. **Surov V.S.** K raschetu techenii teploprovodnoi parogazokapel'noi smesi // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — 2020. — T. 23, № 2. — S. 201–217. Perevod: Surov V.S. Calculation of heat-conducting vapor-gas-drop mixture flows // Numerical Analysis and Applications. — 2020. — Vol. 13, № 2. — P. 165–179. — https://doi.org/10.1134/S199542392002007X.
15. **Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu.** Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravnenii. — Moskva: Fizmatlit, 2012.
16. **Rouch P.** Vychislitel'naya gidrodinamika. — Moskva: Mir, 1980.
17. **Anderson D., Tannehill Dzh., Pletcher R.** Vychislitel'naya gidromekhanika i teploobmen. — Moskva: Mir, 1990. Perevod: Anderson D.A., Tannehill J.C., Pletcher R.H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. — Taylor & Francis, 1984.
18. **Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya., Kraiko A.N., Prokopov G.P.** Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoi dinamiki. — Moskva: Nauka, 1976.
19. **Grishin Yu.A., Zenkin V.A., Khmelev R.N.** Granichnye usloviya dlya chislennogo rascheta gazoobmena v porshnevykh dvigatelyakh // IFZh. — 2017. — T. 90, № 4. — S. 1012–1017. Perevod: Grishin Yu.A., Zenkin V.A., Khmelev R.N. Boundary conditions for numerical calculation of gas exchange in piston engines // J. Eng. Phys. Thermophysics. — 2017. — Vol. 90, № 4. — P. 965–970.

20. **Surov V.S.** K voprosu granichnykh uslovii v mnogomernom uzlovom metode kharakteristik // IFZh. — 2021. — T. 94, № 3. — S. 715–721. Perevod: Surov V.S. On the problem of boundary conditions in the multidimensional nodal method of characteristics // J. Eng. Phys. Thermophysics. — 2021. — Vol. 94, № 3. — P. 695–701. — https://doi.org/10.1007/s10891-021-02346-1.

21. **Surov V.S.** Latentnye volny v geterogennykh sredakh // IFZh. — 2014. — T. 87, № 6. — S. 1404–1408. Perevod: Surov V.S. Latent waves in heterogeneous media // J. Eng. Phys. Thermophysics. — 2014. — Vol. 87, № 6. — P. 1463–1468. — https://doi.org/10.1007/S10891-014-1151-9.

22. **Surov V.S.** Metod Godunova dlya rascheta mnogomernykh techenii odnoskorostnoi mnogokomponentnoi smesi // IFZh. — 2016. — T. 89, № 5. — S. 1237–1249. Perevod: Surov V.S. The Godunov method for calculating multidimensional flows of a one-velocity multicomponent mixture // J. Eng. Phys. Thermophysics. — 2016. — Vol. 89, № 5. — P. 1227–1240. — https://doi.org/10.1007/s10891-016-1486-5.

23. **Toro E.F.** Riemann solvers with evolved initial condition // Int. J. for Numerical Methods in Fluids. — 2006. — Vol. 52. — P. 433–453.

24. **Surov V.S.** Udarnaya adiabata odnoskorostnoi geterogennoi sredy // IFZh. — 2006. — T. 79, № 5. — S. 46–52. Perevod: Surov V.S. Shock adiabat of a one-velocity heterogeneous medium // J. Eng. Phys. Thermophysics. — 2006. — Vol. 79, № 5. — P. 886–892. — https://doi.org/10.1007/s10891-006-0179-x.

25. **Surov V.S.** O nekotorykh avtomodel'nykh zadachakh techeniya odnoskorostnoi geterogennoi sredy // IFZh. — 2007. — T. 80, № 6. — S. 164–172. Perevod: Surov V.S. Certain self-similar problems of flow of a one-velocity heterogeneous medium // J. Eng. Phys. Thermophysics. — 2007. — Vol. 80, № 6. — P. 1237–1246. — https://doi.org/10.1007/s10891-007-0160-3.

26. **Surov V.S.** Techenie Buzemana dlya odnoskorostnoi modeli geterogennoi sredy // IFZh. — 2007. — T. 80, № 4. — S. 45–51. Perevod: Surov V.S. The Busemann flow for a one-velocity model of a heterogeneous medium // J. Eng. Phys. Thermophysics. — 2007. — Vol. 80, № 4. — P. 681–688. — https://doi.org/10.1007/s10891-007-0092-y.

27. **Surov V.S.** Giperbolicheskie modeli v mekhanike geterogennykh sred // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2014. — T. 54, № 1. — S. 139–148. Perevod: Surov V.S. Hyperbolic models in the mechanics of heterogeneous media // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2014. — Vol. 54, № 1. — P. 148–157. — https://doi.org/10.1134/S096554251401014X.

28. **Surov V.S.** K raschetu uprugoplasticheskoi deformatsii tverdogo tela mnogomernym uzlovym metodom kharakteristik // Vychislitel'nye tekhnologii. — 2021. — T. 26, № 4. — S. 39–52. — DOI: 10.25743/ICT.2021.26.4.005.