

УДК 539.3

МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ И СТРУКТУРА ВОЛН РАЗРУШЕНИЯ

Е. И. Роменский

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: evrom@math.nsc.ru

Предложены определяющие уравнения для моделирования неупругих деформаций хрупких материалов, позволяющие описывать волны разрушения, существование которых установлено экспериментально. Полная система уравнений является гиперболической, каждое уравнение этой системы имеет дивергентную форму. В основе модели лежит предположение о том, что процесс континуального разрушения представляет собой переход из неповрежденного состояния в “полностью поврежденное”, который описывается с помощью кинетики параметра порядка. На основе упрощенной модели проанализирована структура стационарных бегущих волн сжатия. Показано, что в некотором диапазоне амплитуды волна расщепляется на упругий предвестник и собственно волну разрушения.

Ключевые слова: неупругое деформирование хрупких материалов, волны разрушения, структура ударной волны.

В работе построены определяющие уравнения для моделирования неупругих деформаций хрупких материалов, позволяющие описывать так называемые волны разрушения. Разрушение хрупкого материала под действием сжимающих напряжений характеризуется образованием множественных трещин и имеет волновой характер [1, 2]. Теоретическое исследование волн разрушения находится в начальной стадии [3, 4], и удовлетворительной математической модели для качественного анализа и численного изучения названных процессов не построено. В данной работе с использованием нелинейной теории неупругих деформаций [5] сформулированы определяющие дифференциальные уравнения континуального хрупкого разрушения в виде гиперболической системы, каждое уравнение которой имеет дивергентную форму. Кроме того, предлагаемая модель удовлетворяет законам неравновесной термодинамики. Модели такого вида позволяют применять хорошо разработанные математические и эффективные численные методы для решения различных задач.

В основе предлагаемой модели лежит предположение о том, что элемент материала, подвергающийся континуальному разрушению, претерпевает превращение из неповрежденного состояния в “полностью поврежденное”, которое можно охарактеризовать собственными модулями упругости, отличающимися от модулей упругости неповрежденного материала. Процесс такого превращения описывается уравнением для параметра порядка с нелинейной кинетикой. Модель учитывает также неупругое деформирование материала, сопровождающее процесс континуального разрушения. Подобная модель для случая малых деформаций, а также численные расчеты некоторых задач, результаты которых хорошо согласуются с экспериментальными данными [1], были предложены в [3].

Работа выполнена в рамках Программы поддержки грантов (Grant Assistance Program) фонда CRDF (грант RUE1-1611-NO-05).

В данной работе на основе упрощенной модели континуального разрушения проанализирована структура стационарных бегущих волн сжатия. Метод исследования аналогичен приведенному в [6] анализу структуры ударной волны в среде с релаксацией, а также методу исследования упругопластических волн в нелинейной среде Максвелла [5]. В некотором диапазоне амплитуды волна расщепляется на упругий предвестник и собственно волну разрушения, что соответствует экспериментально наблюдаемой структуре волны.

1. Полная система определяющих уравнений. Следуя [5], параметрами, характеризующими состояние среды, будем считать вектор скоростей u^i ($i = 1, 2, 3$), градиент упругой деформации c_{ij} (тензор упругой дисторсии [5]), разгрузочную плотность ρ_0 (плотность, соответствующую данному элементу среды, приведенному к состоянию с нулевым полем напряжений) и энтропию S . В качестве меры поврежденности элемента среды введем параметр порядка $\xi \in [0, 1]$.

В декартовой системе координат x^i полная система определяющих уравнений состоит из законов сохранения импульса, закона сохранения массы, законов сохранения тензора упругой дисторсии, уравнения баланса параметра порядка и закона сохранения энергии и имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u^i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^i u^k - \sigma^{ik})}{\partial x^k} &= 0, & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^k}{\partial x^k} &= 0, \\ \frac{\partial \rho c_j^i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho c_j^i u^k - \rho c_j^k u^i)}{\partial x^k} &= -(u^i \beta_j + \varphi_j^i), & \frac{\partial \rho \xi}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^k \xi}{\partial x^k} &= -\psi, \\ \frac{\partial \rho (E + u_i u^i / 2)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u (E + u_i u^i / 2) - u^i \sigma_i^k)}{\partial x^k} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Кроме перечисленных выше параметров состояния среды в уравнениях системы (1) использованы следующие величины: $\rho = \rho_0 / \det(c_j^i)$ — текущая плотность, $\sigma_j^i = -2\rho c_n^i \partial E / \partial c_j^n$ — тензор напряжений. Плотность внутренней энергии E является замыкающим соотношением, которое необходимо задавать как функцию параметров состояния среды (разгрузочной плотности, тензора дисторсии, параметра порядка и энтропии):

$$E = E(\rho_0, c_1^1, c_2^1, \dots, c_3^3, \xi, S).$$

Правые части ψ и $u^i \beta_j + \varphi_j^i$ в уравнениях для ξ и c_j^i служат для описания кинетики разрушения и неупругих деформаций. Слагаемое $u^i \beta_j$ содержит переменные β_j , с помощью которых уравнения для упругих дисторсий записываются в дивергентной форме. Для этих вспомогательных переменных необходимо выполнение дополнительных законов сохранения [5], являющихся следствиями системы (1):

$$\frac{\partial \rho c_j^i}{\partial x^i} = \beta_j, \quad \frac{\partial \beta_j}{\partial t} + \frac{\partial (u^i \beta_j + \varphi_j^i)}{\partial x^i} = 0, \quad (2)$$

Переменные β_j можно исключить из системы (1), однако при этом уравнение для тензора дисторсии c_j^i теряет дивергентную форму:

$$\frac{\partial \rho c_j^i}{\partial t} + \frac{\partial \rho c_j^i u^k}{\partial x^k} - \rho c_j^k \frac{\partial u^i}{\partial x^k} = -\varphi_j^i.$$

Используя результаты анализа уравнений нелинейной модели Максвелла неупругих деформаций [5], можно показать, что характеристики системы дифференциальных уравнений вещественны, а значит, система является гиперболической.

Следует отметить, что процессы, описываемые уравнениями (1), удовлетворяют второму закону термодинамики — закону возрастания энтропии:

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u^\alpha}{\partial x^\alpha} = Q = \frac{E_{c_j^i} \varphi_j^i + E_\xi \xi}{E_S}.$$

Построенная модель термодинамически корректна, если производство энтропии Q является неотрицательным. Это условие налагает ограничения на выбор функций, определяющих кинетику параметра порядка и неупругих деформаций:

$$E_{c_j^i} \varphi_j^i + E_\xi \xi \geq 0.$$

Итак, выше сформулированы общие уравнения для моделирования процессов континуального разрушения. Эти уравнения согласуются с законами термодинамики, являются гиперболическими и имеют дивергентную форму. При моделировании реальных процессов для конкретного материала необходимо задавать зависимость внутренней энергии от параметров среды (уравнение состояния), а также кинетику неупругих деформаций и континуального разрушения φ_j^i и ψ , которые также являются функциями параметров состояния.

2. Упрощенная модель континуального разрушения для одномерных процессов и стационарные бегущие волны. Для того чтобы показать применимость построенной выше модели к описанию континуального разрушения, сформулируем упрощенные одномерные уравнения и на основе анализа стационарных бегущих волн убедимся, что при соответствующем выборе замыкающих соотношений модель качественно описывает экспериментально наблюдаемые особенности волн разрушения.

Рассмотрим одномерные волны, распространяющиеся вдоль оси $x^1 = x$ со скоростью $u^1 = u$, остальные компоненты вектора скорости будем считать равными нулю: $u^2 = u^3 = 0$. В этом случае тензор напряжений принимает диагональную форму: $\sigma_{ij} = \sigma_i \delta_{ij}$ (σ_i — главные значения напряжений). В качестве меры деформаций в одномерном случае выберем логарифмический тензор Генки, связанный с тензором дисторсии [5]: $(h_{ij}) = \ln(c_i^k c_j^k)$. В одномерном случае тензор Генки также принимает диагональную форму: $h_{ij} = h_i \delta_{ij}$. Вследствие изотропии среды напряжения и упругие деформации в направлении, перпендикулярном оси x , однородны, т. е. $\sigma_2 = \sigma_3$, $h_2 = h_3$. В этом случае плотность связана с тензором упругих деформаций Генки формулой

$$\rho = \rho_0 \exp(-h_1 - 2h_2), \quad (3)$$

где $\rho_0 = \text{const}$ — плотность материала в начальном недеформированном состоянии. Далее предположим, что разгрузочная плотность ρ_0 не меняется, т. е. отсутствует неупругое изменение объема. С учетом этого в одномерном случае упрощенная система определяющих уравнений (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 - \sigma_1)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho h_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho u h_2}{\partial x} &= -\varphi, & \frac{\partial \rho \xi}{\partial t} + \frac{\partial \rho u \xi}{\partial x} &= -\psi, \\ \frac{\partial \rho (E + u^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u (E + u^2/2) - u \sigma_1)}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

При этом не возникает необходимости введения вспомогательной переменной β_j в соответствии с формулами (2), поскольку одномерные уравнения имеют дивергентную форму. Из системы (4) следует уравнение баланса энтропии

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u}{\partial x} = Q = \frac{2(E_{h_2} - E_{h_1})\varphi + E_\xi \psi}{E_S}. \quad (5)$$

Выполнение закона неубывания энтропии обеспечивается соответствующим выбором функций φ и ψ , моделирующих кинетику неупругих деформаций и параметра порядка.

Для замыкания системы уравнений (4), предназначенной для исследования одномерных волновых процессов, необходимо определение трех соотношений: уравнения состояния $E = E(\rho_0, c_1^1, c_2^1, \dots, c_3^3, \xi, S)$ и функций φ, ψ . Имеющиеся экспериментальные данные весьма ограничены, и для определения указанных замыкающих соотношений требуются дополнительные предположения. Ниже сформулируем более простую модель, которая могла бы служить базовой для дальнейшего обобщения. Пренебрегая температурными эффектами и неупругими деформациями, сопровождающими континуальное разрушение, получаем еще более простую модель одномерных волновых процессов, определяющие уравнения которой имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 - \sigma_1)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho h_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho u h_2}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \rho \xi}{\partial t} + \frac{\partial \rho u \xi}{\partial x} &= -\psi. \end{aligned} \quad (6)$$

Система (6) состоит из четырех дифференциальных уравнений в дивергентной форме для четырех неизвестных u, h_1, h_2, ξ .

Тензор напряжений (его главные значения) определяется по формуле

$$\sigma_i = \rho \frac{\partial E}{\partial h_i}, \quad (7)$$

где внутренняя энергия $E = E(h_1, h_2, \xi)$ зависит от параметров Генки h_1, h_2 и параметра порядка ξ ; плотность вычисляется по формуле (3). Заметим, что для вычисления напряжений по формуле (7) необходимо использовать зависимость внутренней энергии $E = E(h_1, h_2, h_3, \xi)$ и только после дифференцирования полагать $h_2 = h_3$.

Далее исследуем частные решения системы (6) в виде стационарных бегущих волн. Решения такого типа на бесконечном интервале определены пространственной переменной $x \in (-\infty, +\infty)$, при $x \rightarrow \pm\infty$ ограничены и зависят только от переменной $L = x - Dt$ ($D = \text{const}$ — скорость стационарной бегущей волны). Рассмотрим решения при $D > 0$, т. е. движение волны в положительном направлении оси x . Решения такого типа можно найти из системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая следует из (6), если искать решение в виде

$$h_1 = h_1(L), \quad h_2 = h_2(L), \quad u = u(L), \quad \xi = \xi(L).$$

Подставляя названные выше функции в систему (6), для стационарной бегущей волны получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(u - D)}{dL} &= 0, & \frac{d(\rho u(u - D) - \sigma_1)}{dL} &= 0, \\ \frac{d\rho(u - D)h_2}{dL} &= 0, & \frac{d\rho(u - D)\xi}{dL} &= -\psi. \end{aligned} \quad (8)$$

Первые три уравнения системы (8) могут быть проинтегрированы и сводятся к трем алгебраическим уравнениям — соотношениям на разрыве. Тогда система принимает вид

$$\begin{aligned} [\rho(u - D)] &= 0, & [\rho u(u - D) - \sigma_1] &= 0, \\ [\rho(u - D)h_2] &= 0, & \frac{d\rho(u - D)\xi}{dL} &= -\psi. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $[F] = F - F_0$ — скачок величины F ; F_0, F — значения перед волной ($L = +\infty$) и за ней ($L = -\infty$). Последнее обыкновенное дифференциальное уравнение системы (9) определяет структуру волны на интервале $-\infty < x < +\infty$.

3. О выборе замыкающих соотношений. Для исследования волн разрушения в конкретных материалах используем замыкающие соотношения для системы (6): правую часть в уравнении для ξ , описывающую кинетику параметра порядка, и уравнение состояния (плотность внутренней энергии E).

Сначала определим функцию ψ , которая должна удовлетворять следующим ограничениям: 1) обеспечивать положительность производства энтропии в уравнении (5); 2) иметь нулевые значения при $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Функция $\psi = \psi_0(1 - \xi)E_\xi$ удовлетворяет условию неотрицательности производства энтропии, поскольку $\psi E_\xi \geq 0$, и обращается в нуль при $\xi = 1$. В предположении, что для неповрежденного материала в ненапряженном состоянии $E_\xi = 0$ (далее показано, что это предположение справедливо), выбранная таким образом функция ψ удовлетворяет всем необходимым требованиям. Заметим, что ψ_0 может зависеть от параметров состояния материала (напряжений и ξ).

Уравнение состояния будем выбирать с учетом того, что, как сказано выше, процесс континуального разрушения моделируется переходом неповрежденной фазы ($\xi = 0$) в “полностью поврежденную” ($\xi = 1$). В промежуточном состоянии элемент среды можно рассматривать как смесь компонент неповрежденного и “полностью поврежденного” материалов. При этом, следуя [3], параметр порядка ξ можно отождествить с объемной концентрацией “полностью поврежденного” материала в смеси.

В [3] предложена процедура, позволяющая получить уравнение состояния смеси, если известны уравнения состояния упругого неповрежденного и “полностью поврежденного” материалов. Процедура основана на гипотезе о том, что плотность внутренней энергии смеси E есть среднее по массовой концентрации плотностей внутренних энергий E_1 и E_2 неповрежденного и “полностью поврежденного” материалов соответственно:

$$\rho E = \xi \rho_2 E_2 + (1 - \xi) \rho_1 E_1$$

($\rho = \xi \rho_2 + (1 - \xi) \rho_1$ — плотность смеси). Для того чтобы выразить параметры состояния смеси через параметры состояния компонент, используем дополнительные гипотезы. В предположении, что поле напряжений в элементе смеси находится в состоянии равновесия (т. е. напряжения в упругой и “полностью поврежденной” компонентах равны) [3], а упругая деформация смеси является осредненной по объемной концентрации упругих деформаций неразрушенного и полностью разрушенного материалов, можно получить в замкнутой форме зависимость внутренней энергии от упругой деформации смеси и параметра порядка. В случае, если внутренняя энергия неповрежденного и “полностью поврежденного” материалов определяется законом Гука, процедура осреднения приводит к следующему уравнению состояния для смеси [3]:

$$E(h_1, h_2, h_3, \xi) = \frac{\lambda(\xi)}{2\rho_0} (h_1 + h_2 + h_3)^2 + \frac{\mu(\xi)}{\rho_0} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2). \quad (10)$$

Модули материала, подвергающегося повреждению, определяются по формулам

$$\lambda = \frac{K_1 K_2}{\tilde{K}} - \frac{2}{3} \frac{\mu_1 \mu_2}{\tilde{\mu}}, \quad \mu = \frac{\mu_1 \mu_2}{\tilde{\mu}}, \quad (11)$$

$$\tilde{K} = \xi K_1 + (1 - \xi) K_2, \quad \tilde{\mu} = \xi \mu_1 + (1 - \xi) \mu_2,$$

$$K_2 = \lambda_2 + (2/3) \mu_2, \quad K_1 = \lambda_1 + (2/3) \mu_1.$$

При $\xi = 0$ (неповрежденный материал) $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \mu_1$, при $\xi = 1$ (“полностью поврежденный” материал) $\lambda = \lambda_2$, $\mu = \mu_2$.

Ниже показано, что уравнение состояния (10) можно использовать для качественного описания распространения волн разрушения.

4. Уравнения для описания структуры волны разрушения, распространяющейся по ненапряженному материалу. Построим решение системы (9), которое описывает структуру волны разрушения, распространяющейся по ненапряженному материалу. Из ограниченности решения (9) при $L = \pm\infty$ следует, что производные всех неизвестных функций по переменной L при $L = \pm\infty$ равны нулю. Пусть $u_0, \rho_0, h_2^0, \xi_0$ — известные параметры состояния перед волной ($\xi = +\infty$). Тогда систему (9) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho(u - D) = \rho_0(u_0 - D) = m, \quad \rho u(u - D) - \sigma_1 = \rho_0 u_0(u_0 - D) - \sigma_1^0, \\ \rho(u - D)h_2 = \rho_0(u_0 - D)h_2^0, \quad \frac{d\rho(u - D)\xi}{dL} = -\psi, \end{aligned}$$

где m — поток массы через волну.

Исследуем волну, распространяющуюся по ненапряженному неподвижному ($u_0 = 0$) и неповрежденному ($\xi_0 = 0$) материалу, в котором упругая деформация в направлении, перпендикулярном оси x , равна нулю ($h_2^0 = 0$). В этом случае из третьего уравнения данной системы следует, что $h_2 = 0$. Тогда деформацию вдоль оси x можно представить как функцию плотности: $h_1 = \ln \rho_0/\rho$.

Используя определение потока массы через волну m и введя обозначение $U = u - D$, окончательно получим систему для исследования структуры стационарной бегущей волны:

$$\rho U = \rho_0 U_0 = m, \quad \frac{m^2}{\rho} - \sigma_1(\rho, \xi) = \frac{m^2}{\rho_0} - \sigma_1^0, \quad m \frac{d\xi}{dL} = -\psi. \quad (12)$$

Система (12) содержит три уравнения для четырех неизвестных ξ, ρ, U, m . Для того чтобы решить эту систему, необходимо задать величину m или какой-либо параметр состояния за волной (при $L = -\infty$). Однако данная система не всегда имеет решение, условия ее разрешимости приведены ниже.

Построение решения задачи о структуре волны разрушения проводится в два этапа. Сначала находим параметры состояния за волной, затем строим решение, соединяющее состояния перед волной ($L = +\infty$) и за ней.

Предположим, что напряжение за волной ($L = -\infty$) известно: $\sigma_1 = -P$. Тогда при условии ограниченности решения при $L \rightarrow -\infty$ можно найти остальные параметры состояния за волной. Из условия ограниченности следует, что $d\xi/dL = 0$ при $L = -\infty$. В результате получаем систему алгебраических уравнений для нахождения потока массы через волну m , плотности ρ и параметра порядка ξ за волной:

$$m^2/\rho + P = m^2/\rho_0 - \sigma_1^0, \quad \psi = \chi E_\xi = 0, \quad \sigma_1(\rho, \xi) = -P.$$

Полагая, что правая часть ψ в уравнении для ξ при $\xi = 1$ равна нулю, получаем систему для нахождения m и ρ за волной:

$$m^2/\rho + P = m^2/\rho_0 - \sigma_1^0, \quad \sigma_1(\rho, 1) = -P. \quad (13)$$

При условии выпуклости уравнения состояния для каждого заданного значения P получаем единственные значения m и ρ . Это позволяет изобразить на плоскости (P, V) кривую $P(V)$ ($V = 1/\rho$ — удельный объем), которую будем называть адиабатой Гюгониио “полностью поврежденного” материала. Заметим, что решение системы (13) существует при $m^2 > (\partial\sigma_1/\partial V)|_{\rho=\rho_0, \xi=1}$. Из этого условия следует, что в полностью разрушенном материале скорость распространения волны разрушения больше скорости звука.

Определим упругий скачок и адиабату Гюгониио упругого материала. Поскольку волна распространяется по ненапряженному неповрежденному материалу ($\xi = 0$), система

допускает разрывное решение, для которого $\xi = 0$ всюду при $L \in (-\infty, +\infty)$, а остальные параметры определяются из условий на скачке

$$\rho U = \rho_0 U_0 = m, \quad m^2/\rho - \sigma_1(\rho, 0) = m^2/\rho - \sigma_1^0.$$

Полагая, что за волной-разрывом задано напряжение $\sigma_1 = -P$, для каждого значения P можно найти поток массы через разрыв m и плотность за разрывом ρ из системы

$$m^2/\rho + P = m^2/\rho - \sigma_1^0, \quad \sigma_1(\rho, 0) = -P. \quad (14)$$

Тогда можно построить кривую $P(V)$, которую будем называть адиабатой Гюгонио упругого материала. Упругий скачок как решение системы (13) существует при $m^2 > (\partial\sigma_1/\partial V)|_{\rho=\rho_0, \xi=0}$. Из этого условия следует, что в упругом неразрушенном материале скорость распространения волны разрушения больше скорости звука.

Непрерывные участки решения задачи о структуре волны получаются в результате интегрирования системы

$$\frac{dL}{d\xi} = -\frac{m}{\psi}, \quad \frac{m^2}{\rho} - \sigma_1(\rho, \xi) = \frac{m^2}{\rho_0} - \sigma_1^0. \quad (15)$$

Поскольку параметр порядка ξ изменяется в диапазоне от 0 до 1, система (15) позволяет восстановить координату L .

5. Пример решения задачи о структуре волны разрушения. В качестве материала исследования выберем боросиликатное стекло (PYREX) со следующими параметрами для неразрушенного и полностью разрушенного материалов: $\lambda_1 = 38,9$ ГПа, $\mu_1 = 16,2$ ГПа, $\lambda_2 = 36,3$ ГПа, $\mu_2 = 12,5$ ГПа, $\rho_1 = \rho_2 = 2230$ кг/м³.

Поскольку набор констант неповрежденного материала, приведенных в [1], ограничен только плотностью и скоростью распространения продольных волн звука, λ_1, μ_1 выбраны таким образом, чтобы значение $(\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_1$ было равно квадрату скорости звука продольных волн в неповрежденном материале (5560 м/с). Далее положим, что плотность повреждающегося материала в ненапряженном состоянии не меняется. Выбор скоростей звука в “полностью поврежденном” материале имеет гипотетический характер и обусловлен необходимостью добиться более точного соответствия экспериментальным данным по ударно-волновому нагружению.

На рис. 1 представлены зависимости модулей λ, μ от параметра порядка ξ . Видно, что зависимость (11) имеет нелинейный характер, однако для выбранных значений модулей поврежденного материала она практически линейна.

На рис. 2 показаны кривые Гюгонио для неповрежденного и “полностью поврежденного” материалов в случае волн, распространяющихся по неподвижному ненапряженному материалу ($\rho_0 = 2230$ кг/м³, $u_0 = 0$ перед волной). Видно, что кривая Гюгонио для поврежденного материала расположена ниже кривой Гюгонио для неповрежденного материала. Таким образом, каждая “типичная” волна разрушения может быть сопоставлена с отрезком OAB , точки пересечения которого с кривыми Гюгонио соответствуют упругому скачку (точка A) и непрерывной волне разрушения (отрезок AB). Помимо решений, составленных из упругого скачка, сопровождаемого переходной волной превращения неразрушенного материала в разрушенный, могут существовать непрерывные решения в виде только волны превращения. Волны такого типа существуют при $\partial P_2/\partial V < m^2 < \partial P_1/\partial V$ (P_2, P_1 — кривые Гюгонио для полностью разрушенного и неразрушенного материалов соответственно).

Приведем решение задачи о структуре волны для некоторой функции ψ , описывающей кинетику параметра порядка, которая была выбрана таким образом, чтобы обеспе-

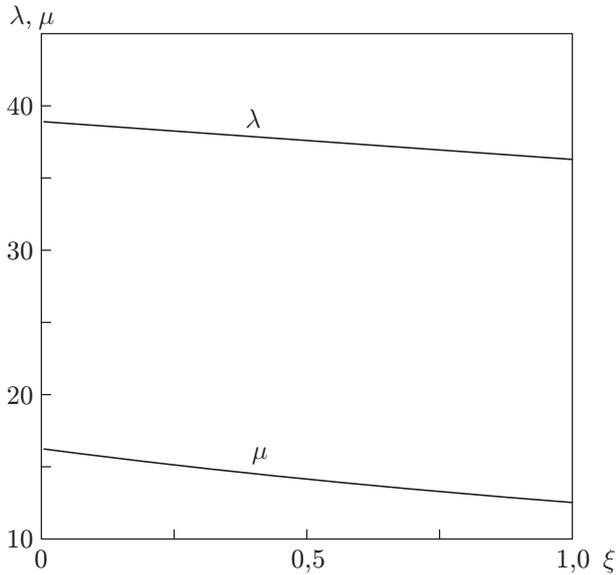


Рис. 1

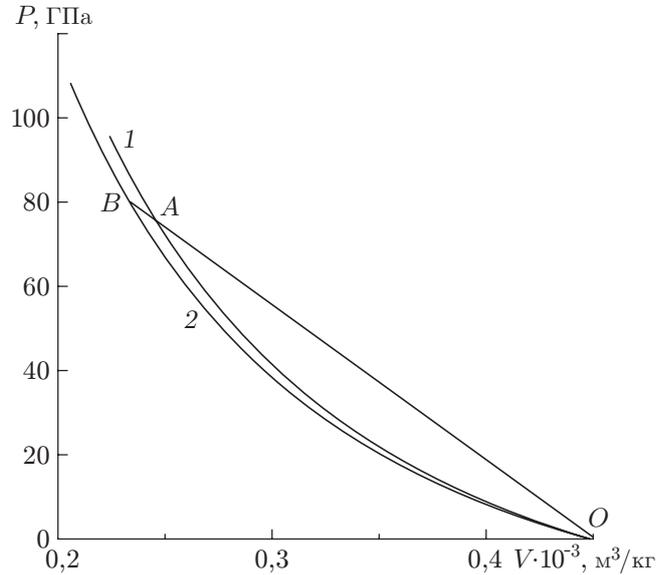


Рис. 2

Рис. 1. Зависимости модулей λ , μ от параметра порядка ξ

Рис. 2. Адиабаты Гюгонио для упругого неразрушенного (1) и “полностью поврежденного” (2) материалов:
точка A — упругий скачок; отрезок AB — непрерывная волна разрушения

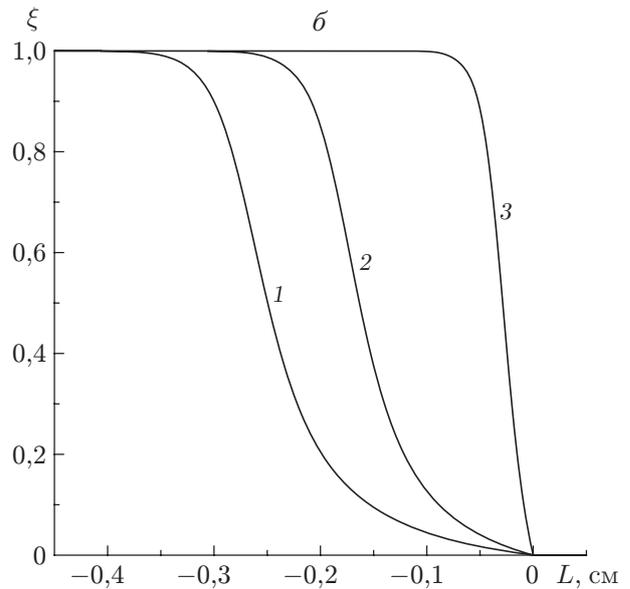
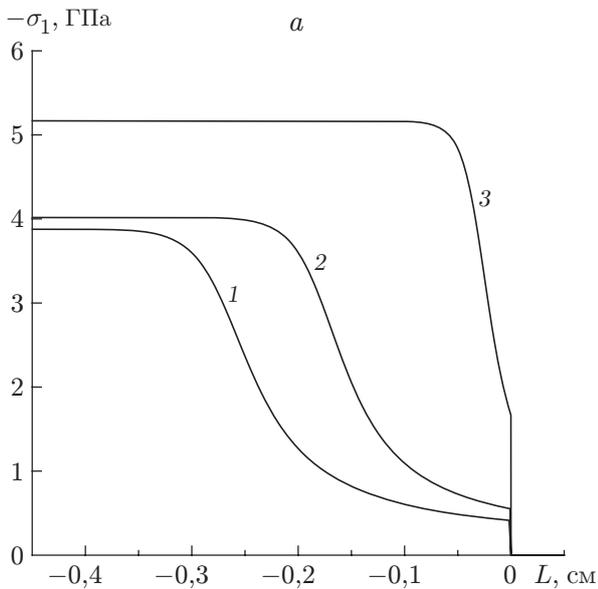


Рис. 3. Распределение напряжения σ_1 (а) и параметра порядка ξ (б) для различных волн разрушения:

1 — $D = 5585$ м/с, $u = 311$ м/с, $\sigma_1 = 3,88$ ГПа, $\rho = 2362$ кг/м³; 2 — $D = 5593$ м/с, $u = 322$ м/с, $\sigma_1 = 4,02$ ГПа, $\rho = 2366$ кг/м³; 3 — $D = 5659$ м/с, $u = 409$ м/с, $\sigma_1 = 5,16$ ГПа, $\rho = 2404$ кг/м³

чить близость полученных значений параметров волны и экспериментальных данных [1]. В построенном решении используется кинетика в виде

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \psi,$$

где $\psi = (1 - \xi)\psi_0 E_\xi$; $\psi_0 = K\rho(|\sigma|/\sigma_0)^\alpha$; $|\sigma| = |\sigma_1 - \sigma_2|$ в рассматриваемом случае одномерных деформаций; $\sigma_0 = 0,45$ ГПа; $K = 2 \cdot 10^4$ с/м²; $\alpha = 0,5$.

На рис. 3,а представлено распределение напряжения σ_1 для трех различных волн разрушения, распространяющихся по неподвижному ненапряженному упругому материалу ($u_0 = 0$, $\rho = \rho_0$, $\xi_0 = 0$ перед волной). Видно, что во всех трех случаях волна состоит из упругого предвестника, за которым следует гладкая волна разрушения. Характерная толщина участка перехода от неповрежденного к полностью поврежденному состоянию составляет доли сантиметра, причем с увеличением амплитуды толщина переходной зоны уменьшается. Если амплитуда волны достаточно велика, то упругий предвестник и переходная зона сливаются, и волна разрушения представляет собой одну волну. На рис. 3,б приведены профили параметра порядка для тех же волн. Видно, что $0 \leq \xi \leq 1$ и с увеличением амплитуды волны скорость изменения ξ также увеличивается. Отметим, что кривая 3 близка к экспериментально наблюдаемой [1]. Однако в рассмотренной модели не учтены неупругие деформации, возникающие в процессе хрупкого разрушения, и пластические деформации полностью разрушенного материала. Учет этих факторов позволит более точно описать экспериментальные данные.

Автор выражает благодарность М. А. Гринфельду за полезное обсуждение рассмотренной проблемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bourne N. K., Rosenberg Z., Mebar Y., et al. A high-speed photographic study of fracture wave propagation in glasses // J. Phys. IV, Colloq. 1994. V. 4, N C8. P. 635–640.
2. Kanel G. I., Razorenov S. V., Savinykh A. S., et al. A study of the failure wave phenomenon in glasses compressed at different levels // J. Appl. Phys. 2005. V. 98, N 11. P. 113523.1–113523.7.
3. Resnyansky A. D., Romensky E. I., Bourne N. K. Constitutive modelling of fracture waves // J. Appl. Phys. 2003. V. 93. P. 1537–1545.
4. Grinfeld M. A., Schoenfeld S. E., Wright T. W. Failure wave propagation based on the model of two-state substance // Proc. of the 10th Intern. conf. "Hyperbolic problems: theory, numerics and applications", Osaka (Japan), 13–17 Sept., 2004. Yokohama: Yokohama Publ., 2006. V. 1. P. 415–422.
5. Годунов С. К. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения / С. К. Годунов, Е. И. Роменский. Новосибирск: Науч. кн., 1998.
6. Зельдович Я. Б. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений / Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 26/VI 2006 г.